ЛЕКЦИЯ №10. Постановка задачи оценивания параметров сигналов. Байесовские оценки случайных параметров сигналов при различных функциях потерь.

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ОЦЕНИВАНИЯ И ФИЛЬТРАЦИИ ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛОВ

3.1. ТЕОРИЯ ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛОВ

Задача оценки параметров сигнала – это задача принятия оптимального решения о значении одного или нескольких параметров сигнала известной формы, имеющего также один или несколько неизвестных (“мешающих”) параметров на фоне помех.

Наблюдаемый сигнал можно описать следующим образом

$$x(t)=\Phi\left(s(t,\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\theta}),n(t)\right), \tag{3.1}$$

где $n(t)$ - помеха, $s(t,\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\theta})$ - информационный сигнал известной формы, $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)^T$ - вектор информационных параметров, $\boldsymbol{\theta}=(\theta_1,\ldots,\theta_m)^T$ - вектор мешающих параметров, $\boldsymbol{\Phi}(\bullet,\bullet)$ - механизм взаимодействия информационного сигнала с помехой.

В частном случае, когда механизм взаимодействия сигнала и помехи аддитивный, модель наблюдаемого сигнала можно записать:

$$x(t)=s(t,\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\theta})+n(t). \tag{3.2}$$

Задача оценки параметров предполагает, что как вектор $\boldsymbol{\lambda}$, так и $\boldsymbol{\theta}$ не меняется на интервале наблюдения $[0,T]$, т.е. являются постоянными, но неизвестными на приемной стороне параметрами.

В случае, когда вектор $\boldsymbol{\lambda}$ зависит от времени на интервале наблюдения, то задача оценивания таких параметров называется задачей фильтрации.

3.1.1. Байесовские оценки случайных параметров

В рамках байесовского подхода предполагается, что подлежащие оценке информационные и мешающие параметры сигнала являются случайными величинами.

Рассмотрим вначале задачу оценки одного параметра сигнала известной формы $s(t,\lambda)$. Наблюдаемый сигнал $x(t)=\Phi\left(s(t,\lambda),n(t)\right)$, обозначаемый также как $x\in\mathbf{X}$, где $\mathbf{X}$ - пространство наблюдаемых сигналов. Параметр сигнала λ является случайной величиной, характеризуемой плотностью распределения $p(\lambda)$.

Также как и ранее будем полагать, что в зависимости от вида пространства наблюдаемых сигналов принятый сигнал x и передаваемый s могут быть элементами n-мерных пространств $\mathbf{R}^n$ или $\mathbf{C}^n$ или функционального пространства $\mathbf{L}$.

Пусть оцениваемый параметр λ принимает N дискретных значений $\lambda_1,\ldots,\lambda_N$ равномерно с шагом $\Delta\lambda$. Тогда задача оценки этих параметров является эквивалентом задачи различения N сигналов вида:

$$
\begin{aligned}
&s_1(t) = s(t, \lambda),\\
&s_2(t) = s(t, \lambda_2),\\
&\dots\\
&s_N(t) = s(t, \lambda_N).
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

В этом случае, очевидно, что в соответствии с (2.18)

$$
\Delta\lambda\hat{k} = \hat{\lambda}_k = \arg\min_{l} \sum_{i=1}^{N} R_{il} \mathbf{P}\{H_i\} p(x|H_i), \tag{3.4}
$$

где H_i - гипотеза о наличие в наблюдаемой смеси сигнала $s_i(t) = s(t, \lambda_i)$, $\mathbf{P}\{H_i\} \approx p(\lambda_i)\Delta\lambda$ - априорная вероятность справедливости гипотезы H_i, $p(x|H_i)$ - условная плотность вероятности наблюдаемого сигнала $x \in \mathbf{X}$.

Проведем следующие формальные преобразования в (3.4)

$$
\hat{\lambda}_k = \arg\min_{j} \sum_{i=1}^{N} R_{ij} p(x, H_i) = \arg\min_{j} \sum_{i=1}^{N} r(\Delta\lambda \cdot i, \Delta\lambda \cdot j) p(x, \Delta\lambda \cdot i). \tag{3.5}
$$

где $r(\bullet,\bullet)$ - непрерывная функция риска 2-х переменных, такая что $r(\Delta\lambda \cdot i, \Delta\lambda \cdot j) = R_{ij}$, $p(x, H_i)$ - совместная плотность вероятности наблюдаемого сигнала и гипотезы H_i и соответствующая ей форма записи $p(x, \Delta\lambda \cdot i)$.

Т.к. $\lambda_i = \Delta\lambda \cdot i$, получим

$$
\begin{aligned}
\hat{\lambda}_k &= \arg\min_{\lambda_j} \sum_{i=1}^{N} r(\lambda_i, \lambda_j) p(\lambda_i|x) p(x) \frac{1}{\Delta\lambda} \Delta\lambda = \\
&= \arg\min_{\lambda_j} \sum_{i=1}^{N} r(\lambda_i, \lambda_j) p(\lambda_i|x) \Delta\lambda.
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

Рассмотрим теперь случай параметра, принимающего значения на множестве **R**, для этого перейдем к пределу в (3.6) при $N \to \infty$ и $\Delta\lambda \to 0$. Будем рассматривать случай, когда интегральная сумма $\sum_{i=1}^{N} r(\lambda_i, \lambda_j) p(\lambda_i|x) \Delta\lambda$ сходится к интегралу по λ. Тогда (3.6) примет вид

$$
\hat{\lambda} = \arg\min_{\lambda_0} \int_{D_\lambda} r(\lambda, \lambda_0) p(\lambda|x) d\lambda, \tag{3.7}
$$

где D_λ – область определения параметра параметра λ, $p(\lambda|x)$ - апостериорная функция плотности вероятности измеряемого параметра λ при условии, что принят сигнал x, $r(\lambda, \lambda_0)$ - функция риска (штрафа, стоимости). Эта функция показывает степень увеличения риска или штрафа между перебираемым в алгоритме (3.7) и истинным значением параметра. Алгоритм (3.7) называют иногда **алгоритмом минимума условного среднего риска**.

Выражение (3.7) описывает алгоритм вычисления оптимальной оценки параметра по наблюдаемому сигналу. Этот алгоритм эквивалентен алгоритму различения сигналов оптимальному по критерию минимуму апостериорного байесовского риска.

Апостериорная функция плотности вероятности измеряемого параметра характеризует вероятность конкретного значения случайного параметра λ для имеющейся реализации наблюдаемого сигнала x. Фактически апостериорная функция плотности характеризует информацию о параметре λ, содержащуюся в x.

Соотношения между апостериорной функцией плотности вероятности измеряемого параметра $p(\lambda|x)$ и априорной функцией плотности вероятности $p(\lambda)$ характеризуют эволюцию знаний об измеряемом параметре сигнала в процессе измерения (эксперимента).

При этом возможны два крайних случая: оправданный и неоправданный эксперимент. В последнем случае невозможно измерить параметр точнее чем это было известно до эксперимента, в случае оправданного эксперимента информация об измеряемом параметре в процессе измерения уточняется. Этот факт иллюстрирует следующий рисунок.

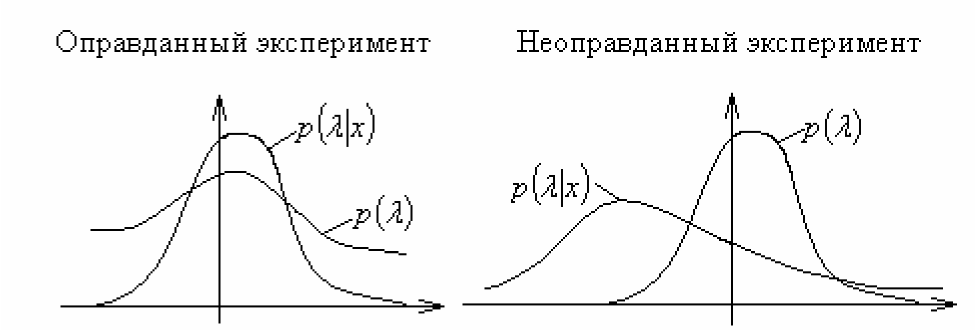

Рис.3.1. Соотношения между апостериорной и априорной функцией плотности вероятности измеряемого параметра.

Рассмотрим теперь алгоритмы оценки параметра сигнала, вытекающие из различных подходов к оценке качества измерения.

а) Квадратичная функция риска.

В этом случае $r(\lambda,\lambda_0)=(\lambda-\lambda_0)^2$.

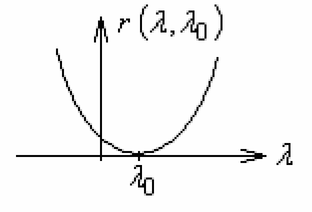

Рис.3.2. Вид квадратичной функции риска.

Алгоритм оценивания (3.7) примет вид

$$\hat{\lambda}=\arg\min_{\lambda_0} I(\lambda_0), \tag{3.8}$$

где

$$I(\lambda_0) = \int\limits_{D_\lambda} (\lambda - \lambda_0)^2 p(\lambda|x) d\lambda .$$

Решение задачи (3.8) возможно в явном виде

$$\frac{dI(\lambda_0)}{d\lambda_0} = -\int\limits_{D_\lambda} 2(\lambda - \lambda_0) p(\lambda|x) d\lambda = 0 ,$$

$$-2\int\limits_{D_\lambda} \lambda \cdot p(\lambda|x) d\lambda + 2\lambda_0 \int\limits_{D_\lambda} p(\lambda|x) d\lambda = 0 .$$

Учитывая, что $\int\limits_{D_\lambda} p(\lambda|x) d\lambda = 1$, λ_0, при котором достигается минимум в (3.8) может быть найдено в виде

$$\hat{\lambda} = \int\limits_{D_\lambda} \lambda p(\lambda|x) d\lambda = \mathbf{M}\{(\lambda|x)\}. \qquad (3.9)$$

Т.о. при использовании квадратичной функции потерь оптимальными свойствами обладает оценка равная апостериорному математическому ожиданию или математическому ожиданию случайного параметра λ после приема сигнала x.

б) Простая функция риска.

В этом случае $r(\lambda, \lambda_0) = 1 - \delta(\lambda - \lambda_0)$.

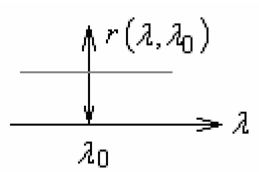

Рис.3.3. Вид простой функции риска.

Подставляя эту функцию в (3.7) получим

$$\hat{\lambda} = \arg\min_{\lambda_0} \left[1 - \int\limits_{D_\lambda} \delta(\lambda - \lambda_0) p(\lambda|x) d\lambda \right], \qquad (3.10)$$

$$\hat{\lambda} = \arg\max_{\lambda_0} p(\lambda_0|x). \qquad (3.11)$$

Полученный алгоритм совпадает с алгоритмом максимума апостериорной вероятности (МАВ), который был получен ранее при решении задачи различения по критерию идеального наблюдателя. Из этого можно сделать вывод, что простая функция потерь является аналогом критерия идеального наблюдателя при решении задачи оценивания.

Т.о. для решения задачи оценивания параметра необходимо определить апостериорное распределение $p(\lambda|x)$. Обычно из условий задачи мы имеем статистическую модель взаимодействия сигнала и помехи. Из этой модели легко получить функционал плотности вероятности наблюдаемого сигнала x при условии фиксированного значения измеряемого параметра $p(\lambda|x)$, тогда

$$p(\lambda|x) = \frac{p(x|\lambda)p(\lambda)}{p(x)}. \qquad (3.12)$$

Поскольку в (3.7) вычисляется аргумент минимума, то $p(x)$ не влияет на результат оценивания, тогда (3.12) можно записать в виде

$$p(\lambda|x) = \frac{1}{p(x)} p(x|\lambda)p(\lambda) = c \cdot p(x|\lambda)p(\lambda), \qquad (3.13)$$

где $p(x|\lambda)$ - функционал правдоподобия, а $p(\lambda)$- априорное распределение.

Таким образом, апостериорное распределение можно получить из функционала правдоподобия и априорного распределения. Т.е. байесовское оценивание приводит нас к необходимости знания априорного распределения для построения оптимальных оценок. Если априорное распределение неизвестно, то возникает так называемая **априорная неопределенность** байесовского оценивания.

В большинстве практических приложений мы сталкиваемся с неопределенностью относительно априорного распределения. Из этого положения можно выйти следующими способами: 1) допущение оправданного эксперимента; 2) минимаксный подход; 3) точечное оценивание.

В рамках оправданного эксперимента априорная плотность значительно шире апостериорного распределения. Это случай характерен для РТС имеющих обычно высокую точность измерения параметров. В этом случае в области максимума апостериорного распределения априорное распределение можно считать константой. Тогда алгоритм МАВ, например, эквивалентен алгоритму максимума правдоподобия (МП), действительно

$$\hat{\lambda} = \arg\max_{\lambda_0} p(\lambda_0|x) = \arg\max_{\lambda_0}\left[p(x|\lambda)\cdot const\right] = \max_{\lambda_0} p(x|\lambda_0). \qquad (3.14)$$

Алгоритм минимума условного среднего риска соответственно имеет вид

$$\hat{\lambda} = \int_{D_\lambda} p(x|\lambda)d\lambda. \qquad (3.15)$$

В рамках минимаксного подхода оптимальная оценка определяется в виде

$$\hat{\lambda} = \arg\min_{\lambda_0}\max_{p(\lambda)} \int_{D_\lambda} r(\lambda,\lambda_0)p(x|\lambda)p(\lambda)d\lambda. \qquad (3.16)$$

В рамках теории точечного оценивания изначально отказываются от случайности измеряемых параметров. Случайными являются наблюдаемые сигналы, получаемые оценки, но не истинные значения измеряемых величин. При таком подходе априорная проблема не возникает по определению.

Обобщим теперь полученные байесовские алгоритмы на случай наличия нескольких измеряемых и мешающих параметров. Алгоритм минимума условного риска (3.7) имеет вид

$$\hat{\boldsymbol{\lambda}} = \arg\min_{\boldsymbol{\lambda}_0} \int_{D_{\boldsymbol{\lambda}}}\int_{D_{\boldsymbol{\theta}}} r(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\lambda}_0)p(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\theta}|x)d\boldsymbol{\lambda}d\boldsymbol{\theta} \qquad (3.17)$$

где $D_{\boldsymbol{\lambda}}$ и $D_{\boldsymbol{\theta}}$ – области определения информационных и мешающих параметров соответственно.

Алгоритмы МАВ и МП соответственно

$$\hat{\boldsymbol{\lambda}} = \arg\max_{\boldsymbol{\lambda}_0} \int\limits_{D_{\boldsymbol{\theta}}} p(\boldsymbol{\lambda}_0, \boldsymbol{\theta} | x) d\boldsymbol{\theta}, \tag{3.18}$$

$$\hat{\boldsymbol{\lambda}} = \arg\max_{\boldsymbol{\lambda}_0} \int\limits_{D_{\boldsymbol{\theta}}} p(x, \boldsymbol{\theta} | \boldsymbol{\lambda}_0) d\boldsymbol{\theta}. \tag{3.19}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Задача оценивания параметров сигналов предполагает принятие оптимального решения о значении одного или нескольких параметров сигнала известной формы, имеющего также один или несколько неизвестных (“мешающих”) параметров на фоне помех. Байесовские оценки случайных параметров сигналов при различных функциях потерь предполагают вычисление параметров апостериорной плотности измеряемого параметра.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что в СТРТС понимают под задачей оценки параметров сигнала?
2. В чем суть байесовского подхода к оцениванию параметров?
3. Что характеризует отличие апостериорной функции плотности вероятности измеряемого параметра от его априорной плотности?
4. Какой алгоритм оценивания оптимален при квадратичной функции стоимости?
5. Какова функция стоимости в алгоритме максимума апостериорной вероятности?
6. Объясните суть «априорной проблемы» в байесовском оценивании параметров сигналов?