

ЛЕКЦИЯ №11. Теория несмещенных оценок. Граница Рао-Крамера. Информационная матрица Фишера. Свойства оценок максимального правдоподобия. Определение погрешности оценивания параметров на фоне БГШ. Функция неопределенности сигнала.

3.1.2. Элементы теории точечного оценивания

В рамках байесовской теории к оптимальным оценкам предъявляется требование минимума среднего риска. В теории точечного оценивания к оценкам предъявляются два требования: несмещенность и минимум условной дисперсии оценки.

Рассмотрим случай оценки одного вещественного параметра λ . При измерении какого либо параметра естественно требовать минимального значения систематической погрешности, это требование эквивалентно свойству **несмещенности оценки**, которое означает:

$$\mathbf{M}\{\xi(x)\} = \lambda, \quad (3.20)$$

где λ - истинное значение параметра, $\xi(x)$ - оценка, как функция наблюдаемого сигнала. То есть несмещенность, это когда математическое ожидание оценки совпадает с истинным значением параметра.

Очевидно, что только свойства несмещенности недостаточно для построения хороших оценок. При измерении какого-либо параметра естественно минимизировать флуктуационную составляющую погрешности, т.е. разброс оценок относительно истинного значения. Это требование называют **эффективностью оценки**

$$\mathbf{D}\{\xi|\lambda\} = \min_{\xi(x)} \int_x (\xi(x) - \mathbf{M}\{\xi(x)\})^2 p(x|\lambda) dx. \quad (3.21)$$

Другими словами условная дисперсия эффективной оценки должна быть минимально возможной среди всех оценок.

В принципе для построения оценок требований эффективности и несмещенности достаточно. Иногда требования к хорошей оценке можно ужесточить, потребовав стремления погрешности оценки к нулю при неограниченном увеличении времени измерений, количества экспериментов, отношения сигнал-помеха и т.п.

Для фиксированных объема выборки, уровня шума, количества реализаций, погрешность оценивания, очевидно, не может быть равна нулю. В этом случае важно оценить значение минимально достижимой погрешности. Ответ на этот вопрос дает **неравенство (граница) Рао – Крамера**.

Получим это неравенство, проводя следующие рассуждения. Следствием несмещенности оценки является соотношение

$$\mathbf{M}\{\xi - \lambda\} = \int_x (\xi(x) - \lambda) p(x|\lambda) dx = 0. \quad (3.22)$$

Продифференцируем это выражение по λ , получим

$$\int_x (-1) p(x|\lambda) dx + \int_x (\xi(x) - \lambda) \frac{d}{d\lambda} p(x|\lambda) dx = 0, \quad (3.23)$$

$$\int_{\mathbf{X}} (\mathcal{K}(x) - \lambda) \frac{d}{d\lambda} p(x|\lambda) dx = 1. \quad (3.24)$$

Заметим, что

$$\frac{d}{d\lambda} p(x|\lambda) = \frac{d}{d\lambda} \ln(p(x|\lambda)) \cdot p(x|\lambda), \quad (3.25)$$

тогда

$$\int_{\mathbf{X}} (\mathcal{K}(x) - \lambda) \left(\frac{d}{d\lambda} \ln p(x|\lambda) \right) p(x|\lambda) dx = 1. \quad (3.26)$$

Введем обозначения $\xi = (\mathcal{K}(x) - \lambda)$, $\eta = \frac{d}{d\lambda} \ln p(x|\lambda)$ - случайные величины,

тогда

$$\mathbf{M}\{\xi \cdot \eta\} = 1. \quad (3.27)$$

Воспользуемся неравенством для ковариации двух случайных величин

$$|\mathbf{M}\{\xi \cdot \eta\}|^2 \leq \mathbf{M}\{\xi^2\} \mathbf{M}\{\eta^2\}, \quad (3.28)$$

тогда

$$\mathbf{D}\{\mathcal{K}|\lambda\} = \mathbf{D}\{(\mathcal{K}(x) - \lambda)\} \geq \frac{1}{\mathbf{M}\left\{\left(\frac{d}{d\lambda} \ln(p(x|\lambda))\right)^2\right\}}. \quad (3.29)$$

Полученное неравенство называют границей Рао–Крамера. Граница Рао – Крамера дает минимальное значение возможной погрешности для любых несмещенных оценок измеряемого параметра. Для эффективной оценки в соответствии с определением неравенство Рао – Крамера превращается в равенство.

Неравенство Рао–Крамера можно записать несколько в иной форме. Для этого выражение $\int_{\mathbf{X}} p(x|\lambda) dx = 1$ продифференцируем по λ , с учетом (3.25)

получим

$$\int_{\mathbf{X}} \left(\frac{d}{d\lambda} p(x|\lambda) \right) dx = \int_{\mathbf{X}} \left(\frac{d}{d\lambda} \ln p(x|\lambda) \right) p(x|\lambda) dx = 0. \quad (3.30)$$

Продифференцируем последнее выражение по λ :

$$\int_{\mathbf{X}} \left(\frac{d^2}{d\lambda^2} \ln p(x|\lambda) \right) p(x|\lambda) dx + \int_{\mathbf{X}} \left(\frac{d}{d\lambda} \ln p(x|\lambda) \right) \frac{d}{d\lambda} p(x|\lambda) dx = 0, \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\left\{\frac{d^2}{d\lambda^2} \ln p(x|\lambda)\right\} &= - \int_{\mathbf{X}} \left(\frac{d}{d\lambda} \ln p(x|\lambda) \right) \left(\frac{d}{d\lambda} \ln(p(x|\lambda)) \right) p(x|\lambda) dx = \\ &= - \mathbf{M}\left\{\left(\frac{d}{d\lambda} \ln p(x|\lambda)\right)^2\right\}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Тогда

$$\mathbf{D}\{\xi|\lambda\} \geq \frac{1}{-\mathbf{M}\left\{\frac{d^2}{d\lambda^2} \ln(p(x|\lambda))\right\}}. \quad (3.33)$$

Величину в знаменателе правой части неравенства (3.33) и (3.29) называют **информацией Фишера**, и обозначают $\Phi(\lambda)$. Т.о. смысл границы Рао – Крамера заключается в том, что не существует несмещенной оценки, погрешность которой меньше величины, обратной информации Фишера.

Для случая векторного измеряемого параметра $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T$ требования несмещенности и эффективности имеют вид

$$\mathbf{M}\{\xi(x)\} = \lambda, \quad (3.34)$$

$$\mathbf{D}\{\xi_i(x)|\lambda\} = \min_{\xi(x)} \int_{\mathbf{x}} (\xi_i(x) - \mathbf{M}\{\xi_i(x)\})^2 p(x|\lambda) dx, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.35)$$

Для погрешностей оценок справедливы неравенства Рао-Крамера в виде

$$\mathbf{D}\{\xi_i(x)|\lambda\} \geq \Phi_{ii}^{-1}(\lambda), \quad (3.36)$$

где $\Phi_{ii}^{-1}(\lambda)$ - элементы матрицы, обратной **информационной матрице Фишера** $\Phi(\lambda)$, коэффициенты которой $\Phi_{ij}(\lambda)$ определяются в виде

$$\begin{aligned} \Phi_{ij}(\lambda) &= \mathbf{M}\left\{\frac{\partial}{\partial \lambda_i} \ln(p(x|\lambda)) \frac{\partial}{\partial \lambda_j} \ln(p(x|\lambda))\right\} = \\ &= -\mathbf{M}\left\{\frac{\partial^2}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} (\ln(p(x|\lambda)))\right\} \end{aligned} \quad (3.37)$$

Докажем справедливость неравенства (3.36). Для этого заметим, что из (3.34) следует следующее выражение

$$\int_{\mathbf{x}} \xi_i(x) p(x|\lambda) dx = \lambda_i. \quad (3.38)$$

Дифференцируя выражение (3.38) по λ_j и используя (3.25), получим

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{x}} \xi_i(x) \frac{\partial}{\partial \lambda_j} p(x|\lambda) dx &= \delta_{ij}, \\ \int_{\mathbf{x}} \xi_i(x) \frac{\partial}{\partial \lambda_j} \ln(p(x|\lambda)) p(x|\lambda) dx &= \delta_{ij}, \\ \mathbf{M}\left\{\xi_i(x) \frac{\partial}{\partial \lambda_j} \ln(p(x|\lambda))\right\} &= \delta_{ij}, \\ \delta_{ij} &= \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Определим случайный вектор

$$\mathbf{V} = \left(\begin{array}{cccc} \xi_i(x) & \frac{\partial}{\partial \lambda_1} \ln(p(x|\lambda)) & \dots & \frac{\partial}{\partial \lambda_n} \ln(p(x|\lambda)) \end{array} \right)^T. \quad (3.40)$$

Тогда ковариационная матрица вектора $\mathbf{V}$ имеет вид

$$\mathbf{R} = \mathbf{M}\{\mathbf{V}\mathbf{V}^T\} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}\{\xi_i(x)|\lambda\} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \Phi_{11}(\lambda) & \dots & \Phi_{1n}(\lambda) \\ 0 & \Phi_{21}(\lambda) & \dots & \Phi_{2n}(\lambda) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \Phi_{n1}(\lambda) & \dots & \Phi_{nn}(\lambda) \end{pmatrix}. \quad (3.41)$$

Матрица $\mathbf{R}$, как и любая ковариационная матрица, неотрицательно определена. Это означает, что

$$\det(\mathbf{R}) \geq 0. \quad (3.42)$$

Вычислим определитель матрицы $\mathbf{R}$, воспользовавшись свойством разложения определителя по элементам первой строки, получим

$$\det(\mathbf{R}) = \mathbf{D}\{\xi_i(x)|\lambda\} \det(\Phi(\lambda)) - \det(\Phi_{11}(\lambda)) \geq 0, \quad (3.43)$$

где $\Phi_{11}(\lambda)$ - алгебраическое дополнение элемента $\Phi_{11}(\lambda)$. Тогда из (3.43) непосредственно следует

$$\mathbf{D}\{\xi_i(x)|\lambda\} \geq \frac{\det(\Phi_{11}(\lambda))}{\det(\Phi(\lambda))} = \Phi_{11}^{-1}(\lambda). \quad (3.44)$$

Очевидно, что подобные рассуждения можно повторить для любого i . Т.о. неравенство (3.36) доказано.

К сожалению, теория точечного оценивания не дает простых способов синтеза оптимальных алгоритмов оценивания. В этом случае пользуются квазиоптимальными схемами оценивания, контролируя их погрешность в разумных пределах, обусловленных спецификой задачи. При этом требования несмещенности и эффективности рассматриваются как некое предельное состояние.

Данным свойствам удовлетворяют оценки максимального правдоподобия (3.14). В теории точечного оценивания доказано, что если функция правдоподобия дифференцируема по измеряемым параметрам, то оценки максимального правдоподобия асимптотические несмещенные, эффективные и байесовские. Эти свойства обуславливают широкие применения МП оценок в СТРС.

При наличии у сигнала мешающих параметров оценки максимального правдоподобия можно получить различными способами.

Если мешающие параметры сигнала являются случайными величинами то в соответствии с (3.19) оценка МП имеет вид

$$\hat{\xi} = \arg \max_{\lambda_0} \int_{D_\theta} p(x|\theta, \lambda_0) p(\theta) d\theta. \quad (3.45)$$

Исходя из условий задачи (конкретного вида модели взаимодействия сигнала и шума) часто легко записать функционал правдоподобия $p(x|\lambda, \theta)$. Это

означает, что можно одновременно получить МП оценки информационных и мешающих параметров, а затем данные о значении мешающих параметров не использовать, тогда алгоритм оценки можно записать в виде

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \max_{\lambda, \theta} p(\mathbf{x}|\lambda, \theta). \quad (3.46)$$

Если возможно, каким либо способом получить МП оценки мешающих параметров, то используют так называемую схему адаптивного байесовского оценивания в виде

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \max_{\lambda} p(\mathbf{x}|\lambda, \hat{\theta}). \quad (3.47)$$

3.2. ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛА, НАБЛЮДАЕМОГО НА ФОНЕ АДДИТИВНОГО БЕЛОГО ГАУССОВСКОГО ШУМА

Рассмотрим случай, когда наблюдаемый сигнал имеет вид

$$x(t) = s(t, \lambda) + n(t), \quad (3.53)$$

где λ - неизвестный параметр, $n(t)$ - белый гауссовский шум.

Оценка МП имеет вид

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \max_{\lambda_0} p(\mathbf{x}|\lambda_0), \quad \mathbf{x} \in \mathbf{X} = \mathbf{L}_2 \quad (3.54)$$

Используя (2.24) получим функционал правдоподобия в виде

$$p(\mathbf{x}|\lambda) = c \cdot \exp \left(-\frac{1}{N_0} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} (x(t) - s(t, \lambda))^2 dt \right] \right), \quad (3.55)$$

$$p(\mathbf{x}|\lambda) = c \cdot \exp \left(-\frac{1}{N_0} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)^2 dt - 2 \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)s(t, \lambda) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t, \lambda) dt \right] \right). \quad (3.56)$$

Используя обозначения

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)^2 dt, \quad Z(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)s(t, \lambda) dt, \quad (3.57)$$

$$E(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t, \lambda) dt,$$

алгоритм максимального правдоподобия можно записать в виде

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}} &= \arg \max_{\lambda_0} \left[-\frac{E_x}{N_0} + \frac{2}{N_0} Z(\lambda_0) - \frac{E(\lambda_0)}{N_0} \right] = \\ &= \arg \max_{\lambda_0} \left[\frac{2}{N_0} Z(\lambda_0) - \frac{E(\lambda_0)}{N_0} \right]. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Параметр λ называется **энергетическим**, если энергия сигнала является функцией информационного параметра λ , в остальных случаях параметр λ называют неэнергетическим.

Энергетическими параметрами являются амплитуда сигнала, длительность

сигнала, полоса частот. Неэнергетические – это средняя частота сигнала, начальная фаза сигнала, временная задержка.

Для неэнергетического параметра алгоритм оценки максимального правдоподобия сводится в соответствии с (3.58) к максимизации значения корреляционного интеграла, т.е.

$$\hat{\lambda} = \arg \max_{\lambda_0} Z(\lambda_0). \quad (3.59)$$

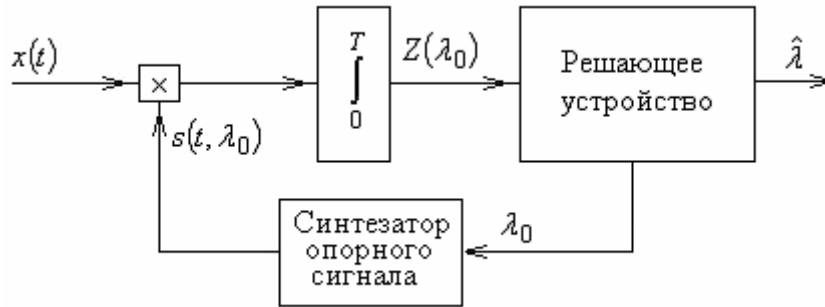


Рис.3.4. Структурная схема устройства оценки неэнергетического параметра сигнала на фоне белого шума.

На Рис.3.4 показана структурная схема устройства оценки неэнергетического параметра сигнала на фоне белого шума.

Решающее устройство на схеме вычисляет опорное значение параметра для работы коррелятора и принимает решение о значении опорного параметра, при котором достигается максимум корреляционного интеграла.

Рассмотрим случай наличия мешающего параметра. Пусть мешающий параметр φ – начальная фаза сигнала, тогда

$$x(t) = s(t, \lambda, \varphi) + n(t), \quad (3.60)$$

где $s(t, \lambda, \varphi) = \text{Re}[\dot{S}(t, \lambda) \cdot e^{j\omega_0 t + \varphi}]$, $\dot{S}(t, \lambda)$ – комплексная огибающая сигнала $s(t, \lambda, \varphi)$, φ – случайная фаза, равномерно распределенная на интервале $(-\pi; \pi)$.

Тогда функционал правдоподобия

$$p(x|\lambda, \varphi) = c \cdot \exp\left\{-\frac{1}{N_0} [E_x - 2Z(\lambda, \varphi) + E(\lambda)]\right\} = c \cdot e^{-\frac{E_x}{N_0}} e^{\frac{2}{N_0} \left(Z(\lambda, \varphi) - \frac{E(\lambda)}{2}\right)}. \quad (3.61)$$

Интегрируя по мешающему параметру, получим

$$\begin{aligned} p(x|\lambda) &= c \cdot e^{-\frac{E_x}{N_0}} \cdot e^{-\frac{E(\lambda)}{N_0}} \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1}{2\pi} e^{\frac{2}{N_0} Z(\lambda, \varphi)} d\varphi = \\ &= c \cdot e^{-\frac{E_x - E(\lambda)}{N_0}} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{\frac{2}{N_0} |\dot{Z}(\lambda) \cos(\arg \dot{Z}(\lambda) - \varphi)|} d\varphi. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Алгоритм оценивания в случае случайной начальной фазы имеет вид

$$\hat{\lambda} = \arg \max_{\lambda_0} p(x|\lambda_0) = \arg \max_{\lambda_0} I_0\left(\frac{2|\dot{Z}(\lambda)|}{N_0}\right) \cdot \exp\left\{-\frac{E(\lambda)}{N_0}\right\}, \quad (3.63)$$

где $\dot{Z}(\lambda) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(t) \dot{S}(t, \lambda) dt$, $\dot{X}(t)$ - комплексная огибающая наблюдаемого сигнала. Для случая неэнергетического информационного параметра алгоритм приема сводится к виду

$$\hat{\lambda} = \arg \max_{\lambda_0} |\dot{Z}(\lambda_0)|. \quad (3.64)$$

Для вычисления комплексного корреляционного интеграла требуется квадратурный приемник.

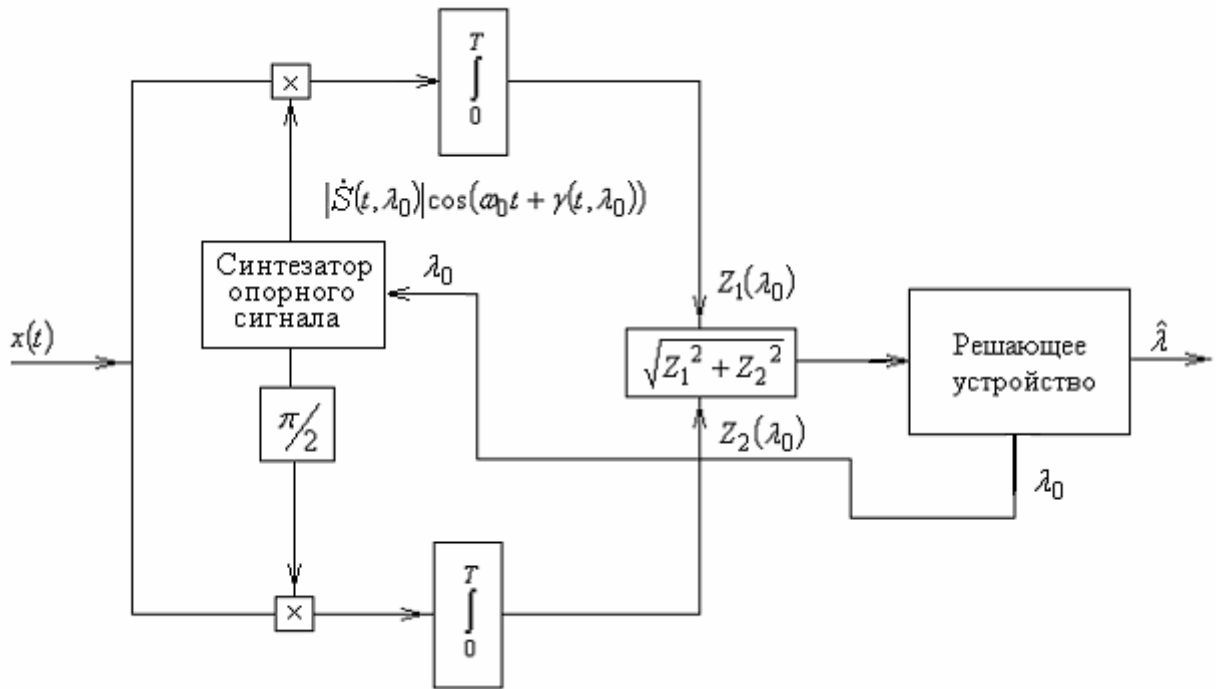


Рис.3.5. Структурная схема устройства оценки неэнергетического параметра сигнала со случайной фазой на фоне белого шума.

Рассмотрим теперь способы вычисления погрешности алгоритмов оценки параметров сигналов, наблюдаемых на фоне белого гауссовского шума. В СТРС обычно качество оценивания определяют, используя границу Рао – Крамера. Получаемые таким образом значения погрешности для оценок максимального правдоподобия являются потенциальными (асимптотическими), т.е. реальная погрешность алгоритма оценивания может быть только хуже. Для эффективных оценок погрешности, вычисленные по границе Рао – Крамера совпадают с реальной погрешностью.

Рассмотрим случай оценки векторного параметра $\lambda = (\lambda_1 \dots \lambda_n)^T$ сигнала $s(t, \lambda)$, наблюдаемого на фоне аддитивного белого гауссовского шума. В этом случае наблюдаемый сигнал имеет вид

$$x(t) = s(t, \lambda) + n(t). \quad (3.65)$$

Функционал правдоподобия можно записать в виде

$$p(x|\lambda) = c \cdot \exp \left\{ -\frac{E_x}{N_0} + \frac{2Z(\lambda)}{N_0} - \frac{E(\lambda)}{N_0} \right\}. \quad (3.66)$$

Алгоритм вычисления МП оценки имеет вид

$$\hat{\lambda} = \arg \max_{\lambda} p(x|\lambda) = \arg \max_{\lambda} \ln(p(x|\lambda)). \quad (3.67)$$

Вычислим значения информационной матрицы Фишера, подставляя (3.66) в (3.37) обозначая λ_0 - истинное значение вектора параметров

$$\Phi_{ij}(\lambda_0) = -\mathbf{M} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} \ln(p(x|\lambda)) \right\} = -\mathbf{M} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} \left[\frac{2Z(\lambda)}{N_0} - \frac{E(\lambda)}{N_0} \right] \right\}. \quad (3.68)$$

В случае неэнергетических параметров, у которых $E(\lambda) = E$, получим

$$\begin{aligned} \Phi_{ij}(\lambda_0) &= -\mathbf{M} \left\{ \frac{2}{N_0} \frac{\partial^2}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} Z(\lambda) \right\} = -\frac{2}{N_0} \frac{\partial^2}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} \mathbf{M}\{Z(\lambda)\} = \\ &= -\frac{2}{N_0} \frac{\partial^2}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{M}\{x(t)\} s(t, \lambda) dt = -\frac{2}{N_0} \frac{\partial^2}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} s(t, \lambda_0) s(t, \lambda) dt \right) \Big|_{\lambda=\lambda_0} = \\ &= -\frac{2E}{N_0} \frac{\partial^2}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t, \lambda_0) s(t, \lambda) dt \Big|_{\lambda=\lambda_0} = -q^2 \frac{\partial^2}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} \Psi(\lambda, \lambda_0) \Big|_{\lambda=\lambda_0} \end{aligned} \quad (3.69)$$

где $q = \sqrt{\frac{2E}{N_0}}$, $\Psi(\lambda, \lambda_0)$ - функция неопределенности сигнала $s(t, \lambda)$.

$$\Psi(\lambda, \lambda_0) = \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t, \lambda_0) s(t, \lambda) dt, \quad (3.70)$$

Часто бывает, что функция неопределенности $\Psi(\lambda, \lambda_0)$ зависит только от разности $(\lambda - \lambda_0)$, в этом случае $\Phi(\lambda_0) = -q^2 \Psi''(0)$.

В случае оценивания одного параметра погрешность оценки λ определяется в виде

$$\mathbf{D}\{\hat{\lambda}\} = \frac{1}{\Phi(\lambda_0)} = -\frac{1}{q^2 \Psi''(0)}. \quad (3.71)$$

Функция неопределенности определяется только свойствами сигнала и не зависит от шума и его характеристик. Поэтому функция неопределенности используется для классификации, изучения свойств сигналов, используемых для построения РТС.

В соответствии с (3.71) нижняя граница потенциальной погрешности алгоритма оценивания определяется двумя факторами отношением сигнал/шум и степенью остроты пика функции неопределенности в нуле.

Если анализировать реальную погрешность устройств, схемы которых показаны на Рис.3.5, Рис.3.4 и алгоритмов оценки (3.59) и (3.64) соответственно следует учитывать, что помимо ошибок, связанных с влиянием шума на оценку в области истинного значения параметра, на практике возможны ошибки, вызванные появлением на входе решающего устройства нескольких локальных максимумов корреляционного интеграла, вызванных выбросами шума. При этом решающее устройство будет совершать так называемые **аномальные ошибки**. Т.е. решающее устройство будет принимать решения в пользу совершенно

далекого от истинного значения измеряемой величины.

Эта ситуация возможна только при относительно низком отношении сигнал-помеха. В этом случае формулы, основанные на границе Рао-Крамера, будут существенно занижать истинное значение погрешности.

Т.о. формула (3.71), как и другие формулы, основанные на границе Рао-Крамера, характеризуют погрешность МП оценок параметров сигналов на фоне аддитивных шумов только при достаточно высоких отношениях сигнал-шум или при наличии в решающем устройстве достаточно подробной информации об измеряемой величине, т.е. когда вариация измеряемого параметра в устройстве обработки не выходит за ширину главного лепестка функции неопределенности сигнала. Как правило, для реальных РТС эти условия выполняются.

3.2.1. Оценка амплитуды детерминированного сигнала

Рассмотрим пример оценки амплитуды детерминированного сигнала $s(t)$. В этом случае наблюдаемый сигнал

$$x(t) = a \cdot s(t) + n(t), \quad (3.72)$$

Энергия сигнала $E(a) = a^2 E_s$, корреляционный интеграл $Z(a) = aZ$, тогда оценка МП имеет вид

$$\hat{a} = \arg \max_a \left[\exp \left\{ \frac{2aZ - a^2 E_s}{N_0} \right\} \right]. \quad (3.73)$$

Решая уравнение для максимума функции правдоподобия $\frac{\partial}{\partial a} \ln(p(x|a)) = 0$, получим

$$\frac{2Z}{N_0} - 2a \frac{E_s}{N_0} = 0,$$

отсюда

$$\hat{a} = \frac{Z}{E_s} = \frac{1}{E_s} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)s(t)dt. \quad (3.74)$$

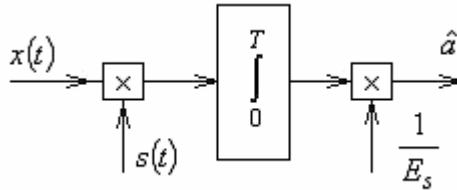


Рис.3.6. Структурная схема устройства оценки амплитуды сигнала на фоне белого шума.

Дисперсию оценки легко вычислить в виде

$$D\{\hat{a}|a\} = \frac{1}{E_s} \mathbf{M}\{(Z - M\{Z\})^2\} = \frac{1}{E_s^2} \frac{N_0 E_s}{2} = \frac{N_0}{2E_s} = \frac{1}{q^2}. \quad (3.75)$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Теория несмещенных оценок предполагает использование критериев несмещенности и эффективности для вычисляемых значений измеряемых параметров. Граница Рао-Крамера позволяет оценить потенциальную погрешность несмещенных оценок.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какие критерии для отбора оптимальных оценок используются в теории точечного оценивания?
2. Что такое граница Рао-Крамера?
3. Как с помощью информационной матрицы Фишера определить границу для погрешности одновременной оценки нескольких параметров сигнала?
4. Какими асимптотическими свойствами обладают оценки максимального правдоподобия?
5. Какие параметры сигнала называют энергетическими, а какие неэнергетическими?
6. Какие параметры сигнала называют мешающими?
7. Каков алгоритм оценки МП неэнергетического параметра сигнала, наблюдаемого на фоне БГШ.
8. Какова структурная схема алгоритма оценки МП неэнергетического параметра сигнала, наблюдаемого на фоне БГШ и имеющего неопределенную начальную фазу.
9. Как в СТРС рассчитывают погрешность оценивания параметров?
10. Чем определяется потенциальная погрешность оценки параметров сигнала, наблюдаемого на фоне аддитивного БГШ?
11. Что такое функция неопределенности сигнала по параметру?
12. Чем определяется потенциальная погрешность оценки параметров сигнала со случайной фазой, наблюдаемого на фоне аддитивного БГШ?
13. Каков оптимальный алгоритм совместной оценки амплитуды и фазы сигнала на фоне БГШ.
14. Что такое аномальные ошибки в теории оценивания?