ЛЕКЦИЯ №12. Оценка комплексной амплитуды сигнала. Оценка времени запаздывания сигнала. Оценка частоты сигнала со случайной фазой. Совместная оценка времени запаздывания и частоты сигнала со случайной фазой. Расчет погрешности оценок.

3.2.2. Оценки амплитуды и фазы детерминированного сигнала

Рассмотрим пример совместной оценки амплитуды и фазы детерминированного сигнала $s(t)$. В этом случае наблюдаемый сигнал имеет вид

$$x(t) = s(t, a, \varphi) + n(t), \tag{3.76}$$

где $s(t,a,\varphi) = \mathrm{Re}\left[a\dot{S}(t)\cdot e^{j\omega_0 t+\varphi}\right]$, $\dot{S}(t)$ - комплексная огибающая сигнала, φ - начальная фаза, a - амплитуда сигнала.

Функционал правдоподобия имеет вид

$$p(x|a,\varphi) = c\cdot\exp\left\{-\frac{1}{N_0}\left[E_x - 2aZ(\varphi) + a^2E_s\right]\right\}. \tag{3.77}$$

Используя ранее полученное соотношение $Z(\varphi) = |\dot{Z}|\cos(\varphi - \arg(\dot{Z}))$, получим алгоритм оценивания в виде

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}\hat{a}\\ \hat{\varphi}\end{pmatrix} &= \arg\max_{a,\varphi}\left(c\cdot\exp\left\{-\frac{1}{N_0}\left[E_x - 2aZ(\varphi) + a^2E_s\right]\right\}\right) = \\
&= \arg\max_{a,\varphi}\left(\exp\left\{-\frac{1}{N_0}\left[E_x - 2a|\dot{Z}|\cos(\varphi - \arg(\dot{Z})) + a^2E_s\right]\right\}\right) = \\
&= \arg\max_{a,\varphi}\left(\left[2a\cos(\varphi - \arg(\dot{Z})) - a^2E_s\right]\right) = \\
&= \begin{pmatrix}|\dot{Z}|\dfrac{1}{E_s}\\ \arg(\dot{Z})\end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.78}$$

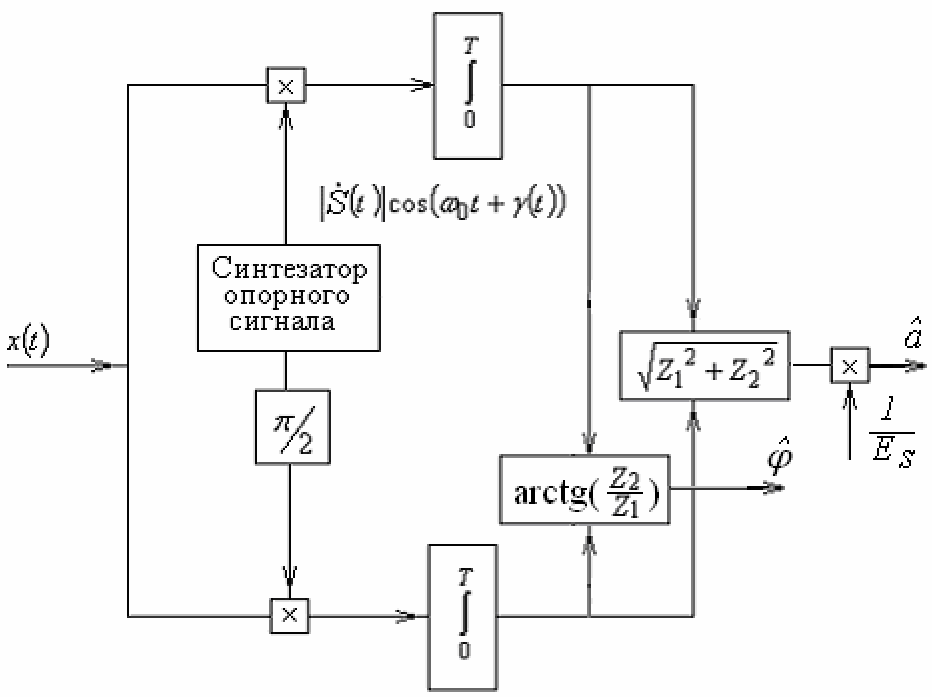

Рис.3.7. Структурная схема устройства совместной оценки амплитуды и фазы сигнала на фоне белого шума.

Определим погрешность совместного оценивания амплитуды и фазы сигнала. В соответствии с (3.78) запишем

$$\ln p(x|a,\varphi) = \ln(c) - \frac{E_x}{N_0} + \frac{2a|\dot Z|}{N_0}\cos(\varphi - \arg(\dot Z)) - \frac{a^2 E_s}{N_0}. \tag{3.79}$$

Вычислим коэффициенты информационной матрицы Фишера

$$\Phi_{11} = -\mathbf{M}\left\{\frac{\partial^2}{\partial a \partial a}\ln(p(x|a,\varphi))\right\} = \frac{2E_s}{N_0} = q^2,$$

$$\Phi_{12} = -\mathbf{M}\left\{\frac{\partial^2}{\partial a \partial \varphi}\ln(p(x|a,\varphi))\right\} = \frac{-2}{N_0}\mathbf{M}\left\{\frac{\partial}{\partial \varphi}|\dot Z|\cos(\varphi - \arg(\dot Z))\right\} =$$

$$= \frac{-2}{N_0}\mathbf{M}\left\{|\dot Z|\sin(\varphi - \arg(\dot Z))\right\} = \frac{-2}{N_0}\mathbf{M}\left\{\mathrm{Im}\left(\dot Z e^{j\varphi}\right)\right\} =$$

$$= \frac{-2}{N_0}\mathbf{M}\left\{\mathrm{Im}\left(\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} X^*(t)\dot S(t)dt \cdot e^{j\varphi}\right)\right\} = \frac{-2}{N_0}\mathrm{Im}\left(\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{M}\{X^*(t)\}\dot S(t)dt \cdot e^{j\varphi}\right) =$$

$$= \frac{-2a_0}{N_0}\mathrm{Im}\left(\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}|\dot S(t)|^2 dt \cdot e^{j\varphi - \varphi_0}\right)\Bigg|_{\varphi=\varphi_0} = \frac{-2a_0}{N_0}\mathrm{Im}(E_s) = 0,$$

$$\Phi_{21} = \Phi_{12} = 0,$$

$$\Phi_{22} = -\mathbf{M}\left\{\frac{\partial^2}{\partial\varphi\partial\varphi}\ln\left(p\left(x\middle|a,\varphi\right)\right)\right\} = \frac{-2a}{N_0}\mathbf{M}\left\{\frac{\partial}{\partial\varphi}\left|\dot{Z}\right|\sin\left(\varphi - \arg\left(\dot{Z}\right)\right)\right\} =$$

$$= \frac{2a}{N_0}\mathbf{M}\left\{\operatorname{Re}\left(\dot{Z}e^{j\varphi}\right)\right\} = \frac{2aa_0}{N_0}\operatorname{Re}\left(\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\dot{S}(t)\right|^2 dt \cdot e^{j\varphi-\varphi_0}\right)\Bigg|_{\substack{\varphi=\varphi_0 \\ a=a_0}} = \frac{2a_0^2 E_s}{N_0} = a_0^2 q^2,$$

где a_0, φ_0 - истинные значения амплитуды и фазы.

Таким образом, информационная матрица Фишера и ей обратная матрица имеют вид

$$\mathbf{\Phi}\left(a_0, \varphi_0\right) = \begin{pmatrix} q^2 & 0 \\ 0 & a_0^2 q^2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{\Phi}^{-1}\left(a_0, \varphi_0\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{q^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{a_0^2 q^2} \end{pmatrix}. \tag{3.80}$$

Погрешность оценки амплитуды и фазы можно вычислить по формулам

$$\mathbf{D}\left\{\hat{a}\middle|a_0, \varphi_0\right\} = \frac{1}{q^2},$$

$$\mathbf{D}\left\{\hat{\varphi}\middle|a_0, \varphi_0\right\} = \frac{1}{a_0^2 q^2}. \tag{3.81}$$

3.2.3. Оценка времени запаздывания детерминированного сигнала

Рассмотрим случай оценки времени запаздывания детерминированного сигнала $s(t)$. В этом случае наблюдаемый сигнал имеет вид

$$x(t) = s(t - \tau) + n(t), \tag{3.82}$$

где τ - неизвестное время запаздывание сигнала. Очевидно, что время запаздывания является неэнергетическим параметром. В этом случае мы можем воспользоваться алгоритмом (3.59), т.е.

$$\hat{\tau} = \arg\max_{\tau} Z(\tau) = \arg\max_{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} s(t-\tau)x(t)dt. \tag{3.83}$$

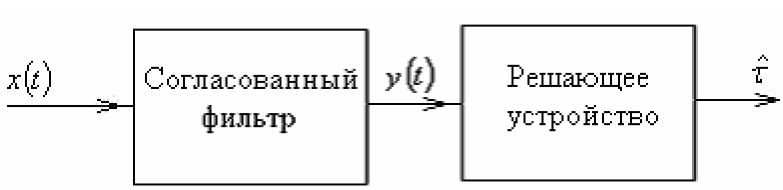

Рис.3.8. Структурная схема устройства оценки временной задержки сигнала на фоне белого шума.

Определим погрешность оценки задержки, используя формулу (3.71)

$$\mathbf{D}\{\hat{\tau}\} = -\frac{1}{q^2\Psi''(0)}.$$

Вычислим вторую производную функции неопределенности (3.70), воспользовавшись спектральными представлениями сигналов

$$s(t) \xrightarrow{\Phi} s(j\omega),$$

$$s(t-\tau) \xrightarrow{\Phi} s(j\omega)e^{-j\omega\tau},$$

$$\Psi(\tau) = \frac{1}{E}\int_{-\infty}^{+\infty} s(t-\tau)s(t)dt.$$

Воспользуемся равенством Рэлея для преобразования Фурье, тогда

$$\Psi(\tau) = \frac{1}{2\pi E}\int_{-\infty}^{+\infty} s^*(j\omega)e^{j\omega\tau}s(j\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi E}\int_{-\infty}^{+\infty} |s(j\omega)|^2 e^{j\omega\tau}d\omega. \qquad (3.84)$$

Свойство дифференцирования оригинала дает возможность определить производные функции неопределенности в виде

$$\Psi'(\tau) = \frac{1}{2\pi E}\int_{-\infty}^{+\infty} j\omega|s(j\omega)|^2 e^{j\omega\tau}d\omega,$$

$$\Psi''(\tau) = \frac{-1}{2\pi E}\int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2|s(j\omega)|^2 e^{j\omega\tau}d\omega.$$

Тогда

$$\Psi''(0) = \frac{-1}{2\pi E}\int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2|s(j\omega)|^2 d\omega = -\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\omega^2|s(j\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty}|s(j\omega)|^2 d\omega} = -(\Delta\omega_{эф})^2, \qquad (3.85)$$

где $\Delta\omega_{эф}$ - **эффективная полоса частот** сигнала. Если сигнал $s(t)$ - узкополосный, как, например, радиосигнал, то $\Delta\omega_{эф} \approx \omega_0$ - несущая частота радиосигнала. Если $s(t)$ - низкочастотный сигнал, например видеосигнал, то $\Delta\omega_{эф} \approx \Delta\omega$ - полоса частот видеосигнала.

Погрешность оценки времени запаздывания детерминированного сигнала имеет вид

$$\mathbf{D}\{\hat{\tau}\} = \frac{1}{q^2(\Delta\omega_{эф})^2}. \qquad (3.86)$$

3.2.4. Оценка времени запаздывания сигнала со случайной начальной фазой

Рассмотрим задачу оценки времени запаздывания сигнала со случайной начальной фазой. В этом случае наблюдаемый сигнал имеет вид

$$x(t) = s(t-\tau,\varphi) + n(t), \qquad (3.87)$$

где $s(t,\varphi) = \mathrm{Re}\left[\dot{S}(t)\cdot e^{j\omega_0 t+\varphi}\right]$, $\dot{S}(t)$ - комплексная огибающая сигнала $s(t,\varphi)$, φ - случайная фаза, равномерно распределенная на интервале $(-\pi;\pi)$.

В соответствии с (3.64) алгоритм оценивания задержки сигнала можно записать в виде

$$\tau = \arg\max_{\tau_0} \left| \dot{Z}(\tau_0) \right| = \arg\max_{\tau_0} \left| \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(t) \dot{S}(t - \tau_0) dt \right|. \qquad (3.88)$$

Структура измерителя соответствует схеме показанной на Рис.3.5. Определим погрешность измерителя.

$$\Phi(\tau_0) = -\mathbf{M}\left\{ \frac{d^2}{d\tau^2} \ln\left(p(x|\tau)\right)\Big|_{\tau=\tau_0} \right\} = -\mathbf{M}\left\{ \frac{d^2}{d\tau^2} \ln\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p(x|\tau,\varphi) d\varphi \right)\Big|_{\tau=\tau_0} \right\} =$$
$$= -\mathbf{M}\left\{ \frac{d^2}{d\tau^2} \left(I_0\left(\frac{2\left|\dot{Z}(\tau)\right|}{N_0} \right) - \frac{E}{N_0} \right)\Big|_{\tau=\tau_0} \right\} = -\mathbf{M}\left\{ \frac{d^2}{d\tau^2} \left(I_0\left(\frac{2\left|\dot{Z}(\tau)\right|}{N_0} \right) \right)\Big|_{\tau=\tau_0} \right\}. \qquad (3.89)$$

Для случая достаточно высокого отношения сигнал-шум и $\tau \to \tau_0$ $\frac{2\left|\dot{Z}(\tau)\right|}{N_0} >> 1$. Тогда $I_0(x) \approx x$ и (3.89) можно записать в виде

$$\Phi(\tau_0) = -\mathbf{M}\left\{ \frac{d^2}{d\tau^2} \left(\frac{2\left|\dot{Z}(\tau)\right|}{N_0} \right)_{\tau=\tau_0} \right\} = -\frac{2}{N_0} \frac{d^2}{d\tau^2} \left(\mathbf{M}\left\{ \left|\dot{Z}(\tau)\right| \right\} \right)\Big|_{\tau=\tau_0} =$$
$$= -\frac{2E}{N_0} \frac{d^2}{d\tau^2} \left(\mathbf{M}\left\{ \left| \frac{1}{2E} \int_{-\infty}^{+\infty} S^*(t-\tau_0) \dot{S}(t-\tau) dt + \frac{1}{2E} \int_{-\infty}^{+\infty} N^*(t) \dot{S}(t-\tau) dt \right| \right\} \right)\Big|_{\tau=\tau_0} = \qquad (3.90)$$
$$= -\frac{2E}{N_0} \frac{d^2}{d\tau^2} \left(\mathbf{M}\left\{ \left| \dot{\Psi}(\tau-\tau_0) + \dot{\Pi}(\tau) \right| \right\} \right)\Big|_{\tau=\tau_0},$$

где $\dot{N}(t)$ - комплексная огибающая белого шума, $\dot{\Psi}(\tau-\tau_0)$ - комплексная функция неопределенности сигнала, характеризующая автокорреляцию комплексных огибающих сигнала.

Анализируя последнее выражение, заметим, что математическое ожидание вычисляется от суммы детерминированной компоненты $\dot{\Psi}(\tau-\tau_0)$, которая при $\tau \to \tau_0$ стремится к 1 и случайной компоненты $\dot{\Pi}(\tau)$, дисперсия которой $\frac{N_0}{2E} << 1$.

Таким образом, при требовании высокого отношения сигнал-шум вклад шумового компонента в последнем выражении значительно меньше максимума функции неопределенности. Поэтому влияние случайной компоненты шума далее можно не учитывать. Тогда получим выражение для погрешности оценки в виде

$$\mathbf{D}\{\tau\} = \frac{-1}{q^2 \frac{d^2}{d\tau^2} \left(\left| \dot{\Psi}(\tau-\tau_0) \right| \right)\Big|_{\tau=\tau_0}}, \qquad (3.91)$$

где

$$\dot{\Psi}(\tau-\tau_0)=\frac{1}{2E}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} S^*(t-\tau_0)\dot{S}(t-\tau)dt. \qquad (3.92)$$

Продифференцируем модуль комплексной функции неопределенности сигнала в точке $\tau=0$.

$$\frac{d}{d\tau}\left|\dot{\Psi}(\tau)\right|=\frac{\mathrm{Re}\left[\dot{\Psi}'(\tau)\Psi^*(\tau)\right]}{\left|\dot{\Psi}(\tau)\right|},$$

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\left|\dot{\Psi}(\tau)\right|=\frac{\mathrm{Re}\left[\dot{\Psi}''(\tau)\Psi^*(\tau)+\dot{\Psi}'(\tau)\Psi'^*(\tau)\right]}{\left|\dot{\Psi}(\tau)\right|}+\frac{\left(\mathrm{Re}\left[\dot{\Psi}'(\tau)\Psi^*(\tau)\right]\right)^2}{\left|\dot{\Psi}(\tau)\right|^3},$$

$$\left.\frac{d^2}{d\tau^2}\left|\dot{\Psi}(\tau)\right|\right|_{\tau=0}=\mathrm{Re}\left[\dot{\Psi}''(0)\right]+\left|\dot{\Psi}'(0)\right|^2. \qquad (3.93)$$

Используя свойства преобразования Фурье, получим

$$\left.\frac{d^2}{d\tau^2}\left|\dot{\Psi}(\tau)\right|\right|_{\tau=0}=\mathrm{Re}\left[\frac{-1}{4\pi E}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\omega^2\left|\dot{S}(j\omega)\right|^2 d\omega\right]+\left|\frac{-1}{4\pi E}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}j\omega\left|\dot{S}(j\omega)\right|^2 d\omega\right|^2=$$

$$=-\left(\frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\omega^2\left|\dot{S}(j\omega)\right|^2 d\omega}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|\dot{S}(j\omega)\right|^2 d\omega}-\left(\frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\omega\left|\dot{S}(j\omega)\right|^2 d\omega}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|\dot{S}(j\omega)\right|^2 d\omega}\right)^2\right)=-\left(\Delta\Omega_{эф}\right)^2$$

В этом выражении $\Delta\Omega_{эф}$ - эффективная полоса частот комплексной огибающей сигнала, тогда

$$\mathbf{D}\{\hat{\tau}\}=\frac{1}{q^2\left(\Delta\Omega_{эф}\right)^2}. \qquad (3.94)$$

3.2.5. Оценка частотного сдвига сигнала со случайной начальной фазой

Рассмотрим задачу частотного сдвига сигнала со случайной начальной фазой. В этом случае наблюдаемый сигнал имеет вид

$$x(t)=s(t,f,\varphi)+n(t), \qquad (3.95)$$

где $s(t,f,\varphi)=\mathrm{Re}\left[\dot{S}(t)e^{j(\omega_0+2\pi f)t+\varphi}\right]$, $\dot{S}(t)$ - комплексная огибающая сигнала $s(t)$, φ - случайная фаза, равномерно распределенная на интервале $(-\pi;\pi)$.

Частотный сдвиг является неэнергетическим параметром, тогда в соответствии с (3.64) алгоритм оценивания задержки сигнала можно записать в виде

$$\tau=\arg\max_{f_0}\left|\dot{Z}(f_0)\right|=\arg\max_{f_0}\left|\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}X^*(t)\dot{S}(t)e^{j2\pi f_0 t}dt\right|. \qquad (3.96)$$

Структура измерителя соответствует схеме показанной на Рис.3.5.

Определим погрешность измерителя, следуя той же последовательности действий, что и при анализе погрешности измерителя задержки

$$\Phi(f_0) = -\mathbf{M}\left\{ \frac{d^2}{df^2}\left(I_0\left(\frac{2\left|\dot{Z}(f)\right|}{N_0} \right) \right)\Bigg|_{f=f_0} \right\}. \tag{3.97}$$

Для случая достаточно высокого отношения сигнал-шум ($q >> 1$) и $f \to f_0$, (3.97) можно записать в виде

$$\Phi(f_0) = -\frac{2E}{N_0}\frac{d^2}{df^2}\left|\dot{\Psi}(f - f_0)\right|\Big|_{f=f_0}, \tag{3.98}$$

Тогда выражение для погрешности оценки имеет вид

$$\mathbf{D}\left\{\hat{f}_0\right\} = \frac{-1}{q^2 \dfrac{d^2}{df^2}\left(\left|\dot{\Psi}(f - f_0)\right|\right)\Big|_{f=f_0}}, \tag{3.99}$$

где

$$\dot{\Psi}(f - f_0) = \frac{1}{2E}\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\dot{S}(t)\right|^2 \exp\left(j2\pi(f - f_0)t\right)dt. \tag{3.100}$$

Продифференцируем модуль комплексной функции неопределенности $\dot{\Psi}(f)$ сигнала в точке $f = 0$.

$$\frac{d^2}{df^2}\left|\dot{\Psi}(f)\right|\Big|_{f=0} = \mathrm{Re}\left[\dot{\Psi}''(0)\right] + \left|\dot{\Psi}'(0)\right|^2. \tag{3.101}$$

Подставим (3.101) в (3.100) и, используя свойства преобразования Фурье, получим

$$\frac{d^2}{df^2}\left|\dot{\Psi}(f)\right|\Big|_{f=0} = -(2\pi)^2\left(\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2E}\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\left|\dot{S}(t)\right|^2 dt\right] + \left|\frac{1}{2E}\int_{-\infty}^{+\infty} t\left|\dot{S}(t)\right|^2 dt\right|^2 \right) =$$

$$= -(2\pi)^2\left(\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\left|\dot{S}(t)\right|^2 dt}{\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\dot{S}(t)\right|^2 d\omega} - \left(\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} t\left|\dot{S}(t)\right|^2 dt}{\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\dot{S}(t)\right|^2 dt} \right)^2 \right) = -\left(2\pi\Delta T_{эф}\right)^2.$$

В этом выражении $\Delta T_{эф}$ - эффективная длительность комплексной огибающей сигнала, тогда

$$\mathbf{D}\left\{\hat{f}\right\} = \frac{1}{q^2\left(2\pi\Delta T_{эф}\right)^2}. \tag{3.102}$$

Анализируя (3.94) и (3.102) легко заметить, точность оценивания задержки тем лучше, чем хуже точность определения частотного сдвига сигнала и наоборот. В этом смысле короткие сигналы эффективны при оценке задержки, а продолжительные, для оценки частотного сдвига.

3.2.6. Совместное оценивание временной задержки и частотного сдвига сигнала со случайной начальной фазой

Рассмотрим задачу совместного оценивания временной задержки и частотного сдвига сигнала со случайной начальной фазой. Наблюдаемый сигнал имеет вид

$$x(t) = s(t-\tau, f, \varphi) + n(t), \tag{3.103}$$

где $s(t-\tau, f, \varphi) = \mathrm{Re}\left[\dot{S}(t-\tau)e^{j(\omega_0 + 2\pi f)t + \varphi}\right]$, $\dot{S}(t)$ - комплексная огибающая сигнала $s(t)$, φ - случайная фаза, равномерно распределенная на интервале $(-\pi;\pi)$.

Время запаздывания и частотный сдвиг являются неэнергетическим параметрами, тогда в соответствии с (3.64) алгоритм оценивания можно записать в виде

$$\tau = \arg\max_{\tau_0, f_0}\left|\dot{Z}(\tau_0, f_0)\right| = \arg\max_{\tau_0, f_0}\left|\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} X^*(t)\dot{S}(t-\tau_0)e^{j2\pi f_0 t}dt\right|. \tag{3.104}$$

Структура измерителя на базе квадратурных согласованных фильтров (КСФ) имеет вид, показанный на Рис.3.9. Алгоритм работы измерителя (3.104) реализуется в виде M параллельных КСФ, каждый из которых настроен на одну из частот $f_1, f_2, ..., f_M$, равномерно разбивающих диапазон измерений по шкале частот. Решающее устройство анализирует M сигналов и определяет номер канала и значение времени задержки, при котором наблюдается максимальное значение модуля комплексного корреляционного интеграла.

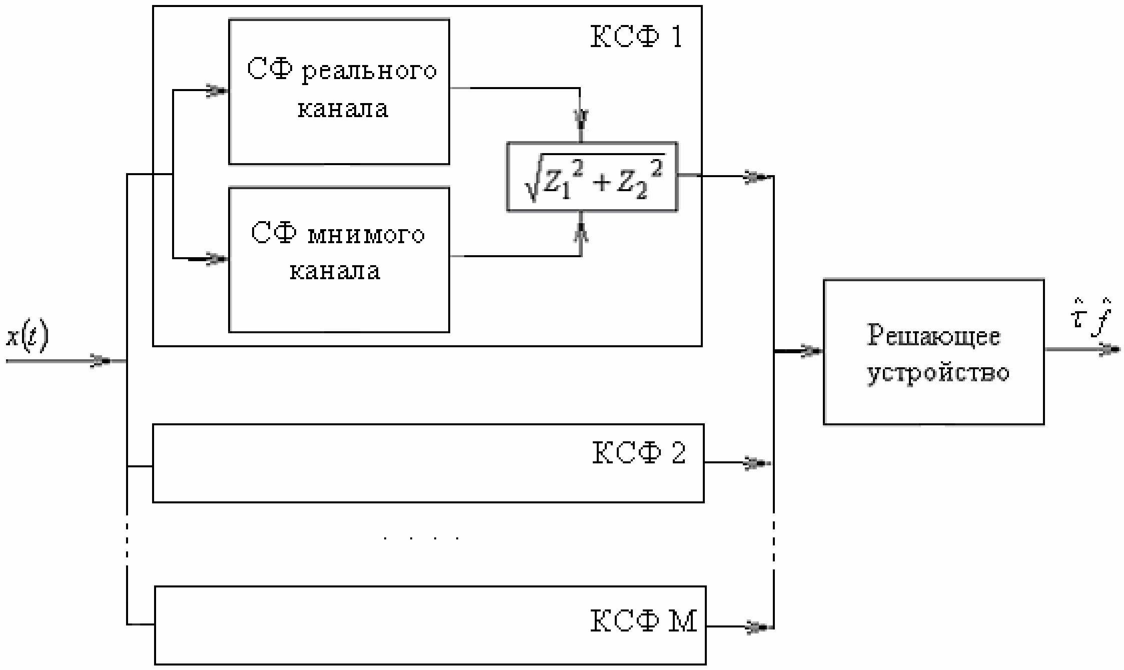

Рис.3.9. Структурная схема устройства совместной оценки частотного сдвига и задержки сигнала со случайной фазой на фоне белого шума.

Определим погрешность измерителя, следуя стандартной последовательности действий. Для этого найдем коэффициенты информационной матрицы Фишера. Для случая высокого значения отношения сигнал-шум и $f \to f_0$, $\tau \to \tau_0$ коэффициенты матрицы Фишера можно записать в виде

$$\Phi_{11}(\tau_0, f_0) = -\mathbf{M}\left\{ \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \ln\big(p(x|\tau, f)\big)\Big|_{\substack{\tau=\tau_0 \\ f=f_0}} \right\}, \qquad (3.105)$$

$$\Phi_{12}(\tau_0, f_0) = -\mathbf{M}\left\{ \frac{\partial^2}{\partial \tau \partial f} \ln\big(p(x|\tau, f)\big)\Big|_{\substack{\tau=\tau_0 \\ f=f_0}} \right\}, \qquad (3.106)$$

$$\Phi_{21}(\tau_0, f_0) = -\mathbf{M}\left\{ \frac{\partial^2}{\partial f \partial \tau} \ln\big(p(x|\tau, f)\big)\Big|_{\substack{\tau=\tau_0 \\ f=f_0}} \right\}, \qquad (3.107)$$

$$\Phi_{22}(\tau_0, f_0) = -\mathbf{M}\left\{ \frac{\partial^2}{\partial f \partial f} \ln\big(p(x|\tau, f)\big)\Big|_{\substack{\tau=\tau_0 \\ f=f_0}} \right\}. \qquad (3.108)$$

Ранее нами были фактически получены диагональные элементы матрицы Фишера, т.е.

$$\Phi_{11}(\tau_0, f_0) = -\frac{2E}{N_0} \frac{d^2}{d\tau^2} \left| \dot{\Psi}(\tau - \tau_0, 0) \right| \Big|_{\tau=\tau_0} = q^2 \left(2\pi \Delta T_{эф}\right)^2, \qquad (3.109)$$

$$\Phi_{22}(\tau_0, f_0) = -\frac{2E}{N_0} \frac{d^2}{df^2} \left| \dot{\Psi}(0, f - f_0) \right| \Big|_{f=f_0} = q^2 \left(\Delta \Omega_{эф}\right)^2, \qquad (3.110)$$

где

$$\dot{\Psi}(\tau, f) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} S^*(t) \dot{S}(t - \tau) e^{j2\pi f t} dt. \qquad (3.111)$$

Функция неопределенности $\dot{\Psi}(\tau, f)$ называется **комплексной частотно-временной функцией неопределенности**. Определим недостающие коэффициенты

$$\Phi_{21}(\tau_0, f_0) = \Phi_{12}(\tau_0, f_0) = -\frac{2E}{N_0} \frac{\partial^2}{\partial \tau \partial f} \left| \dot{\Psi}(\tau - \tau_0, f - f_0) \right| \Big|_{\substack{\tau=\tau_0 \\ f=f_0}} =$$

$$= -\frac{2E}{N_0} \mathrm{Re}\left[\frac{\partial^2}{\partial \tau \partial f} \dot{\Psi}(\tau - \tau_0, f - f_0) \Big|_{\substack{\tau=\tau_0 \\ f=f_0}} - \frac{\partial}{\partial \tau} \dot{\Psi}(\tau - \tau_0, 0) \Big|_{\tau=\tau_0} \cdot \frac{\partial}{\partial f} \dot{\Psi}(0, f - f_0) \Big|_{f=f_0} \right]$$

$$\Phi_{21}(0,0) = -\frac{2E}{N_0} \mathrm{Re}\left[\frac{-1}{2E} \int_{-\infty}^{+\infty} S^*(t) \dot{S}'(t) (j2\pi t) dt + \frac{1}{4E} \int_{-\infty}^{+\infty} S^*(t) \dot{S}'(t) dt \int_{-\infty}^{+\infty} |S(t)|^2 (j2\pi t) dt \right] =$$

$$=-\frac{2E}{N_0}\operatorname{Re}\left[\frac{-1}{2E}\int_{-\infty}^{+\infty}S^*(t)\dot{S}'(t)(j2\pi t)dt+\frac{j}{4E(2\pi)}\int_{-\infty}^{+\infty}|S(j\omega)|^2\,\omega dt\int_{-\infty}^{+\infty}|S(t)|^2(j2\pi t)dt\right]=$$

$$=\frac{2E}{N_0}\operatorname{Re}\left[\frac{1}{2E}\int_{-\infty}^{+\infty}S^*(t)\dot{S}'(t)(j2\pi t)dt\right]=\frac{2E}{N_0}\operatorname{Re}\left[\frac{1}{2E}\int_{-\infty}^{+\infty}S^*(t)\dot{S}(t)\left(\frac{\dot{S}'(t)}{\dot{S}(t)}\right)(j2\pi t)dt\right]=$$

$$=\frac{2E}{N_0}\operatorname{Re}\left[\frac{1}{2E}\int_{-\infty}^{+\infty}S^*(t)\dot{S}(t)\frac{\partial}{\partial t}\left(\ln\left(\dot{S}(t)\right)\right)(j2\pi t)dt\right]=$$

$$=\frac{2E}{N_0}\operatorname{Re}\left[\frac{1}{2E}\int_{-\infty}^{+\infty}|S(t)|^2\frac{\partial}{\partial t}\left(\ln\left(\dot{S}(t)\right)\right)(j2\pi t)dt\right]=$$

$$=\frac{2E}{N_0}\operatorname{Re}\left[\frac{1}{2E}\int_{-\infty}^{+\infty}|S(t)|^2\frac{\partial}{\partial t}\left(\ln\left(\left|\dot{S}(t)\right|+j\gamma(t)\right)\right)(j2\pi t)dt\right]=$$

$$=\frac{2E}{N_0}\operatorname{Re}\left[\frac{j2\pi}{2E}\int_{-\infty}^{+\infty}|S(t)|^2\frac{\partial}{\partial t}\left(\ln\left(\left|\dot{S}(t)\right|\right)\right)t dt-\frac{1}{2E}\int_{-\infty}^{+\infty}2\pi|S(t)|^2\gamma'(t)dt\right]=$$

$$=-2\pi q^2\frac{1}{2E}\int_{-\infty}^{+\infty}t|S(t)|^2\gamma'(t)dt.$$

Здесь $\gamma(t)$ - полная мгновенная фаза комплексной огибающей сигнала. Так как $2\pi\Omega(t)=\gamma'(t)$, где $\Omega(t)$ - мгновенная частота сигнала, получим

$$\Phi_{21}(0,0)=-q^2\frac{(2\pi)^2}{2E}\int_{-\infty}^{+\infty}t\left|\dot{S}(t)\right|^2\Omega(t)dt\,, \tag{3.112}$$

Введем **параметр частотно-временной связи** ρ в виде

$$\rho=\frac{2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}t\left|\dot{S}(t)\right|^2\Omega(t)dt}{\Delta\Omega_{эф}\Delta T_{эф}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\dot{S}(t)\right|^2dt}\,, \tag{3.113}$$

Тогда

$$\Phi_{21}(0,0)=-q^2\,2\pi\Delta\Omega_{эф}\Delta T_{эф}\rho\,. \tag{3.114}$$

Таким образом, информационная матрица Фишера имеет вид

$$\mathbf{\Phi}(a_0,\varphi_0)=\begin{pmatrix}\left(2\pi\Delta T_{эф}\right)^2 & -q^2\,2\pi\Delta\Omega_{эф}\Delta T_{эф}\rho\\ -q^2\,2\pi\Delta\Omega_{эф}\Delta T_{эф}\rho & q^2\left(\Delta\Omega_{эф}\right)^2\end{pmatrix}, \tag{3.115}$$

Погрешность оценки амплитуды и фазы можно вычислить по формулам

$$\mathbf{D}\{\hat{\varepsilon}|\tau_0,f_0\}=\frac{1}{q^2\left(\Delta\Omega_{эф}\right)^2\left(1-\rho^2\right)}, \tag{3.116}$$

$$\mathbf{D}\left\{\hat{f}\middle|\tau_0, f_0\right\} = \frac{1}{q^2\left(2\pi\Delta T_{эф}\right)^2\left(1-\rho^2\right)}. \qquad (3.117)$$

Полученные выражения показывают, что погрешность совместной оценки частоты и задержки зависит от параметра частотно-временной связи. Погрешность минимальна и соответствует погрешности независимой оценки частоты или фазы, только если параметр частотно-временной связи равен нулю. Из (3.113) очевидно, что $\rho = 0$, для всех сигналов, у которых $\Omega(t) = 0$ или симметрична относительно $t = 0$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Оценка максимального правдоподобия комплексной амплитуды сигнала сводится к вычислению амплитуды и фазы комплексного интеграла. Погрешность независимой оценки времени запаздывания и частоты сигнала со случайной фазой зависит от длительности сигнала противоположенным образом. Чем больше длительность сигнала, тем лучше погрешность оценки частоты и хуже запаздывания. Выражения для погрешности показывают, что погрешность совместной оценки частоты и задержки зависит от параметра частотно-временной связи. Погрешность минимальна и соответствует погрешности независимой оценки частоты или фазы, только если параметр частотно-временной связи равен нулю.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Чем определяется потенциальная погрешность оценки параметров сигнала со случайной фазой, наблюдаемого на фоне аддитивного БГШ?
2. Каков оптимальный алгоритм совместной оценки амплитуды и фазы сигнала на фоне БГШ.
3. Что такое аномальные ошибки в теории оценивания?
4. Что характеризует комплексная частотно-временная функция неопределенности сигнала?