ЛЕКЦИЯ №13. Постановка задачи фильтрации параметров сигналов. Линейная и нелинейная фильтрация. Общий метод решения задачи дискретной фильтрации. Линейная фильтрация. Фильтр Калмана.

3.3. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ

Рассмотрим задачу оценки параметров сигналов, являющихся функциями времени. В отличие от задачи оценки постоянного параметра при решении задачи фильтрации априорные сведения об измеряемом параметре играют значительную роль. Например, рассмотрим случай, когда наблюдаемый сигнал имеет вид

$$x(t) = \lambda(t) + n(t), \tag{3.118}$$

где $\lambda(t)$- неизвестный параметр, зависящий от времени (сообщение), $n(t)$- реализация белого гауссовского шума. Воспользуемся алгоритмом МП для оценки неизвестного параметра, тогда

$$p(x|\lambda(t)) = c \cdot \exp\left(-\frac{1}{N_0}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}(x(t)-\lambda(t))^2\,dt\right]\right), \tag{3.119}$$

Оценка МП неизвестного параметра $\hat{\lambda}(t) = x(t)$. Т.е. фактически мы не сможем отфильтровать интересующий нас параметр. Объяснение данному факту в том, что в случае параметров, зависящих от времени мы имеем дело с реализациями случайного процесса, а в случае (3.118) одной реализацией. В этом случае мы не можем использовать статистику сообщения для фильтрации.

Т.о. задача фильтрации ставится корректно, если имеется не только модель наблюдаемого сигнала

$$x(t) = s(t, \lambda(t)) + n(t), \tag{3.120}$$

но и модель сообщения, например в виде

$$\lambda(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t,\tau) n_0(\tau) d\tau, \tag{3.121}$$

где $\lambda(t)$- неизвестное сообщение, $n(t)$ - аддитивный шум, как правило, белый гауссовский шум, $n_0(t)$ - формирующий сообщение случайный процесс, обычно белый шум, $h(t,\tau)$ - импульсная характеристика формирующего сообщение фильтра.

Уравнение сообщения задается часто в виде стохастического дифференциального уравнения (уравнения Ланжевена)

$$\frac{d}{dt}\lambda(t) = g(t, \lambda(t)) + f(t, \lambda(t)) n_0(t), \qquad \lambda(t_0) = \lambda_0 \tag{3.122}$$

где $f(t, \lambda(t))$ и $g(t, \lambda(t))$ - детерминированные, дифференцируемые функции.

Задача фильтрации, поставленная с помощью уравнений (3.120), (3.121) или (3.122) называется задачей аналоговой или **непрерывной фильтрации**.

В частном случае, когда уравнения наблюдения и сообщения линейны по измеряемому параметру, говорят о **линейной фильтрации**.

В настоящее время, как правило, задачи обнаружения, различения, оценивания и фильтрации реализуются на базе цифровых устройств обработки. В этом случае задача фильтрации может быть задана в дискретном времени, с помощью следующих уравнений

$$x_i = s(t_i, \lambda_i) + n_i, \tag{3.123}$$

$$\lambda_i = g(t_i, \lambda_{i-1}) + n_{0i}, \tag{3.124}$$

где λ_i - отсчеты сообщения $\lambda(t)$ в дискретные моменты времени t_i, n_i - отсчеты шума, n_{0i} - отсчеты формирующего случайного процесса. В этом случае говорят о задаче **дискретной фильтрации**.

Анализируя задачу дискретной фильтрации нетрудно заметить, что в этом случае можно использовать методы теории оценивания параметров.

3.3.1. Общий метод решения задачи дискретной фильтрации

В соответствие с поставленной задачей будем искать оценку параметра λ_k, по наблюдаемым отсчетам сигнала $x_k, x_{k-1}, ..., x_1$, взятым в моменты времени $t_1, t_2, ..., t_k$ при наличии мешающих параметров $\lambda_{k-1}, ..., \lambda_1$.

В этом случае оптимальная в соответствии с алгоритмом МАВ оценка параметра λ_k имеет вид

$$\begin{aligned}\hat{\lambda}_k &= \int_{D_\lambda} \lambda_k \int_{D_\lambda} ... \int_{D_\lambda} p(\lambda_k, \lambda_{k-1}, ..., \lambda_1 | x_k, ... x_1) d\lambda_k ... d\lambda_1 = \\ &= \int_{D_\lambda} \lambda_k p(\lambda_k | x_k, ... x_1) d\lambda_k.\end{aligned} \tag{3.125}$$

Т.о. для получения оценки (3.125) необходимо иметь плотность $p(\lambda_k | x_k, ... x_1)$.

Допустим, что нам известна соответствующая плотность на предыдущем шаге $p(\lambda_{k-1} | x_{k-1}, ... x_1)$. Тогда плотность $p(\lambda_k | x_k, ... x_1)$ можно найти в виде

$$p(\lambda_k | x_k, ... x_1) = \frac{p(x_k | \lambda_k)}{p(x_k | x_{k-1}, ... x_1)} \int p(\lambda_{k-1} | x_{k-1}, ... x_1) p(\lambda_k | \lambda_{k-1}) d\lambda_{k-1}. \tag{3.126}$$

Действительно, в соответствии с уравнением наблюдения (3.123) λ_k зависит только от предыдущего значения λ_{k-1} и независит от предшествующих значений $\lambda_{k-2}, ..., \lambda_1$ и соответственно независит от $x_{k-1}, ..., x_1$.

Тогда (3.126) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}p(\lambda_k | x_k, ... x_1) &= \frac{p(x_k | \lambda_k)}{p(x_k | x_{k-1}, ... x_1)} \int p(\lambda_{k-1} | x_{k-1}, ... x_1) p(\lambda_k | \lambda_{k-1}, x_{k-1}, ..., x_1) d\lambda_{k-1} = \\ &= \frac{p(x_k | \lambda_k)}{p(x_k | x_{k-1}, ... x_1)} \int \frac{p(\lambda_{k-1}, x_{k-1}, ... x_1)}{p(x_{k-1}, ... x_1)} \frac{p(\lambda_k, \lambda_{k-1}, x_{k-1}, ..., x_1)}{p(\lambda_{k-1}, x_{k-1}, ... x_1)} d\lambda_{k-1} = \\ &= \frac{p(x_k | \lambda_k)}{p(x_k | x_{k-1}, ... x_1)} \int p(\lambda_k, \lambda_{k-1} | x_{k-1}, ..., x_1) d\lambda_{k-1} = \frac{p(x_k | \lambda_k)}{p(x_k | x_{k-1}, ... x_1)} p(\lambda_k | x_{k-1}, ..., x_1).\end{aligned}$$

(3.127)

Заметим, что последнее выражение иллюстрирует особенность учета априорных сведений о сообщении на каждом шаге алгоритма фильтрации. Так МП оценка на k-м шаге определяется только $p(x_k|\lambda_k)$, а априорная информация содержится в $p(\lambda_k|x_{k-1},...,x_1)$.

Если λ_k принимает конкретное значение то отсчет x_k определяется только значением отсчета шума n_k и независит от $x_{k-1},...,x_1$, тогда

$$p(\lambda_k|x_k,...x_1)=\frac{p(x_k|\lambda_k,x_{k-1},...x_1)}{p(x_k|x_{k-1},...x_1)}p(\lambda_k|x_{k-1},...,x_1)=$$

$$=\frac{p(x_k,\lambda_k,x_{k-1},...x_1)}{p(\lambda_k,x_{k-1},...x_1)}\frac{p(x_{k-1},...x_1)}{p(x_k,x_{k-1},...x_1)}\frac{p(\lambda_k,x_{k-1},...,x_1)}{p(x_{k-1},...x_1)}=p(\lambda_k|x_k,...x_1).$$

Т.о. выражение (3.126) справедливо для принятых уравнений наблюдения (3.123) и сообщения (3.124). Поскольку в алгоритме МАВ вычисляется аргумент максимума, и $p(x_k|x_{k-1},...x_1)$ не зависит от отсчета сообщения λ_k, то (3.126) можно записать в виде

$$p(\lambda_k|x_k,...x_1)=cp(x_k|\lambda_k)\int p(\lambda_{k-1}|x_{k-1},...x_1)p(\lambda_k|\lambda_{k-1})d\lambda_{k-1}\,. \qquad (3.128)$$

В этом выражении $p(x_k|\lambda_k)$ - определяется по уравнению наблюдения, $p(\lambda_{k-1}|x_{k-1},...x_1)$ - вычисляется рекуррентным способом, с известным начальным условием $p(\lambda_1)$, $p(\lambda_k|\lambda_{k-1})$ - определяется по уравнению сообщения.

3.3.2. Линейная фильтрация в дискретном времени

Уравнения наблюдения и сообщения в случае линейной дискретной фильтрации можно представить в виде

$$x_k=h_k\lambda_k+n_k\,, \qquad (3.129)$$

$$\lambda_k=\beta_k\lambda_{k-1}+n_{0k}\,, \qquad (3.130)$$

где λ_i - отсчеты сообщения, h_k, β_k - детерминированные параметры модели, n_i - отсчеты шума, n_{0i} - отсчеты формирующего случайного процесса.

Рассмотрим случай, когда n_i и n_{0i} - независимые гауссовские случайные величины с нулевым математическим ожиданием и дисперсиями D_k и D_{0k} соответственно.

В соответствии с (3.128) для построения алгоритма фильтрации необходимо найти $p(\lambda_{k-1}|x_{k-1},...x_1)$, $p(x_k|\lambda_k)$ и $p(\lambda_k|\lambda_{k-1})$.

Рассмотрим (3.127) следующим образом. Пусть $k=1$, тогда $p(\lambda_1|x_1)=p(x_1|\lambda_1)p(\lambda_1|)$., здесь $p(\lambda_1|)$ - гауссовское распределение в соответствии с условием задачи, $p(x_1|\lambda_1)$ - гауссовское распределение в соответствии с (3.129), т.о. $p(\lambda_1|x_1)$ - гауссовское распределение как произведение двух гауссовых распределений. В соответствие с уравнением сообщения $\lambda_2|x_1$ - гауссовская случайная величина, т.к. $\lambda_1|x_1$ и n_{02} - гауссовские случайные величины. Тогда $p(\lambda_2|x_2,x_1) = p(x_2|\lambda_2)p(\lambda_2|x_1).$ - гауссовская плотность, т.к. является произведением гауссовских плотностей. Продолжая рассуждения, убеждаемся, что $p(\lambda_{k-1}|x_{k-1},...,x_1) = p(x_{k-1}|\lambda_{k-1})p(\lambda_{k-1}|x_{k-1},...,x_1).$ - гауссовская плотность вида

$$p(\lambda_{k-1}|x_{k-1},...,x_1) = c_{k-1}\exp\left(-\frac{\left(\lambda_{k-1}-\hat{\lambda}_{k-1}\right)^2}{2R_{k-1}}\right)., \qquad (3.131)$$

где R_k - апостериорная дисперсия.

В этой формуле учтено, что оценка алгоритма МАВ является условным средним, определенным формулой (3.125).

Условная плотность $p(\lambda_k|\lambda_{k-1})$ непосредственно следует из уравнения сообщения (3.130)

$$p(\lambda_k|\lambda_{k-1}) = c_{0k-1}\exp\left(-\frac{(\lambda_k-\beta_{k-1}\lambda_{k-1})^2}{2D_{0k}}\right).. \qquad (3.132)$$

Подставим полученные формулы в интеграл в выражение (3.128).

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} p(\lambda_{k-1}|x_{k-1},...x_1)p(\lambda_k|\lambda_{k-1})d\lambda_{k-1} =$$

$$= c_{k-1}c_{0k-1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{\left(\lambda_{k-1}-\hat{\lambda}_{k-1}\right)^2}{2R_{k-1}}\right)\exp\left(-\frac{(\lambda_k-\beta_{k-1}\lambda_{k-1})^2}{2D_{0k}}\right)d\lambda_{k-1} =$$

$$= c_{k-1}c_{0k-1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\left(\lambda_{k-1}-\hat{\lambda}_{k-1}\right)^2}{2R_{k-1}}+\frac{(\lambda_k-\beta_{k-1}\lambda_{k-1})^2}{2D_{0k}}\right)\right)d\lambda_{k-1} = c_{k-1}c_{0k-1}\times$$

$$\times\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\left(\lambda^2{}_{k-1}\left(D_{0k}+R_{k-1}\beta^2{}_{k-1}\right)-2\lambda_{k-1}\left(\hat{\lambda}_{k-1}D_{0k}+R_{k-1}\beta_{k-1}\lambda_k\right)\right)}{D_{0k}R_{k-1}}\right)\right)d\lambda_{k-1}\times$$

$$\times\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\left(\hat{\lambda}^2{}_{k-1}D_{0k}+\lambda_k^2R_{k-1}\right)}{D_{0k}R_{k-1}}\right)\right).$$

Далее воспользуемся равенством

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2-2xm}{\sigma^2}\right)\right)dx = \sqrt{2\pi}\sigma\exp\left(\frac{m^2}{2\sigma^2}\right). \qquad (3.133)$$

Тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} p(\lambda_{k-1}|x_{k-1},...x_1)p(\lambda_k|\lambda_{k-1})d\lambda_{k-1} =$$

$$= \sqrt{2\pi}c_{k-1}c_{0k-1}\sqrt{\frac{D_{0k}R_{k-1}}{D_{0k}+R_{k-1}\beta^2{}_{k-1}}}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\left(\hat{\lambda}_{k-1}\beta_{k-1}-\lambda_k\right)^2}{D_{0k}+R_{k-1}\beta^2{}_{k-1}}\right). \qquad (3.134)$$

Функционал правдоподобия $p\left(x_k \middle| \lambda_k\right)$ может быть получен из уравнения наблюдения в виде

$$p\left(x_k \middle| \lambda_k\right) = c_{xk-1} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\left(x_k - h_k \lambda_k\right)^2}{D_k} \right). \tag{3.135}$$

Окончательно

$$p\left(\lambda_k \middle| x_k, \ldots x_1\right) = \sqrt{2\pi} c_{k-1} c_{0k-1} c_{xk-1} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\left(x_k - h_k \lambda_k\right)^2}{D_k} \right) \times$$

$$\times \sqrt{\frac{D_{0k} R_{k-1}}{D_{0k} + R_{k-1} \beta^2{}_{k-1}}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\left(\hat{\lambda}_{k-1} \beta_{k-1} - \lambda_k\right)^2}{D_{0k} + R_{k-1} \beta^2{}_{k-1}} \right) =$$

$$= \sqrt{2\pi} c_{k-1} c_{0k-1} c_{xk-1} \sqrt{\frac{D_{0k} R_{k-1}}{D_{0k} + R_{k-1} \beta^2{}_{k-1}}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\left(x_k - h_k \lambda_k\right)^2}{D_k} + \frac{\left(\hat{\lambda}_{k-1} \beta_{k-1} - \lambda_k\right)^2}{D_{0k} + R_{k-1} \beta^2{}_{k-1}} \right) \right). \tag{3.136}$$

Выделяя квадрат оцениваемого параметра в выражении под экспонентой, получим (3.136) в виде

$$p\left(\lambda_k \middle| x_k, \ldots x_1\right) =$$

$$= C_k \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\left(\lambda_k - \frac{\left(\hat{\lambda}_{k-1} \beta_{k-1} D_k + x_k h_k \left(D_{0k} + R_{k-1} \beta^2{}_{k-1}\right)\right)}{D_k + h_k^2 \left(D_{0k} + R_{k-1} \beta^2{}_{k-1}\right)} \right)^2}{\frac{D_k \left(D_{0k} + R_{k-1} \beta^2{}_{k-1}\right)}{D_k + h_k^2 \left(D_{0k} + R_{k-1} \beta^2{}_{k-1}\right)}} \right) \right).$$

Из этого выражения можно выделить математическое ожидание распределения $p\left(\lambda_k \middle| x_k, \ldots x_1\right)$ в виде

$$\hat{\lambda}_k = \frac{\left(\hat{\lambda}_{k-1} \beta_{k-1} D_k + x_k h_k \left(D_{0k} + R_{k-1} \beta^2{}_{k-1}\right)\right)}{D_k + h_k^2 \left(D_{0k} + R_{k-1} \beta^2{}_{k-1}\right)}. \tag{3.137}$$

Дисперсия распределения $p\left(\lambda_k \middle| x_k, \ldots x_1\right)$ - апостериорная дисперсия, имеет вид

$$R_k = \frac{D_k \left(D_{0k} + R_{k-1} \beta^2{}_{k-1}\right)}{D_k + h_k^2 \left(D_{0k} + R_{k-1} \beta^2{}_{k-1}\right)}. \tag{3.138}$$

Выражение (3.137) можно записать в форме **уравнения фильтра Калмана**

$$\hat{\lambda}_k = \hat{\lambda}_{k-1} \beta_{k-1} + \frac{R_k}{D_k} h_k \left(x_k - \hat{\lambda}_{k-1} \beta_{k-1} h_k\right). \tag{3.139}$$

Как видно из (3.139) фильтр Калмана является нестационарным фильтром даже в том случае, когда параметры модели $h_k = h$, $\beta_k = \beta$, $D_k = D$, $D_{0k} = D_0$ не зависят от *k*, поскольку зависит от номера отсчета апостериорная дисперсия R_k. Часто существует предел $\lim\limits_{k \to \infty} R_k = R$. Если в схеме фильтра положить коэффициент $\frac{R_k}{D_k}h_k = \frac{R}{D}h$, то полученный фильтр будет стационарным, но оптимальным он будет только асимптотически, при $k \to \infty$.

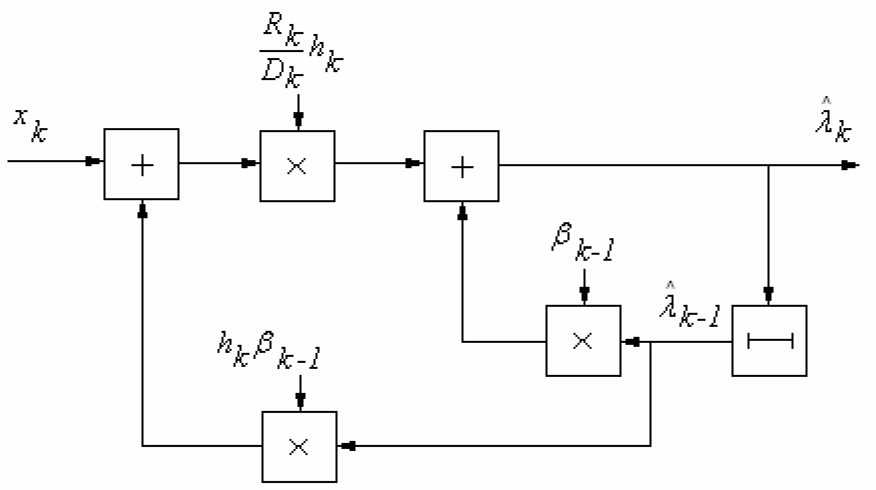

Рис.3.10. Структурная схема дискретного фильтра Калмана.

<u>Пример 3.1.</u>

Рассмотрим калмановскую фильтрацию постоянной величины. В этом случае уравнения наблюдения и сообщения можно записать в виде

$$x_k = \lambda_k + n_k, \tag{3.140}$$

$$\lambda_k = \lambda_{k-1}, \tag{3.141}$$

Уравнения фильтра Калмана

$$\hat{\lambda}_k = \hat{\lambda}_{k-1} + \frac{R_k}{D}\left(x_k - \hat{\lambda}_{k-1}\right), \tag{3.142}$$

где D – дисперсия отсчетов шума.

Апостериорная дисперсия может быть получена из уравнения

$$\frac{1}{R_k} = \frac{1}{R_{k-1}} + \frac{1}{D} = \frac{1}{R_{k-2}} + \frac{2}{D} = \frac{1}{R_{k-3}} + \frac{3}{D} = \ldots = \frac{1}{R_1} + \frac{k}{D}. \tag{3.143}$$

Поскольку $R_k >> R_1$, получим, что $R_k \approx \frac{D}{k}$.

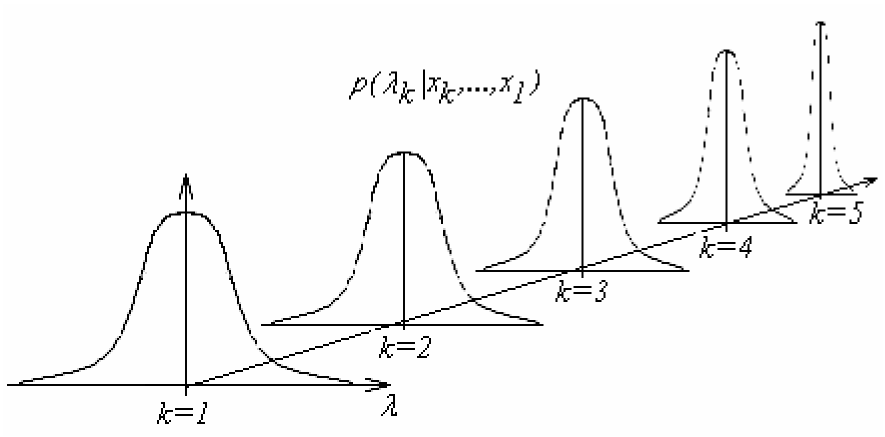

Рис.3.11. Эволюция апостериорной плотности вероятности при калмановской

фильтрации постоянной величины.

На Рис.3.11 показана эволюция апостериорной плотности вероятности при калмановской фильтрации постоянной величины. Можно обратить внимание, что в процессе фильтрации быстро уменьшается погрешность оценки. В случае постоянной измеряемой величины погрешность стремиться к нулю.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решение задачи фильтрации параметров сигналов требует дополнительной априорной информации об измеряемой величине, задаваемой в уравнении сообщения. Задача линейной и нелинейной фильтрации возникает в случае линейности уравнений сообщения и наблюдения по измеряемому параметру. Погрешность фильтрации имеет статическую и динамическую компоненты. Первая определяется воздействием шума, вторая несовпадением предсказываемого и реального значений изменяющегося во времени параметра.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что в СТРТС понимают под задачей фильтрации параметров сигнала?
2. В чем отличие в постановке задач линейной и нелинейной, аналоговой и дискретной фильтрации?
3. Что в задаче фильтрации описывают с помощью уравнения наблюдения и уравнения сообщения?
4. Опишите общий метод решения задачи дискретной фильтрации?
5. Опишите работу дискретного фильтра Калмана.