ЛЕКЦИЯ №17. Общая характеристика псевдошумовых сигналов (ПШС). Импульсы, кодированные кодом Баркера, М-последовательности.

4.2.2. Сигналы с многолепестковой функцией неопределенности

Функцию неопределенности такого типа имеют последовательности (пачки) одинаковых, равноотстоящих друг от друга импульсов

$$s(t) = \mathrm{Re}\left[\sum_{i=0}^{N-1} \dot{S}_0(t - iT)\right], \tag{4.16}$$

где T - период повторения импульсов в пачке ($T > 2\Delta$), $\dot{S}_0(t)$ - комплексная огибающая одиночного импульса.

Найдем функцию неопределенности пачки импульсов

$$\begin{aligned}
\dot{\Psi}(\tau, f) &= \frac{1}{2E}\int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(t) S^*(t-\tau)\exp(j2\pi ft)dt = \\
&= \frac{1}{2E}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{i=0}^{N-1}\dot{S}_0(t-iT)\sum_{i=0}^{N-1}\dot{S}_0(t-\tau-iT)\exp(j2\pi ft)dt = \\
&= \frac{1}{2E}\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1}\int_{-\infty}^{\infty}\dot{S}_0(t-iT)\dot{S}_0(t-\tau-kT)\exp(j2\pi ft)dt = [\theta = t - iT] = \\
&= \frac{1}{2E}\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1}\int_{-\infty}^{\infty}\dot{S}_0(\theta)\dot{S}_0(\theta-\tau-(k-i)T)\exp(j2\pi\theta f)d\theta\exp(j2\pi iTf) = \\
&= \frac{E_0}{E}\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1}\dot{\Psi}_0(\tau+(k-i)T, f)\exp(j2\pi iTf).
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Характер функции неопределенности в этом случае иллюстрирует Рис.4.10, на котором показана частотновременная ФН последовательности 5-ти прямоугольных импульсов.

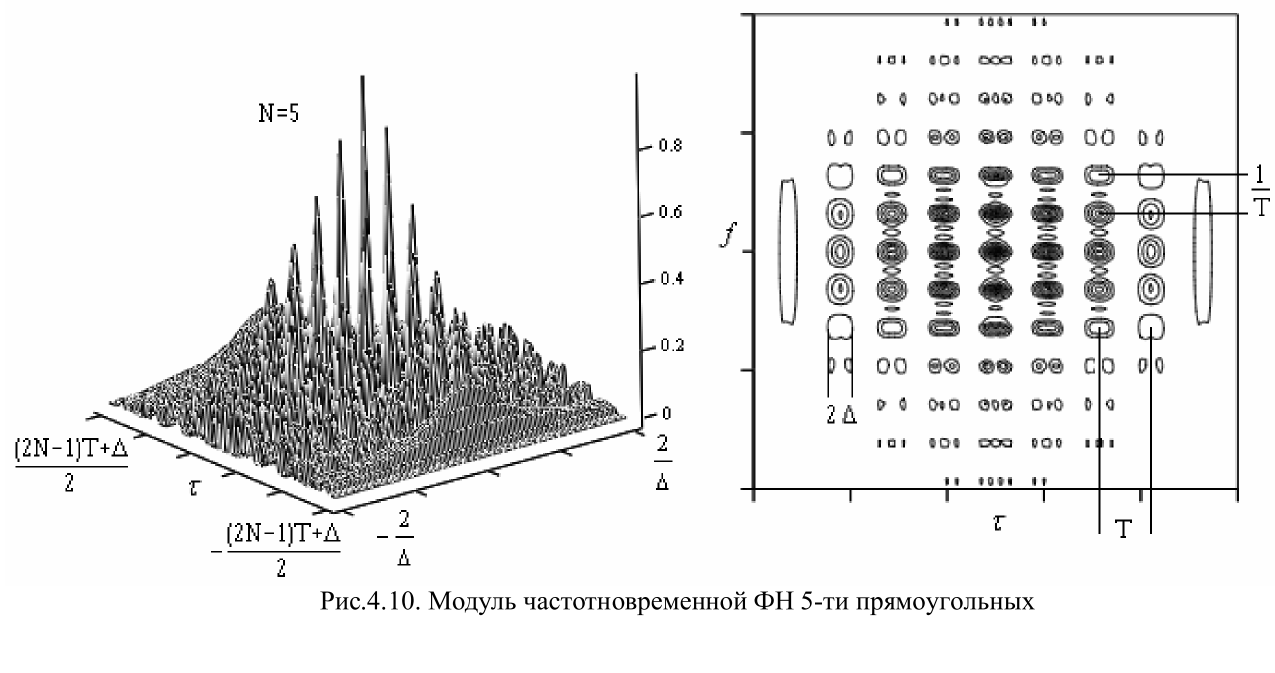


Рис.4.10. Модуль частотновременной ФН 5-ти прямоугольных

импульсов (функция слева, контур справа).

При $T > 2\Delta$ в сечении задержки мы имеем $2N-1$ копий функций неопределенности одиночного импульса, сдвинутых на T.

В области частотного сдвига мы имеем в принципе неограниченную последовательность пиков, интервал между которыми $\frac{1}{T}$, причем эта последовательность промодулирована по амплитуде функцией неопределенности одиночного импульса.

Действительно

$$\begin{aligned}\dot{\Psi}(0,f) &= \frac{E_0}{E}\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1}\dot{\Psi}_0\big((k-i)T,f\big)\exp\big(j2\pi iTf\big) = \\ &= \frac{E_0}{E}\dot{\Psi}_0(0,f)\sum_{i=0}^{N-1}\exp\big(j2\pi iTf\big) = \frac{E_0}{E}\dot{\Psi}_0(0,f)\exp\big(j(N+1)\pi Tf\big)\frac{\sin(N\pi Tf)}{\sin(\pi Tf)}.\end{aligned} \tag{4.18}$$

Т.о. область изменения параметров задержки и частоты, в которой возможно однозначное измерение, ограничена диапазоном $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$ по задержке и $\left[-\frac{1}{2T},\frac{1}{2T}\right]$ по частоте. При этом разрешающая способность по задержке равна Δ, по частоте $\frac{1}{NT}$.

4.2.3. Сигналы с кнопочной функцией неопределенности

Функция неопределенности такого типа соответствует представлениям об идеальном сигнале для одновременного измерения задержки и частоты. Такой сигнал должен иметь узкий пик частотновременной ФН и низкий уровень боковых лепестков.

Если Δ - длительность сигнала, Δf - полоса частот, то область основного пика ФН занимает объем $V_n = \frac{1}{\Delta f}\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{B}$, в этом случае в соответствии с принципом неопределенности Вудворда на боковые лепестки приходится объем $V_{бл} = 1 - V_n = 1 - \frac{1}{B}$.

Тогда уровень боковых лепестков частотновременной ФН ρ удовлетворяет неравенству

$$\rho \geq \sqrt{\frac{B-1}{2B^2}}, \tag{4.19}$$

где B - база сигнала. Т.о. поиск сигналов с кнопочной ФН нужно искать среди сигналов с большой базой.

Для реализации кнопочной ФН используются два типа сигналов: сигналы с немонотонной частотной модуляцией и сигналы с псевдослучайным кодированием последовательностей импульсов по частоте, фазе или временному положению в пачке.

Примером сигналов первого типа является сигнал с V-образной частотной модуляцией вида

$$\dot{S}(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[S_0^*\left(t+\frac{\Delta}{2}\right)+\dot{S}_0\left(t-\frac{\Delta}{2}\right)\right], \tag{4.20}$$

где $\dot{S}_0(t)$ - комплексная огибающая ЛЧМ импульса (4.11).

Аналогичными свойствами обладает сигнал с квадратичной частотной модуляцией (ЧМ).

$$\dot{S}(t)=\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\operatorname{rect}\left(\frac{t}{\Delta}\right)\exp\left(j\pi\alpha t^3\right). \tag{4.21}$$

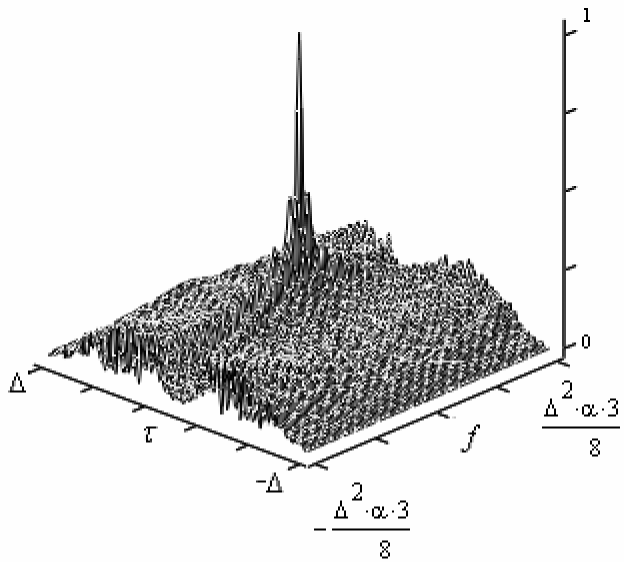


Рис.4.11. Модуль частотновременной ФН сигнала с квадратичной ЧМ.

Наибольшее распространение в радиотехнике имеют сигналы на основе последовательностей кодированных по псевдослучайному закону импульсов. Сигналы такого типа имеют вид

$$s(t)=\operatorname{Re}\left[\sum_{i=0}^{N-1}\dot{a}_i\,\dot{S}_0(t-i\Delta)\right], \tag{4.22}$$

где $\dot{S}_0(t)$ - комплексная огибающая одиночного импульса, Δ - длительность импульса. Такую последовательность импульсов часто называют пакетом, а последовательность амплитуд и фаз $\{\dot{a}_i\}$ кодовой последовательностью.

Найдем функцию неопределенности пакета импульсов

$$\dot{\Psi}(\tau,f)=$$

$$=\frac{1}{2E}\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1}\dot{a}_i a_k^*\int_{-\infty}^{\infty}\dot{S}_0(\theta)\dot{S}_0(\theta-\tau-(k-i)T)\exp(j2\pi\theta f)d\theta\exp(j2\pi iTf)=$$

$$=\frac{E_0}{E}\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1}\dot{a}_i a_k^*\dot{\Psi}_0(\tau+(k-i)T,f)\exp(j2\pi iTf)=$$

$$=\begin{bmatrix} m=k-i \\ i=k-m \end{bmatrix}=\frac{E_0}{E}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=k}^{k-N+1}\dot{a}_{k-m}a_k^*\dot{\Psi}_0(\tau+mT,f)\exp(j2\pi(k-m)Tf)$$

Переходя к бесконечным индексам и добивая нулями до бесконечности последовательность $\{\dot{a}_i\}$, получим

$$\dot{\Psi}(\tau,f)=\frac{E_0}{E}\sum_{k=-\infty}^{k=\infty}\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\dot{a}_{k-m}a_k^*\dot{\Psi}_0(\tau+mT,f)\exp(j2\pi(k-m)Tf)=$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\dot{\Psi}_0(\tau+mT,f)\exp(-j2\pi(m)Tf)\left(\frac{E_0}{E}\sum_{k=-\infty}^{k=\infty}\dot{a}_{k-m}a_k^*\exp(j2\pi kTf)\right).$$

Обозначим в виде

$$\dot{\Psi}_a(m,f)=\frac{E_0}{E}\sum_{k=-\infty}^{k=\infty}\dot{a}_{k-m}a_k^*\exp(j2\pi kTf), \tag{4.23}$$

функцию неопределенности кодовой последовательности, тогда

$$\dot{\Psi}(\tau,f)=\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\dot{\Psi}_0(\tau+mT,f)\dot{\Psi}_a(m,f)\exp(-j2\pi(m)Tf). \tag{4.24}$$

Из этого выражения видно, что, подбирая коэффициенты кодовой последовательности, можно обеспечить требуемый вид частотновременной ФН.

Часто, однако, бывает, что обеспечить кнопочный вид ФН удается только по одной координате. В рассматриваемом случае чисто временная ФН пакета имеет вид

$$\dot{\Psi}(\tau,0)=\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\dot{\Psi}_0(\tau+mT,0)\dot{\Psi}_a(m,0), \tag{4.25}$$

где $\dot{\Psi}_a(m,0)=0$, если $m\geq N$ и $m\leq -N$.

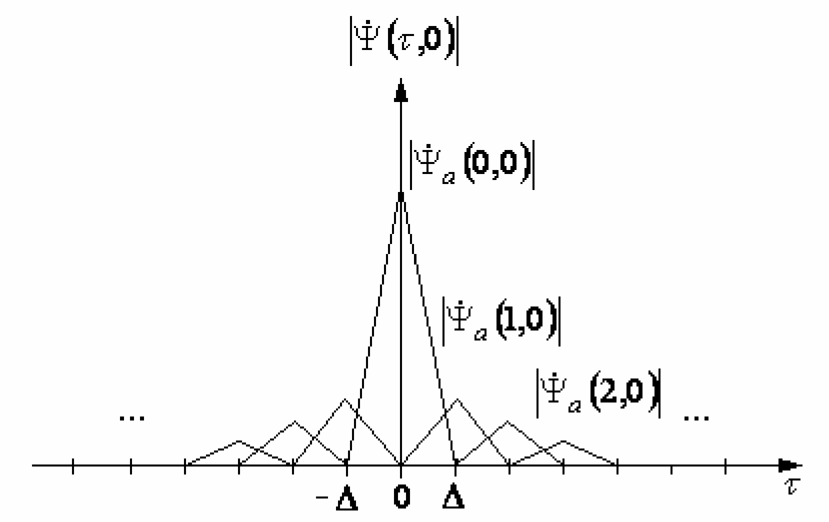


Рис.4.12. Модуль временной ФН кодированной пачки импульсов.

Для обеспечения максимального сжатия в сечении задержки и одновременно минимального уровня боковых лепестков идеально было бы, что

$$\dot\Psi_a(m,0)=\begin{cases}1, m=0\\0, m\neq 0\end{cases}, \tag{4.26}$$

тогда сумма в (4.25) будет иметь единственное значение $\dot\Psi_0(\tau,0)$, которое имеет длительность 2Δ, а в случае прямоугольного импульса ($\dot S_0(t)$) Δ, по уровню 0.5. В тоже время длительность сигнала равна $N\Delta$.

Таким образом $k_{сж}=N$. Очевидно, что база сигнала в случае, когда $\dot S_0(t)$ простой сигнал, определяется как $B=N\Delta\frac{1}{\Delta}=N$. Однако кодовой последовательности, для которой выполнялось бы выражение (4.26) не существует. Действительно у любой кодовой последовательности $\dot a_0\neq 0$ и $\dot a_{N-1}\neq 0$, тогда, по крайней мере $\dot\Psi_a(N-1,0)=\frac{E_0}{E}\dot a_{N-1}a_0^*\neq 0$.

Т.о. сигналов с идеальной ФН не существует. Однако, существует достаточно много кодовых последовательностей, ФН для которых отличается от идеальной на приемлемую с точки зрения практики величину.

Кодовая последовательность может быть бинарной ($a_i=\pm 1$), двоичной ($a_i\in\{0,1\}$), троичной ($a_i\in\{0,\pm 1\}$), p-ичной ($a_i\in\left\{0,\pm 1,\ldots,\frac{p-1}{2}\right\}$). На практике используются также полифазные последовательности ($a_i=\exp\left(j2\pi\frac{i}{p}\right), i=1,p$).

Рассмотрим широко распространенный частный случай, когда $a_i=\pm 1$. Сигналы с такой кодовой последовательностью называют **фазоманипулированными**.

В этом случае $\dot\Psi_a(N-1,0)=\pm\frac{1}{N}$. Т.о. боковой лепесток ФН кодовой последовательности по модулю удовлетворяет неравенству

$$\left|\dot{\Psi}_a(i,0)\right| \geq \frac{1}{N}. \tag{4.27}$$

Ясно, что сигналом с идеальной в смысле (4.27) ФН можно считать фазоманипулированные сигналы, у которых

$$\dot{\Psi}_a(i,0) = \begin{cases} 1, & i = 0, \\ \pm\dfrac{1}{N}, & i \neq 0. \end{cases} \tag{4.28}$$

а***) Сигналы, кодированные кодом Баркера***

Кодовые последовательности, для которых выполняется свойство (4.28) существуют, и называются **последовательностями Баркера**.

К сожалению, существует только девять таких последовательностей при $N = 2, 3, 4, 5, 7, 11, 13$. Доказано, что не существует последовательностей Баркера нечетной длины для $N > 13$. Вместе с тем не обнаружено последовательностей Баркера с четной длиной кроме $N = 2,4$.

N	Кодовая последовательность	$\dot{\Psi}_a(i,0)$, $i = 0,1,\ldots,N-1$
2	+ +	2 +
2	– +	2 –
3	+ + –	3 0 –
4	+ + – +	4 – 0 +
4	+ + + –	4 + 0 –
5	+ + + – +	5 0 + 0 +
7	+ + + – – + –	7 0 – 0 – 0 –
11	+ + + – – – + – – + –	11 0 – 0 – 0 – 0 – 0 –
13	+ + + + + – –+ + – + – +	13 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 +

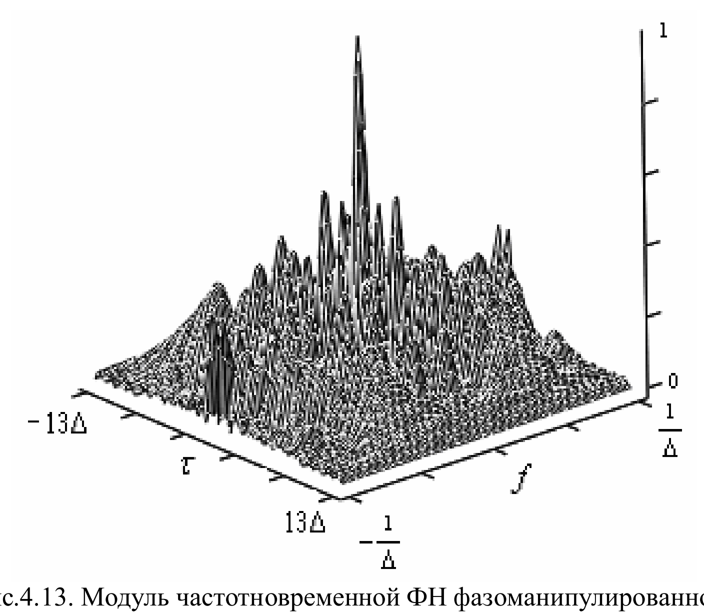


Рис.4.13. Модуль частотновременной ФН фазоманипулированного сигнала, кодированного кодом Баркера для N=13.

б) Сигналы, кодированные М-последовательностями

Для сигналов с большим значением N в качестве двоичной кодовой последовательности часто используют последовательности максимальной длины или (M-последовательности).

Принцип формирования M-последовательности состоит в том, что члены последовательности выбираются таким образом, чтобы обеспечить максимальное число членов до момента, когда последовательность начнет циклически повторяться. M-последовательности существуют для $N = 2^m - 1$.

M-последовательности генерируются с помощью рекуррентных формул вида

$$c_k = \alpha_1 c_{k-1} \oplus \alpha_2 c_{k-2} \oplus ... \oplus \alpha_m c_{k-m}, \qquad k > m, \tag{4.29}$$

где $\oplus$ - сложение по модулю 2, $c_k \in \{0,1\}$, $a_k = 2(c_k - 0.5)$. Первые m коэффициентов c_k, не равные нулю одновременно, выбираются произвольно.

Коэффициенты в формуле (4.29) можно определить из таблицы

m	N	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8
2	3	1	1						
3	7	1	0	1					
4	15	1	0	0	1				
5	31	1	1	1	0	1			
6	63	1	0	1	1	0	1		
7	127	0	0	1	0	0	0	1	
8	255	0	1	1	1	0	0	0	1

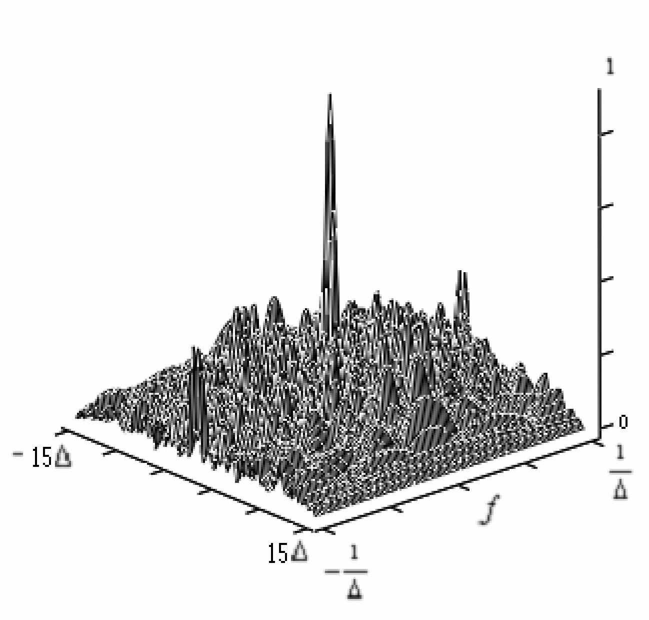
M-последовательности обладают идеальной ФН при циклическом сдвиге элементов последовательности

$$\Phi_a(m,0) = \frac{E_0}{E}\sum_{k=1}^{k=N} \dot{a}_{(k+m),\,\mathrm{mod}\,N} a_k^* = \begin{cases} 1, & i = 0, \\ \pm\dfrac{1}{N}, & i \neq 0. \end{cases}, \tag{4.30}$$

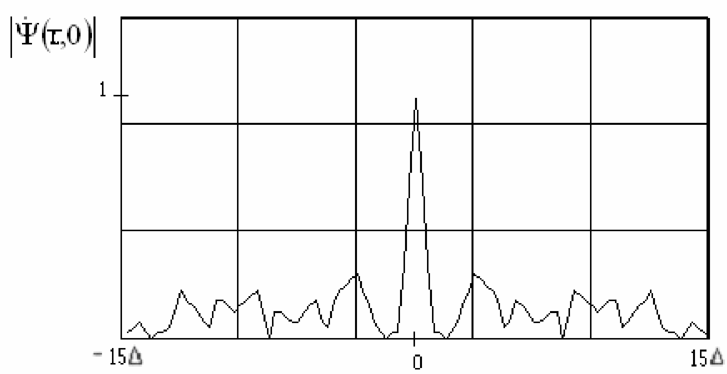
где запись $r = (k+m), \mathrm{mod}\,N$ означает вычисление индекса по модулю N, т.е. индекс r равен остатку от деления $(k+m)$ на N. Т.о. M-последовательности оптимальны при передаче смежных пакетов.

Для обычной ФН (4.23) уровень боковых лепестков M-последовательности удовлетворяет неравенству

$$\left|\dot{\Psi}_a(i,0)\right| \geq \frac{1}{\sqrt{N}}. \tag{4.31}$$



а)



б)

Рис.4.14. Модуль частотновременной ФН а) и временная ФН б) фазоманипулированного сигнала, кодированного *M*-последовательностью для *N*=15.

На основе *M*-последовательностей часто формируют ансамбли сигналов, в которых сигналы помимо хороших автокорреляционных характеристик обладают хорошими взаимокорреляционными свойствами. Эти ансамбли используют в системах связи для организации многопользовательского режима с кодовым разделением каналов. Наиболее часто используются последовательности Голда и Кассами.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

ПШС обычно обеспечивают хорошие свойства во временной области. Так например импульсы, кодированные кодом Баркера, обеспечивают идеальную ФН во временной области. На основе М-последовательностей часто формируют ансамбли сигналов, в которых сигналы помимо хороших автокорреляционных характеристик обладают хорошими взаимокорреляционными свойствами.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Каковы основные свойства сигналов, кодированных *M*-последовательностями?

2. Сравните между собой сигналы, кодированные кодом Баркера и сигналы, кодированные M-последовательностями.
3. Сравните между собой ЛЧМ импульс и сигнал с тем же значением базы, кодированный M-последовательностью?