ЛЕКЦИЯ №3. Вероятностная модель задачи обнаружения сигналов РТС. Проверка гипотез. Отношение правдоподобия.

2. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ОБНАРУЖЕНИЯ И РАЗЛИЧЕНИЯ СИГНАЛОВ

2.1. ТЕОРИЯ ОБНАРУЖЕНИЯ СИГНАЛОВ

Под обнаружением сигнала в СТРТС понимается задача анализа принятого колебания с целью установить, присутствует ли в этом колебании сигнал или нет на фоне помех.

Задача обнаружения ставиться корректно, когда об ожидаемом сигнале имеется достаточный объем априорной информации, т.е. известен вид или форма сигнала, при этом допускается, что часть параметров сигнала неизвестна, но имеются их статистические характеристики. Допускается даже, что и форма сигнала может быть неизвестна, но в этом случае должны быть, по крайней мере, известны статистические характеристики значений сигнала, причем они должны отличаться от статистических характеристик шума. В противном случае задача обнаружения может напоминать пожелание «найти то ни знаю что».

В отличие от обнаружения, различение сигналов – это принятие решения, какой из *M* сигнал находится в принятом колебании. С этой точки зрения обнаружение сигнала это различение двух сигналов, один из которых нулевой.

Оптимальные алгоритмы принятия решений при обнаружении или различении сигналов в условиях случайных воздействий помех и шумов должны обеспечивать заданное качество в большинстве случаев, т.е. критерии качества должны быть статистическими. Поэтому алгоритмы обнаружения и различения основаны на методах теории проверки статистических гипотез, являющейся частью математической статистики. Основные идеи этой теории мы рассмотрим на примере решения задачи обнаружения сигналов.

Представим задачу обнаружения сигнала в виде схемы на Рис.2.1.

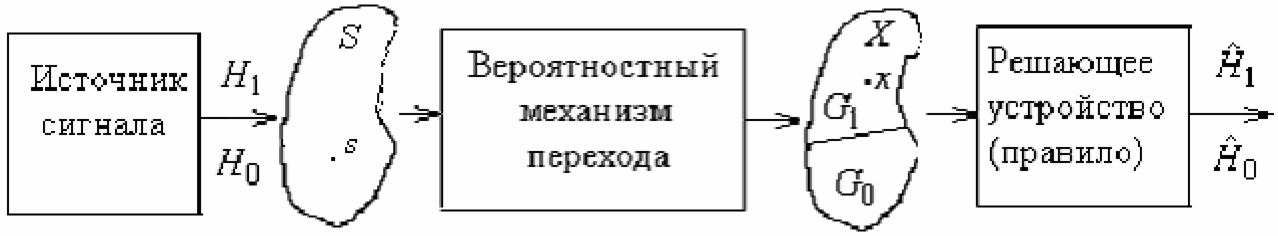

Рис.2.1. Задача обнаружения сигнала.

Источник сигнала порождает точку s в пространстве передаваемых сигналов **S.** Наблюдаемый на входе обнаружителя сигнал x принадлежит пространству наблюдаемых (входных) сигналов $\mathbf{X}$. Пространства наблюдаемых и передаваемых сигналов удобно считать однотипными.

В зависимости от вида пространства наблюдаемых сигналов принятый сигнал x и передаваемый s могут быть:

1. Числом, если пространства **X** и **S** является множествами вещественных **R** или комплексных чисел **C**;

2. Вектором отсчетов $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ или $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$, если пространства $\mathbf{X}$ и $\mathbf{S}$ являются n-мерными пространствами $\mathbf{R}^n$ или $\mathbf{C}^n$;

3. Функциями времени, если пространства $\mathbf{X}$ и $\mathbf{S}$ являются функциональными пространствами $\mathbf{L}$.

Случай 1 и 2 описывают ситуацию, которая возникает в цифровых обнаружителях. Здесь принятый сигнал x представляет собой последовательность отсчетов сигнала $x(t)$ на выходе аналогового цифрового преобразователя (АЦП). Если для дальнейшей обработки используется один из отсчетов сигнала, то это 1-й случай, если используется большее число отсчетов то 2-й. Случай 3 возникает, когда обнаружитель аналоговый, и решение принимается в результате анализа непрерывного по времени сигнала.

В рассматриваемой задаче сложность обнаружения заключается в том, что передаваемый сигнал s отображается в пространство принимаемых сигналов случайным образом в результате действия вероятностного механизма перехода $\mathbf{S} \to \mathbf{X}$. Для описания процесса отображения $\mathbf{S} \to \mathbf{X}$ введем следующие вероятностные характеристики задачи:

H_1 - гипотеза о наличии сигнала в принятом сигнале x, $s \neq 0$;

H_0 - гипотеза об отсутствии в принятом сигнале x сигнала, $s = 0$;

$p(x|H_0)$ - плотность вероятности наблюдаемого сигнала x при условии, что справедлива гипотеза H_0;

$p(x|H_1)$ - плотность вероятности наблюдаемого сигнала x при условии, что справедлива гипотеза H_1;

$\mathbf{P}\{H_1\}, \mathbf{P}\{H_0\}$ - априорные вероятности наличия или отсутствия сигнала на выходе источника.

$\hat{H}_1$ и $\hat{H}_0$ - принятые обнаружителем решения. Правило принятия решений сводится к проверке условия: если x попадает в область G_1, то принимается решение $\hat{H}_1$, если x попадает в область G_0, то принимается решение $\hat{H}_0$. Области G_1 и G_0 таковы, что $G_1 \cup G_0 = \mathbf{X}$, $G_1 \cap G_0 = \varnothing$.

В результате работы обнаружителя происходят следующие события:

1) $A_{00} \to H_0 \to \hat{H}_0$ - справедлива гипотеза H_0, принято решение $\hat{H}_0$;

2) $A_{01} \to H_0 \to \hat{H}_1$ - справедлива гипотеза H_0, принято решение $\hat{H}_1$;

3) $A_{10} \to H_1 \to \hat{H}_0$ - справедлива гипотеза H_1, принято решение $\hat{H}_0$;

4) $A_{11} \to H_1 \to \hat{H}_1$ - справедлива гипотеза H_1, принято решение $\hat{H}_1$.

Эти события происходят с вероятностями $\mathbf{P}\{A_{00}\}$, $\mathbf{P}\{A_{01}\}$, $\mathbf{P}\{A_{10}\}$, $\mathbf{P}\{A_{11}\}$, из которых $\mathbf{P}\{A_{00}\}$ и $\mathbf{P}\{A_{11}\}$ описывают вероятности правильных решений, которые хотелось бы увеличить, и $\mathbf{P}\{A_{01}\}$, $\mathbf{P}\{A_{10}\}$ описывают вероятности ошибочных решений, которые хотелось бы уменьшить. Т.о. качество работы обнаружителя описывается четырьмя параметрами, оптимизировать которые одновременно невозможно. Для получения оптимального алгоритма обнаружения необходимо перейти к единственному критерию качества.

Наиболее часто в теории РТС для построения оптимального решающего правила используется байесовская схема принятия решений. В результате применения этой схемы можно получить несколько критериев качества. Самый общий из них это **критерий байесовского риска.**

Сопоставим каждому событию $A_{i,j}$ в соответствия некие числа $R_{i,j}$ следующим образом: $A_{00} \to R_{00}$, $A_{01} \to R_{01}$, $A_{10} \to R_{10}$, $A_{11} \to R_{11}$. Эти числа в теории проверки статистических гипотез называются рисками (стоимостями, штрафами). При этом полагают, что риск, связанный с неверным принятием решения больше, чем риск, связанный с принятием правильного решения, т.е. $R_{01} > R_{00}, R_{10} > R_{11}$.

Поскольку события $A_{00}, A_{01}, A_{10}, A_{11}$ происходят с вероятностями $\mathbf{P}\{A_{00}\}$, $\mathbf{P}\{A_{01}\}$, $\mathbf{P}\{A_{10}\}$, $\mathbf{P}\{A_{11}\}$, то риски $R_{00}, R_{01}, R_{10}, R_{11}$ можно считать значениями дискретной случайной величины. В качестве критерия оптимизации в байесовской схеме используется средний риск $\overline{R}$, который является ничем иным как математическим ожиданием этой случайной величины и может быть получен в соответствии со следующим выражением

$$\overline{R} = R_{00}\mathbf{P}\{A_{00}\} + R_{01}\mathbf{P}\{A_{01}\} + R_{10}\mathbf{P}\{A_{10}\} + R_{11}\mathbf{P}\{A_{11}\}. \tag{2.1}$$

Используя статистическое описание механизма перехода выражение (2.1) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \overline{R} = R_{00}\mathbf{P}\{H_0\} \int_{G_0} p(x|H_0)dx + R_{01}\mathbf{P}\{H_0\} \int_{G_1} p(x|H_0)dx + \\ + R_{10}\mathbf{P}\{H_1\} \int_{G_0} p(x|H_1)dx + R_{11}\mathbf{P}\{H_1\} \int_{G_1} p(x|H_1)dx \end{aligned} \tag{2.2}$$

Оптимальный по критерию байесовского риска алгоритм обнаружения получается в результате минимизации среднего байесовского риска по всем всевозможным разбиениям пространства X на два непересекающихся подмножества G_0 и G_1.

Найдем искомое разбиение минимизируя выражение для $\overline{R}$, и учитывая, что $X = G_0 \cup G_1$ или $G_1 = X \setminus G_0$. Для этого перепишем (2.2.) в виде:

$$\overline{R} = R_{00}\mathbf{P}\{H_0\} \int_{G_0} p(x|H_0)dx + R_{01}\left[\mathbf{P}\{H_0\} \int_{X} p(x|H_0)dx - \mathbf{P}\{H_0\} \int_{G_0} p(x|H_0)dx\right] +$$

$$+ R_{10}\mathbf{P}\{H_1\} \int_{G_0} p(x|H_1)dx + R_{11}\left[\mathbf{P}\{H_1\} \int_{X} p(x|H_1)dx - \mathbf{P}\{H_1\} \int_{G_0} p(x|H_1)dx\right] =$$

$$= R_{01}\mathbf{P}\{H_0\} + R_{11}\mathbf{P}\{H_1\} +$$

$$+ \int_{G_0} \left[R_{00}p(x|H_0)\mathbf{P}\{H_0\} - R_{01}p(x|H_0)\mathbf{P}\{H_0\} + R_{10}p(x|H_1)\mathbf{P}\{H_1\} - R_{11}p(x|H_1)\mathbf{P}\{H_1\}\right]dx =$$

$$= R_{01}\mathbf{P}\{H_0\} + R_{11}\mathbf{P}\{H_1\} + \int_{G_0} \left[(R_{10} - R_{11})p(x|H_1)\mathbf{P}\{H_1\} - (R_{01} - R_{00})p(x|H_0)\mathbf{P}\{H_0\}\right]dx.$$

Рассмотрим множество G_0. Для того чтобы средний риск уменьшался при формировании элементов множества G_0 необходимо, чтобы это множество состояло из таких $x \in X$, для которых выражение под интегралом в последнем выражении было отрицательно, т.е. выполнялось следующее неравенство:

$$(R_{10} - R_{11}) p(x|H_1) \mathbf{P}\{H_1\} < (R_{01} - R_{00}) p(x|H_0) \mathbf{P}\{H_0\}.$$

Другими словами множество G_0 соответствующее оптимальному алгоритму приема можно определить как множество таких x, для которых выполняется следующее неравенство:

$$\frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} < \frac{(R_{01} - R_{00}) \mathbf{P}\{H_0\}}{(R_{10} - R_{11}) \mathbf{P}\{H_1\}}. \tag{2.3}$$

Таким образом, для того, чтобы проверить попадает ли сигнал x в область G_0 достаточно проверить выполнение данного неравенства. Очевидно, что если для принятого сигнала x это неравенство не выполняется, то $x \in G_1$ и следует принять решение в пользу обнаружения сигнала.

Оптимальный алгоритм обнаружения можно записать в виде

$$\Lambda(x) \overset{H_1}{\geq} \eta, \tag{2.4}$$

где, $\eta = \dfrac{(R_{01} - R_{00}) \mathbf{P}\{H_0\}}{(R_{10} - R_{11}) \mathbf{P}\{H_1\}}$ называется порогом обнаружителя;

$\Lambda(x) = \dfrac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)}$ называется **отношением правдоподобия**.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, оптимальный по критерию байесовского среднего риска алгоритм обнаружения сводится к вычислению по принятому сигналу x отношения правдоподобия $\Lambda(x)$ и сравнению полученного числа с порогом η. Если число больше порога η, то справедлива гипотеза H_1, в противном случае справедлива гипотеза H_0. Значение порога в данном обнаружителе выбирается исходя из априорных вероятностей и заданных заранее значений риска.В СТРТС встречаются в основном три разновидности случайных объектов.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что в СТРТС понимают под задачей обнаружения сигнала и как эта задача связана с задачей различения сигналов?
2. Как формулируется задача обнаружения сигналов в терминах задачи проверки статистических гипотез?
3. В чем суть байесовского подхода к проверке гипотез в задаче обнаружения сигнала?
4. Объясните, из каких соображений нужно выбирать значения коэффициентов риска при синтезе алгоритма обнаружения сигнала.
5. Что такое отношение правдоподобия и как оно используется в алгоритмах обнаружения сигналов?