ЛЕКЦИЯ №4. Критерии идеального наблюдателя, Неймана-Пирсона в задаче обнаружения. Оценка качества алгоритмов обнаружения. Рабочая характеристика обнаружителя.

Задавая различные значения коэффициентам риска можно получить различные критерии качества работы обнаружителя и соответственно различные оптимальные алгоритмы.

Критерий идеального наблюдателя возникает как частный случай критерия среднего риска в предположении, что $R_{00} = R_{11} = 0$, $R_{10} = R_{10} = 1$. В результате алгоритм обнаружения имеет вид

$$\Lambda(x) \overset{H_1}{\geq} \eta = \frac{\mathbf{P}\{H_0\}}{\mathbf{P}\{H_1\}}. \tag{2.5}$$

Средний риск в соответствии с (2.1) $\overline{R} = \mathbf{P}\{A_{01}\} + \mathbf{P}\{A_{10}\}$ равен полной вероятности ошибки. Т.е. критерий идеального наблюдателя приводит к алгоритму, обеспечивающему минимальное значение полной вероятности ошибки. В отечественной литературе критерий идеального наблюдателя называют **критерием Котельникова**.

В РТС передачи двоичных сообщений часто $\mathbf{P}\{H_1\} = \mathbf{P}\{H_0\} = \frac{1}{2}$. Решающее правило в этом случае имеет вид

$$\Lambda(x) \overset{H_1}{\geq} \eta = 1. \tag{2.6}$$

Все выше рассмотренные критерии и соответствующие решающие правила учитывали априорную статистическую информацию о наличии или отсутствии цели, т.е. порог обнаружителя задавался с учетом вероятностей $\mathbf{P}\{H_1\}, \mathbf{P}\{H_0\}$.

На практике часто эти вероятности недоступны. Одним из эффективных способов преодоления этой проблемы является использование **критерия Неймана – Пирсона.** При работе обнаружителя в реальных условиях его качество работы описывается вероятностями событий $A_{00}, A_{01}, A_{10}, A_{11}$.

В радиолокации при описании работы РЛС обнаружения целей для каждой вероятности этих событий используются следующие термины: $p_{по} = \mathbf{P}\{A_{11}\}$ - вероятность правильного обнаружения цели; $p_{лт} = \mathbf{P}\{A_{01}\}$ - вероятность ложной тревоги; $p_{пц} = \mathbf{P}\{A_{10}\}$ - вероятность пропуска цели; $p_{пн} = \mathbf{P}\{A_{00}\}$ - вероятность правильного необнаружения цели. При этом, очевидно, что $p_{по} + p_{пц} = 1$, $p_{пн} + p_{лт} = 1$. Т.о. качество работы обнаружителя полностью характеризуется двумя вероятностями, например $p_{пц}$ и $p_{лт}$.

В соответствии с критерием Неймана – Пирсона необходимо искать минимум $p_{пц}$ при фиксированном значении $p_{лт}$, т.е.

$$\textit{алгоритм обнаружения} = \min_{G_0} p_{пц}, \text{ при } p_{лт} = \alpha$$

Эта задача является задачей на условный экстремум. Она решается с помощью множителей Лагранжа, которые позволяют перейти к задаче на безусловный экстремум вида

$$\text{алгоритм обнаружения} = \min_{G_0}\left(p_{пц} + \lambda \cdot p_{лт}\right),$$

где λ - множитель Лагранжа, который определяется по уравнению условия

$$\int_{G_0(\lambda)} p\left(x \middle| H_0\right) dx = \alpha .$$

Тогда

$$\min_{G_0}\left[1 - \int_{G_0} p\left(x \middle| H_1\right) dx + \lambda \int_{G_0} p\left(x \middle| H_0\right) dx\right] = \min_{G_0}\left[1 - \int_{G_0}\left[\lambda \cdot p\left(x \middle| H_0\right) - p\left(x \middle| H_1\right)\right] dx\right].$$

Из последнего выражения очевидно, что оптимальная область G_0 определяется условием на $x \in G_0$ в виде неравенства $\lambda \cdot p\left(x \middle| H_0\right) > p\left(x \middle| H_1\right)$. Следовательно, алгоритм обнаружения по критерию Неймана – Пирсона является частным случаем байесовского алгоритма (2.4) при $\eta = \lambda$. Значение множителя Лагранжа определяется из условия на вероятность ложных тревог в виде

$$\int_{\lambda}^{+\infty} p\left(\Lambda \middle| H_0\right) d\Lambda = \alpha , \qquad (2.7)$$

где Λ - случайное значение отношения правдоподобия, $p\left(\Lambda \middle| H_0\right) d\Lambda$ - плотность вероятности отношения правдоподобия при условии справедливости гипотезы H_0.

<u>Пример 2.1.</u>

Рассмотрим пример нахождения оптимального байесовского решающего правила обнаружения дискретного сигнала, прошедшего канал с аддитивным гауссовым шумом.

На входе канала присутствует сигнал вида

$$s(t) = \begin{cases} A, & t \in [0, T] \\ 0, & t \notin [0, T] \end{cases}.$$

На выходе канала наблюдается сигнал

$$x(t) = \theta \cdot s(t) + n(t).$$

Здесь $\theta = 1$, если справедлива гипотеза H_1 и $\theta = 0$ если справедлива гипотеза H_0, $n(t)$ - реализация квазибелого гауссовского шума.

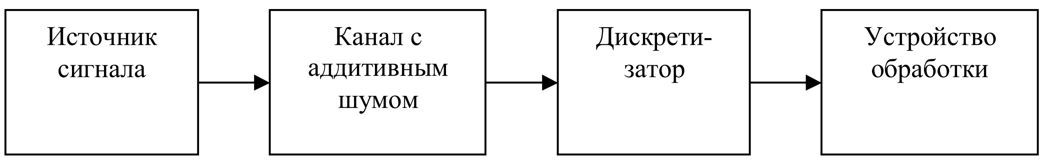

Рис.2.2.

На выходе дискретизатора наблюдаются отсчеты сигнала $x(t)$ $\mathbf{x} = \left(x_1, \ldots x_n\right)^T$, каждый из которых

$$x_i = \theta \cdot s(\Delta t \cdot i) + n(\Delta t \cdot i) = \theta \cdot A + n_i ,$$

где $\Delta t = \dfrac{1}{2F}$ - интервал дискретизации, F- максимальная частота энергетического спектра квазибелого шума, n_i - отсчеты шума, $i = 1,...,n$.

Т.к. в рассматриваемом случае отсчеты шума дискретизированы с частотой Котельникова, то они некоррелированы и вследствие гауссовости независимы, имеют нулевое математическое ожидание и дисперсию σ^2. Функции плотности вероятности $p(\mathbf{x}|H_1)$ и $p(\mathbf{x}|H_0)$ могут быть представлены в виде

$$p(\mathbf{x}|H_1) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{i=n}(x_i - A)^2\right),$$

$$p(\mathbf{x}|H_0) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{i=n}(x_i)^2\right). \qquad (2.8)$$

Т.о. отношение правдоподобия

$$\Lambda(\mathbf{x}) = \exp\left(\frac{1}{2\sigma^2}\left(2A\sum_{i=1}^{i=n}x_i - nA^2\right)\right).$$

Неравенство (2.4) можно записать в виде

$$z = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n}x_i \overset{H_1}{\geq} \frac{\sigma^2 \ln(\eta)}{An} + \frac{A}{2} = z_0. \qquad (2.9)$$

Величина в левой части неравенства является выборочным средним наблюдаемых отсчетов сигнала и является достаточной статистикой. Значение порога η зависит от выбранного критерия. Устройство обработки для обнаружения сигнала должно вычислить выборочное среднее наблюдаемых отсчетов сигнала и сравнить его с величиной в правой части неравенства (2.9).

Определим теперь характеристика качества полученного обнаружителя. Для этого достаточно вычислить $p_{пц}$ и $p_{лт}$.

$$p_{пц} = \int_{-\infty}^{z_0} p(z|H_1)dz, \qquad p_{лт} = \int_{z_0}^{-\infty} p(z|H_0)dz \qquad (2.10)$$

В соответствии с (2.9) *z* является суммой гауссовых случайных величин.

В случае, когда справедлива гипотеза H_0 $\mathbf{M}\{z\} = 0$, $\mathbf{D}\{z\} = \dfrac{\sigma^2}{n}$, функция плотности вероятности имеет вид

$$p(z|H_0) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{n}{2\sigma^2}z^2\right).$$

Если справедлива гипотеза H_1 $\mathbf{M}\{z\} = \dfrac{A}{n}$, $\mathbf{D}\{z\} = \dfrac{\sigma^2}{n}$, функция плотности вероятности

$$p(z|H_1)=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{n}{2\sigma^2}\left(z-\frac{A}{2}\right)^2\right).$$

Подставляя полученные выражения в (2.10) получим:

$$p_{пц}=\mathrm{erf}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(z_0-\frac{A}{2}\right)\right), \tag{2.11}$$

$$p_{лт}=1-\mathrm{erf}\left(\frac{\sqrt{n}z_0}{\sigma}\right), \tag{2.12}$$

где $\mathrm{erf}(x)$ - функция ошибок, определенная в виде

$$\mathrm{erf}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\exp\left(-\frac{v^2}{2}\right)dv. \tag{2.13}$$

Зависимость $p_{пц}$ или $p_{по}$ от вероятности $p_{лт}$ называется рабочей характеристикой обнаружителя. Пример рабочей характеристики показан на Рис.2.3 для случая, когда $\frac{A\sqrt{n}}{2\sigma}=1.5$, $z_0\in(-\infty,+\infty)$.

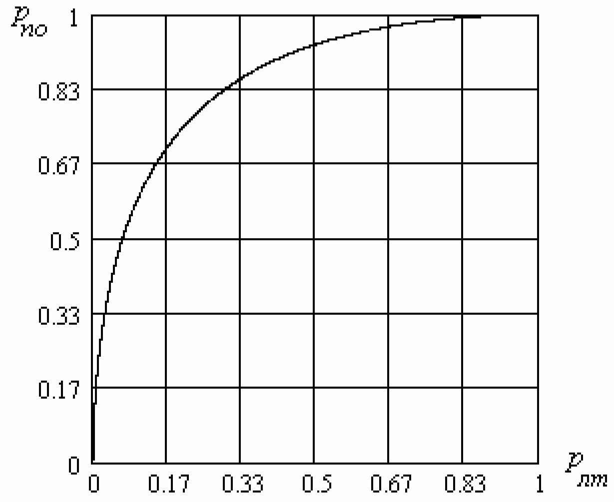

Рис.2.3. Пример рабочей характеристики обнаружителя.

Рабочие параметры обнаружителя задаются точкой на рабочей характеристике, соответствующей фиксированному значению порога. Вид **рабочей характеристики** определяется моделью взаимодействия сигнала с помехами, уровнем помех, выбранной схемой обнаружителя, наличием, у обнаруживаемого сигнала мешающих случайных параметров.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Задавая различные значения коэффициентам байесовского риска можно получить различные оптимальные алгоритмы обнаружения. При этом некоторые из них не требуют априорного знания вероятности наличия или отсутствия сигнала в наблюдаемой смеси. Рабочая характеристика обнаружителя позволяет определить вероятности правильного обнаружения и ложной тревоги в зависимости от выбранного критерия оптимальности обнаружителя.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. К минимизации какой характеристики обнаружителя приводит критерий идеального наблюдателя?
2. В чем суть критерия Неймана-Пирсона?
3. Что такое рабочая характеристика обнаружителя и как по ней определяются вероятности правильного обнаружения и ложной тревоги конкретного обнаружителя?
4. Какой вид имеет рабочая характеристика «идеального» обнаружителя?