ЛЕКЦИЯ №5. Теория различения сигналов. Оптимальное байесовское правило различения сигналов. Правило максимума апостериорной вероятности. Правило максимума правдоподобия. Различение сигналов со случайными параметрами.

Задача различения M сигналов – это задача нахождения алгоритма или правила оптимального принятия решения о наличии одного из M возможных сигналов в принятом колебании. Задача обнаружения относится к частному случаю задачи различения, когда M=2, а один из различаемых сигналов равен нулю.

Рис.2.4. Задача различения сигналов.

Источник сигнала порождает одну из точек $s_1,s_2,\ldots,s_M$ в пространстве передаваемых сигналов **S.** Наблюдаемый на входе обнаружителя сигнал x принадлежит пространству наблюдаемых (входных) сигналов $\mathbf{X}$.

В зависимости от вида пространства наблюдаемых сигналов принятый сигнал x и передаваемый s могут быть элементами множества вещественных **R** или комплексных чисел **C,** n-мерных пространств $\mathbf{R}^n$ или $\mathbf{C}^n$, функционального пространства **L**.

Для описания процесса отображения $\mathbf{S} \to \mathbf{X}$ используются следующие вероятностные характеристики задачи:

H_i - гипотеза о наличии сигнала s_i в принятом сигнале x;

$p(x|H_i)$ - функционал плотности вероятности наблюдаемого сигнала x при условии, что справедлива гипотеза H_i;

$\mathbf{P}\{H_i\}$ - априорная вероятность наличия сигнала s_i на выходе источника.

$\hat{H}_k$ - принятое решающим устройством решение.

Пространство наблюдаемых сигналов X разбито на М непересекающихся подмножеств $G_1,\ldots,G_M$. Алгоритм принятия решений определяет номер подмножества, в котором оказался принятый сигнал x. Этот номер далее отождествляется с номером переданного сигнала. С этой точки зрения оптимальный алгоритм различения это разбиение пространства X на подмножества $G_1,\ldots,G_M$, при котором обеспечивается оптимум заданного критерия качества.

Обобщая рассуждения об оптимальном алгоритме принятия решений в задаче обнаружения, рассмотрим M событий $\{A_{ij}\}_{i=1\ldots M,\, j=1\ldots M}$ возникающих при работе различителя. Для каждого из события $\{A_{ij}\}$ задается соответствующий ему риск R_{ij}. В качестве критерия оптимальности в байесовских процедурах рассматривается средний риск, который определяется по формуле

$$\overline{R}=\sum_{i=1}^{M}\sum_{i=1}^{M}R_{ij}\mathbf{P}\{A_{ij}\}=\sum_{i=1}^{M}\sum_{i=1}^{M}R_{ij}\mathbf{P}\{H_i\}\int\limits_{G_j}p(x|H_i)dx\,. \tag{2.14}$$

Найдем оптимальный алгоритм различения M сигналов, перебирая все возможные разбиения $G_1,\ldots,G_M$ и выбирая то из них, которое дает минимальное значение среднего риска $\overline{R}$. Для этого перепишем выражение (2.14) в виде

$$\begin{gathered}\overline{R}=\int\limits_{G_1}\sum_{i=1}^{M}R_{i1}\mathbf{P}\{H_i\}p(x|H_i)dx+\int\limits_{G_2}\sum_{i=1}^{M}R_{i2}\mathbf{P}\{H_i\}p(x|H_i)dx+\\+\ldots+\int\limits_{G_M}\sum_{i=1}^{M}R_{iM}\mathbf{P}\{H_i\}p(x|H_i)dx.\end{gathered} \tag{2.15}$$

При выборе оптимального разбиения необходимо обеспечить минимальное значение положительного приращения соответствующего интеграла в (2.15). Таким образом, подмножество G_1, например, будет состоять из таких x, для которых выполняется следующее неравенство

$$\sum_{i=1}^{M}R_{i1}p(x|H_i)\mathbf{P}\{H_i\}<\sum_{i=1}^{M}R_{il}p(x|H_i)\mathbf{P}\{H_i\},\quad l=2,3,\ldots,M\,. \tag{2.16}$$

Множество G_k соответственно состоит из таких x, для которых выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^{M}R_{ik}p(x|H_i)\mathbf{P}\{H_i\}\le\sum_{i=1}^{M}R_{il}p(x|H_i)\mathbf{P}\{H_i\},\quad l=1\ldots M\,. \tag{2.17}$$

Так как алгоритм приема сводится к определению такого множества G_k, в которое попал принятый сигнал x, то алгоритм различения сигналов оптимальный по критерию минимума среднего байесовского риска можно записать в виде

$$\hat{k}=\arg\min_{l}\sum_{i=1}^{M}R_{il}\mathbf{P}\{H_i\}p(x|H_i). \tag{2.18}$$

Алгоритм различения M сигналов оптимальный по критерию идеального наблюдателя (критерий Котельникова) является частным случаем (2.18) при функции риска вида:

$$R_{ij}=\begin{cases}0, & i=l,\\ 1, & i\ne l.\end{cases} \tag{2.19}$$

Подставляя (2.19) в (2.18) получим

$$\hat{k}=\arg\min_{l}\sum_{\substack{i=1\\ i\ne l}}^{M}\mathbf{P}\{H_i\}p(x|H_i)=\arg\min_{l}\sum_{i=1}^{M}\left[\mathbf{P}\{H_i\}p(x|H_i)-\mathbf{P}\{H_l\}p(x|H_l)\right]=$$

$$=\arg\min_{l}\left[P(x)-\mathbf{P}\{H_l\}p(x|H_l)\right]=\arg\max_{l}\mathbf{P}\{H_l\}p(x|H_l)=\arg\max_{l}P(x)p(H_l|x).$$

$$\hat{k}=\arg\max_{l}p(H_l|x) \tag{2.20}$$

Алгоритм (2.20) называется **алгоритмом максимума апостериорной вероятности** (МАВ). Полученный алгоритм выбирает такую гипотезу H_l, которая имеет максимальную вероятность при условии, что принят сигнал $x \in X$. Средний риск в данном случае тождественно равен полной вероятности ошибки.

$$\overline{R} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{M} \sum_{j=1}^{M} \mathbf{P}\{A_{ij}\} = P_{ош}$$

Если дополнительно к условию (2.19) априорные вероятности появления сигналов на выходе источника равны, т.е. $\mathbf{P}\{H_l\} = \dfrac{1}{M}$ то получим алгоритм различения в виде

$$\hat{l} = \arg\max_{l} \mathbf{P}\{H_l\} p(x|H_l) = \arg\max_{l} p(x|H_l). \qquad (2.20)$$

$p(x|H_l)$ - плотность вероятности наблюдаемого сигнала x, при условии справедливости гипотезы H_l. Эту плотность часто называют функцией или **функционалом правдоподобия**, а алгоритм (2.20) **алгоритмом максимального правдоподобия** (МП). Алгоритм МП выбирает ту гипотезу о переданном сигнале, которая обеспечивает максимум вероятности наблюдаемой реализации.

Все рассмотренные выше алгоритмы приема требуют для своей реализации знания априорного распределения, т.е. $\{\mathbf{P}\{H_i\}\}_{i=1\ldots M}$. Как и в задаче обнаружения, отсутствие информации об априорном распределении приводит к ситуации, которая называется априорной проблемой. В задаче обнаружения эта проблема решалась с помощью критерия Неймана – Пирсона. К сожалению, обобщение критерия Неймана – Пирсона для задачи различения невозможно. Поэтому при решении задачи различения иногда используют критерий, который называют **критерием минимакса**. В рамках этого критерия алгоритм различения строится как минимум байесовского риска в худшем случае относительно априорного распределения, т.е.

$$\hat{l} = \arg\min_{l} \max_{\{\mathbf{P}\{H_k\}\}} \sum_{i=1}^{M} R_{ij} \mathbf{P}\{H_i\} p(x|H_i). \qquad (2.21)$$

Рассмотрим случай, когда различаемые сигналы имеют несколько неизвестных на приемной стороне параметров, являющихся случайными величинами $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. В этом случае сигнал на выходе источника можно записать в виде

$$s_i = s_i(t, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n).$$

В этом случае функционалы правдоподобия и апостериорной вероятности будут иметь неопределенные параметры $p(H_i|x, \boldsymbol{\lambda})$ $p(x|H_i, \boldsymbol{\lambda})$. Если имеется информация о вероятностных распределениях неопределенных параметров, то соответствующие функционалы правдоподобия и апостериорной вероятности для построения оптимального алгоритма могут быть получены в следующем виде:

$$p(H_i|x)=\int\limits_{\boldsymbol{\lambda}} p(H_i|x,\boldsymbol{\lambda})\mathbf{P}\{\boldsymbol{\lambda}\}d\boldsymbol{\lambda},$$

$$p(x|H_i)=\int\limits_{\vec{\lambda}} p(x|H_i,\boldsymbol{\lambda})\mathbf{P}\{\boldsymbol{\lambda}\}d\boldsymbol{\lambda}, \qquad (2.22)$$

где $\mathbf{P}\{\boldsymbol{\lambda}\}$ - функционал плотности вероятности вектора неопределенных параметров. В качестве неопределенных параметров в реальных радиотехнических системах часто фигурируют начальная фаза сигнала, амплитудный коэффициент, частотный сдвиг, временная задержка сигнала и т.д.

<u>Пример 2.2.</u>

Рассмотрим пример нахождения оптимального алгоритма различения дискретного сигнала, прошедшего канал с аддитивным гауссовым шумом. На входе канала присутствуют сигналы вида

$$s_1(t)=\begin{cases}A, & t\in[0,T]\\ 0, & t\notin[0,T]\end{cases},\quad s_2(t)=\begin{cases}-A, & t\in[0,T]\\ 0, & t\notin[0,T]\end{cases}.$$

На выходе канала наблюдается сигнал

$$x(t)=\theta\cdot s_1(t)+(1-\theta)s_2(t)+n(t).$$

где $\theta=1$, если справедлива гипотеза H_1 и $\theta=0$ если справедлива гипотеза H_2, $n(t)$ - реализация квазибелого гауссовского шума.

На выходе дискретизатора (Рис.2.2.) наблюдаются отсчеты сигнала $x(t)$ $\mathbf{x}=(x_1,...x_n)^T$, каждый из которых

$$x_i=\theta\cdot s(\Delta t\cdot i)+(1-\theta)s_2(\Delta t\cdot i)+n(\Delta t\cdot i)=\theta\cdot A+(\theta-1)A+n_i,$$

где $\Delta t=\dfrac{1}{2F}$ - интервал дискретизации, F- максимальная частота пропускания канала, n_i - отсчеты шума, $i=1,...,n$. В рассматриваемом случае отсчеты шума независимы, имеют нулевое математическое ожидание и дисперсию σ^2. Функции плотности вероятности $p(\mathbf{x}|H_1)$ и $p(\mathbf{x}|H_2)$ могут быть представлены в виде

$$p(\mathbf{x}|H_1)=\left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{n}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{i=n}(x_i-A)^2\right),$$

$$p(\mathbf{x}|H_2)=\left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{n}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{i=n}(x_i+A)^2\right).$$

Алгоритм принятия решений, оптимальный по критерию Котельникова имеет вид

$$p(\mathbf{x}|H_1)\overset{H_1}{\geq} p(\mathbf{x}|H_2),$$

$$s=\sum_{i=1}^{i=n}x_i\overset{H_1}{\geq}0.$$

Устройство обработки для различения сигналов должно вычислить знак суммы наблюдаемых отсчетов сигнала.

Определим теперь характеристики качества полученного различителя, для случая равновероятных сигналов. Для этого вычислим $p_{ош}$ в виде

$$p_{ош} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} p(s|H_1)ds + \frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} p(s|H_2)ds.$$

В соответствии с алгоритмом различения s является суммой гауссовых случайных величин. В случае, когда справедлива гипотеза H_1 $\mathbf{M}\{s\} = nA$, $\mathbf{D}\{s\} = n\sigma^2$, функция плотности вероятности имеет вид

$$p(s|\ H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2n\sigma^2}(s - nA)^2\right).$$

Если справедлива гипотеза H_2 $\mathbf{M}\{s\} = -nA$, $\mathbf{D}\{s\} = n\sigma^2$, функция плотности вероятности

$$p(s|\ H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2n\sigma^2}(s + nA)^2\right).$$

Подставляя полученные выражения в выражение для вероятности ошибки, получим

$$p_{ош} = \mathrm{erf}\left(-\sqrt{n}\frac{A}{\sigma}\right).$$

Зависимость полной вероятности ошибки от отношения сигнал-шум различителя показана на Рис.2.5.

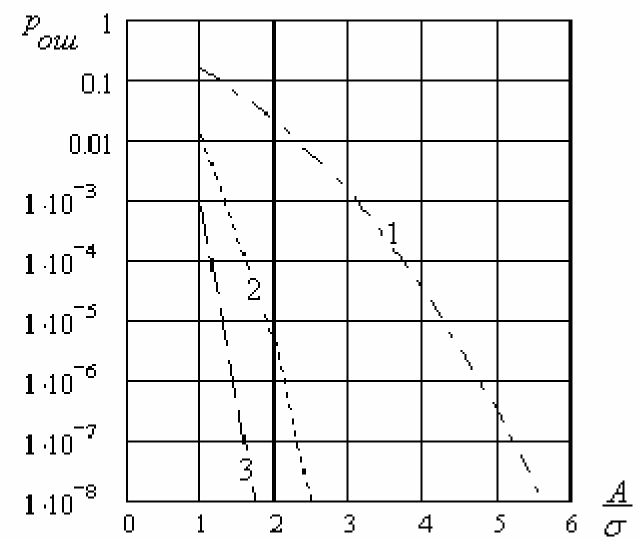

Рис.2.5. Зависимость $p_{ош}$ от отношения сигнал-шум, при 1) $n = 1$, 2) $n = 5$, 3) $n = 10$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Оптимальное байесовское правило различения сигналов на приеме сводится к выбору гипотезы, минимизирующей функционал среднего риска. Правило максимума апостериорной вероятности является частным случаем байесовского правила различения при одинаковых значениях риска для неправильных решений и нулевых для правильных. Правило максимума правдоподобия дополнительно предполагает априорную равновероятность различаемых сигналов.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что в СТРТС понимают под задачей различения сигналов?
2. Как формулируется задача различения сигналов в терминах задачи проверки статистических гипотез?
3. В чем суть алгоритма максимума апостериорной вероятности в задаче различения сигналов?
4. В каком случае алгоритм максимума апостериорной вероятности сводится к алгоритму максимального правдоподобия?
5. В каких случаях при решении задачи различения применяется алгоритм, основанный на критерии минимакса?