ЛЕКЦИЯ №6. Алгоритмы и устройства оптимального обнаружения и различения сигналов на фоне БГШ. Оптимальный прием детерминированного сигнала. Структурная схема когерентного обнаружителя и различителя. Коррелятор и согласованный фильтр. Потенциальная помехоустойчивость когерентного обнаружителя.

2.3. АЛГОРИТМЫ И УСТРОЙСТВА ОПТИМАЛЬНОГО ОБНАРУЖЕНИЯ И РАЗЛИЧЕНИЯ СИГНАЛОВ

2.3.1. Обнаружение детерминированного сигнала

Рассмотрим задачу обнаружения полностью известного сигнала $s(t)$ на фоне аддитивного белого гауссовского шума. Эту задачу называют также **задачей когерентного приема**. В этом случае наблюдаемый сигнал можно записать в виде

$$x(t) = \theta \cdot s(t) + n(t),$$

где $\theta = 1$, если справедлива гипотеза H_1 и $\theta = 0$ если справедлива гипотеза H_0, $n(t)$ - реализация белого гауссовского шума. H_1- гипотеза о наличии сигнала, H_0- гипотеза об отсутствии сигнала.

В соответствии с общим методом (2.4) для нахождения алгоритма обнаружения необходимо найти отношение правдоподобия $\Lambda(x)$.

Найдем функционал плотности вероятности $p(x|H_0)$, $x \in \mathbf{L}_2[0,T]$. В этом случае $x(t) = n(t)$. Тогда

$$p(x|H_0) = c \cdot \exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T x^2(t)dt\right\}, \qquad (2.23)$$

где c - константа, а x - функция времени.

Найдем функционал плотности вероятности $p(x|H_1)$, $x \in \mathbf{L}_2[0,T]$. В этом случае $x(t) = s(t) + n(t)$. Тогда

$$p(x|H_1) = c \cdot \exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T (x(t) - s(t))^2 dt\right\}. \qquad (2.24)$$

Отношение правдоподобия запишется в виде:

$$\Lambda(x) = \frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} = \exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T \left(x^2(t) - 2x(t)s(t) + s^2(t)\right)dt + \frac{1}{N_0}\int_0^T x^2(t)dt\right\} =$$

$$= \exp\left\{\frac{2}{N_0}\int_0^T x(t)s(t)dt - \frac{1}{N_0}\int_0^T s^2(t)dt\right\}$$

Введем обозначения:

$E_s = \int_0^T s^2(t)dt$ - энергия сигнала;

$Z = \int_0^T x(t)s(t)dt$ - скалярное произведение сигналов в $\mathbf{L}_2[0,T]$, которое будем называть также **корреляционным интегралом**.

Алгоритм обнаружения примет вид

$$\Lambda(x) = \exp\left\{\frac{2Z - E_s}{N_0}\right\} \overset{H_1}{\geq} \eta, \qquad (2.25)$$

где η - порог, зависящий от выбранного критерия (2.4).

Так как функция $\exp(\bullet)$ - монотонная, то (2.25) можно записать в виде

$$Z \overset{H_1}{\geq} \frac{N_0}{2}\ln(\eta) + \frac{E_s}{2} = Z_0, \qquad (2.26)$$

Структурная схема аналогового приемника, соответствующего правилу (2.26) представлена на Рис.2.5. Поскольку приемник в процессе принятия решений вычисляет корреляционный интеграл, то он называется **корреляционным приемником**. Часть схемы до устройства сравнения, вычисляющая значение корреляционного интеграла называют также **коррелятором**.

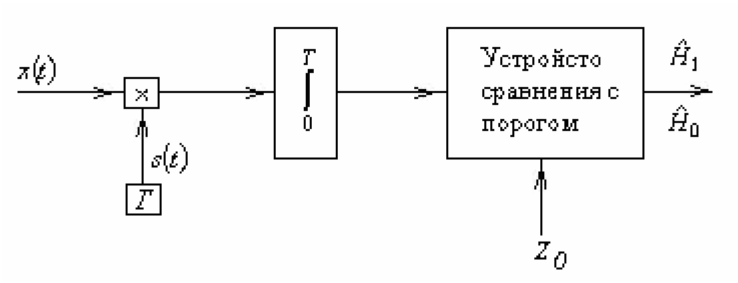

Рис.2.6. Структурная схема корреляционного приемника.

При реализации корреляционного приемника в виде аналогового устройства часто применяют другую схемную реализацию, в основе которой пассивная электрическая цепь – фильтр. Любой фильтр, у которой на входе сигнал $x(t)$, а на выходе сигнал $y(t)$ может быть описан интегралом свертки

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \qquad (2.27)$$

где $h(t)$ - импульсная характеристика фильтра.

Значение корреляционного интеграла Z можно сформировать как отсчет в момент времени $t = T$ на выходе фильтра, импульсная характеристика которого $h(t) = s(T-t)$. Такой фильтр в радиотехнике называют **согласованным фильтром (**СФ**)**.

Структурная схема обнаружителя на основе согласованного фильтра показана на следующем рисунке.

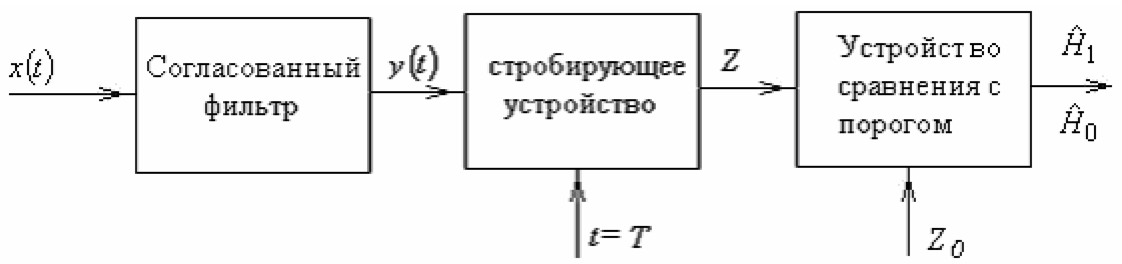

Рис.2.7. Структурная схема приемника.

Преимущества данной схемы заключается в том, что она не содержит активных элементов, а это преимущество при реализации в аналоговом виде. С другой стороны недостаток данной схемы заключается в том, что при перестройке обнаружителя к другому виду сигнала необходим другой СФ. При реализации оптимального обнаружителя в виде цифрового устройства схема с согласованным фильтром полностью эквивалентна схеме с СФ.

СФ – устройство, часто применяемое в радиотехнике. Рассмотрим некоторые полезные свойства СФ:

1. Отношение сигнал-шум на выходе согласованного фильтра для сигнала, с которым он согласован максимально возможное среди всех линейных фильтров.

Действительно пусть на входе фильтра наблюдается сигнал вида

$$x(t)=\begin{cases} s(t)+n(t), & t\in[0,T] \\ 0, & t\notin[0,T] \end{cases}.$$

Мгновенная мощность сигнала на выходе СФ в момент времени $t=T$

$$P_s=|y_s(T)|^2=\left|\int_{-\infty}^{+\infty}s(t)h(T-t)dt\right|^2.$$

Найдем среднею мгновенную мощность шума на выходе СФ

$$P_n=\mathbf{M}\left\{|y_n(T)|^2\right\}=\mathbf{M}\left\{\left|\int_{-\infty}^{+\infty}n(t)h(T-t)dt\right|^2\right\}=$$

$$=\mathbf{M}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}n(t_1)h(T-t_1)n^*(t_2)h^*(T-t_2)dt_1dt_2\right\}=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{M}\left\{n(t_1)n^*(t_2)\right\}h(T-t_1)h^*(T-t_2)dt_1dt_2=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{N_0}{2}\delta(t_2-t_1)h(T-t_1)h^*(T-t_2)dt_1dt_2=$$

$$=\frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}|h(T-t)|^2\,dt.$$

Отношение сигнал-шум на выходе СФ

$$\frac{P_s}{P_n} = \frac{\left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} s(t) h(T-t) dt \right|^2}{\frac{N_0}{2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |h(T-t)|^2 dt}. \qquad (2.28)$$

Используя известное неравенство Буняковского-Шварца $|(\mathbf{x},\mathbf{y})|^2 \le \|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2$, получим

$$\frac{P_s}{P_n} \le \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |h(T-t)|^2 dt \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt}{\frac{N_0}{2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |h(T-t)|^2 dt} = \frac{2E_s}{N_0}. \qquad (2.29)$$

Максимальное значение отношения сигнал-шум на выходе СФ достигается только если $h(t) = qs(T-t)$, где q – константа.

2. Выигрыш в отношении сигнал-шум согласованного фильтра равен базе сигнала.

В соответствии с (2.29) отношение сигнал-шум на выходе СФ в случае, когда на входе сигнал с которым фильтр согласован

$$\left[\frac{P_s}{P_n}\right]_{вых} = \frac{2E_s}{N_0}.$$

На входе СФ отношение сигнал-шум

$$\left[\frac{P_s}{P_n}\right]_{вх} = \frac{E_s}{T} \frac{1}{N_0 F}.$$

Выигрыш в отношении сигнал-шум согласованного фильтра

$$g = \frac{\left[\frac{P_s}{P_n}\right]_{вых}}{\left[\frac{P_s}{P_n}\right]_{вх}} = 2FT. \qquad (2.30)$$

3. Если на входе согласованного фильтра сигнал, с которым он согласован, то на его выходе наблюдается автокорреляционная функция этого сигнала. Действительно

$$y(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) s(T+\tau-t) d\tau = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} s(\tau) s(T+\tau-t) d\tau.$$

4. Передаточная функция согласованного фильтра имеет вид

$$\begin{aligned} K(j\omega) &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} h(t) \exp(-j\omega t) dt = q \int\limits_{-\infty}^{+\infty} s(T-t) \exp(-j\omega t) dt = \\ &= q s^*(j\omega) \exp(-j\omega T). \end{aligned} \qquad (2.31)$$

Рассмотрим теперь вопрос о потенциальной помехоустойчивости когерентного обнаружителя. Определим рабочую характеристику когерентного обнаружителя. Пусть справедлива гипотеза H_0. В этом случае значение корреляционного интеграла определяется в виде

$$Z = \int_0^T n(t)s(t)dt,$$

где $n(t)$- это реализация белого гауссовского шума. Это означает, что Z- гауссовская случайная величина, для описания которой необходимо знать только ее математическое ожидание и дисперсию. Найдем эти характеристики:

$$\mathbf{M}\{Z\} = \int_0^T \mathbf{M}\{n(t)\}s(t)dt = 0,$$

$$\mathbf{D}\{Z\} = \mathbf{M}\left\{(Z - \mathbf{M}\{Z\})^2\right\} = \mathbf{M}\left\{\int_0^T\int_0^T n(t_1)n(t_2)s(t_1)s(t_2)dt_1dt_2\right\} =$$
$$= \int_0^T \frac{N_0}{2}s^2(t)dt = \frac{N_0E_s}{2}. \qquad (2.32)$$

Т.о.

$$p(Z|H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\left(\frac{N_0E_s}{2}\right)}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{Z^2}{\left(\frac{N_0E_s}{2}\right)}\right\}.$$

Вероятность ложной тревоги определим как

$$p_{лт} = \int_{Z_0}^{+\infty} p(Z|H_0)dz = \int_{\frac{\sqrt{2}Z_0}{\sqrt{N_0E_s}}}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = 1 - \mathrm{erf}\left(\frac{Z_0}{\sqrt{\frac{N_0E_s}{2}}}\right) = 1 - \mathrm{erf}(h), \qquad (2.33)$$

где $h = \frac{Z_0}{\sqrt{\frac{N_0E_s}{2}}}$ - модифицированный порог.

Пусть теперь справедлива гипотеза H_1. Тогда

$$Z = \int_0^T (s(t) + n(t))\cdot s(t)dt.$$

Т.к. $s(t)$ - детерминированный сигнал, то Z- гауссовская случайная величина, для которой

$$\mathbf{M}\{Z\} = \int_0^T s^2(t)dt = E_s,$$

$$\mathbf{D}\{Z\} = \frac{N_0 E_s}{2}.$$

$$p(Z \mid H_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\left(\frac{N_0 E_s}{2}\right)}} e^{-\frac{(Z-E_s)^2}{2\left(\frac{N_0 E_s}{2}\right)}}.$$

Вероятность пропуска цели

$$p_{пц} = \int_{-\infty}^{Z_0} p(Z|H_1)dz = \int_{-\infty}^{\frac{Z_0 - E_s}{\sqrt{\frac{N_0 E_s}{2}}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = erf\left(h - \sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}\right) = \mathrm{erf}(h-q), \quad (2.34)$$

где $q = \sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}$ - коэффициент различимости.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Оптимальный прием детерминированного сигнала на фоне БГШ сводится к сравнению с порогом корреляционного интеграла, вычисляемого коррелятором. Коррелятор может быть реализован пассивной цепью в виде согласованного фильтра. Потенциальная помехоустойчивость когерентного обнаружителя определяется отношением сигнал-шум и порогом.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. В чем отличие задачи когерентного от задачи некогерентного приема?
2. Что такое корреляционный приемник?
3. Что такое согласованный фильтр и как он применяется при построении схемы обнаружителя детерминированного сигнала?
4. Перечислите основные свойства согласованного фильтра.