

Метрические пространства

Пространство — множество, обладающее некоторой структурой.

Действительное число, характеризующее расстояние между парой элементов — метрика

а) $d(x, y) \geq 0$ и $d(x, y) = 0$, только если $x = y$;

б) $d(x, y) = d(y, x)$;

в) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Множество X с метрикой d называется *метрическим пространством* (X, d) .

Для $x, y \in R^n$ или $x, y \in C^n$, где $x = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ и $y = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$:

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |\alpha_i - \beta_i|$$

$$d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |\alpha_i - \beta_i|^2}$$

Для множества функций времени

$$d_1(x, y) = \int_T |x(t) - y(t)| dt$$

$$d_2(x, y) = \sqrt{\int_T |x(t) - y(t)|^2 dt}$$

Линейные пространства

Для любых $x, y \in M$ существует $x + y \in M$ такое, что

$$A.1) \quad x + y = y + x$$

$$A.2) \quad x + (y + z) = (x + y) + z$$

$$A.3) \quad x + 0 = x$$

$$A.4) \quad x + (-x) = 0$$

$$B.1) \quad \alpha(\beta x) = \alpha\beta x$$

$$B.2) \quad 1x = x \text{ и } 0x = 0$$

$$B.3) \quad \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$$

$$B.4) \quad (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$$

Линейная комбинация

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{x}_i$$

Множество векторов $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$ называется *линейно независимым*, если $\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{x}_i = \mathbf{0}$ только при всех α_i , равных нулю.

Нормированные линейные пространства

1. $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ и $\|\mathbf{x}\| = 0$, только если $\mathbf{x} = \mathbf{0}$;
2. $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$;
3. $\|\alpha \mathbf{x}\| = |\alpha| \|\mathbf{x}\|$.

Метрику можно определить как $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$.
В n -мерных пространствах действительных R^n или комплексных C^n чисел:

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2}$$

В пространствах действительных или комплексных функций времени:

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\int_T |x(t)|^2 dt}$$

В пространствах сигналов с бесконечной энергией можно ввести норму с размерностью мощности:

$$\|\mathbf{x}\|_P = \sqrt{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2 dt}$$

Пространства со скалярным произведением

а) $(\dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{y}}) = (\dot{\mathbf{y}}, \dot{\mathbf{x}})^*$;

б) $(\dot{\alpha}\dot{\mathbf{x}} + \dot{\beta}\dot{\mathbf{y}}, \dot{\mathbf{z}}) = \dot{\alpha}(\dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{z}}) + \dot{\beta}(\dot{\mathbf{y}}, \dot{\mathbf{z}})$;

в) $(\dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}}) \geq 0$ и $(\dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}}) = 0$, только если $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$.

$$\|\dot{\mathbf{x}}\| = \sqrt{(\dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}})}$$

Неравенство Буняковского–Шварца:

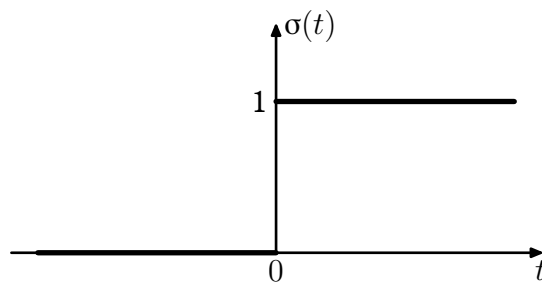
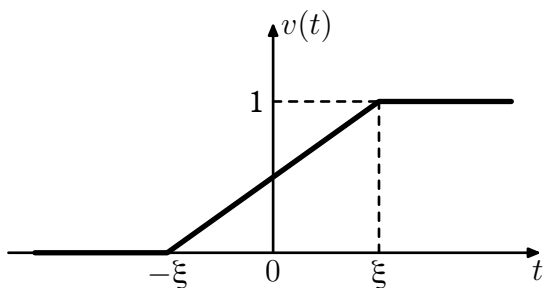
$$|(\dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{y}})| \leq \|\dot{\mathbf{x}}\| \|\dot{\mathbf{y}}\|$$

$$(\dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{y}}) = \sum_{i=1}^n \dot{\alpha}_i \dot{\beta}_i^*, \quad \dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{y}} \in C^n$$

$$(\dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{y}}) = \int_T \dot{x}(t) \dot{y}^*(t) dt, \quad \dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{y}} \in L^2(T)$$

$$v(t) = \begin{cases} 0, & t < -\xi; \\ 0,5(t/\xi + 1), & -\xi \leq t \leq \xi; \\ 1, & t > \xi. \end{cases}$$

$$\sigma(t) = \lim_{\xi \rightarrow 0} v(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 0,5, & t = 0; \\ 1, & t > 0. \end{cases}$$

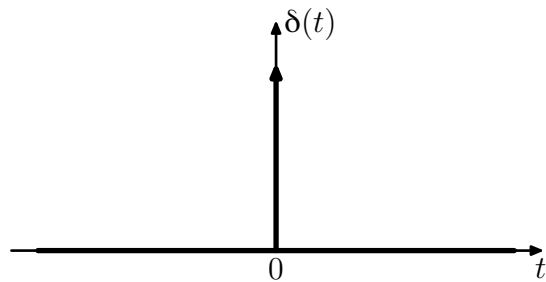
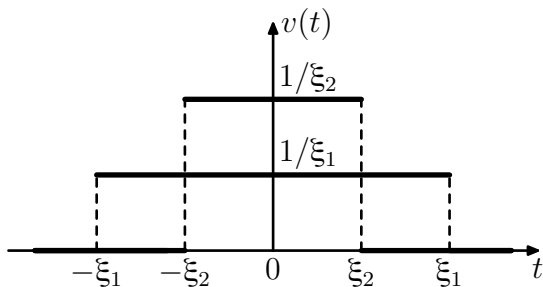


$$\begin{aligned}
s(t) &\approx s_0\sigma(t) + (s_1 - s_0)\sigma(t - \Delta) + (s_2 - s_1)\sigma(t - 2\Delta) + \dots = \\
&= s_0\sigma(t) + \sum_{k=1}^{\infty} (s_k - s_{k-1})\sigma(t - k\Delta).
\end{aligned}$$

$$s(t) = s_0\sigma(t) + \int_0^{\infty} \frac{ds}{d\tau} \sigma(t - \tau) d\tau$$

$$v(t) = \frac{1}{\xi} \left[\sigma \left(t + \frac{\xi}{2} \right) - \sigma \left(t - \frac{\xi}{2} \right) \right]$$

$$\delta(t) = \lim_{\xi \rightarrow 0} v(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ \infty, & t = 0; \\ 0, & t > 0. \end{cases}$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$

$$s(t) \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_k \frac{1}{\Delta} [\sigma(t - t_k) - \sigma(t - t_k - \Delta)] \Delta$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} [\sigma(t - \tau) - \sigma(t - \tau - \Delta)] \frac{1}{\Delta} = \delta(t - \tau)$$

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$