Случайные величины

$$\Omega = \{A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots\} \tag{1}$$

$$0 \leqslant P(A_i) \leqslant 1 \tag{2}$$

$$P(A_i + A_j) = P(A_i) + P(A_j) \tag{3}$$

$$\sum_i P(A_i) = 1 \tag{4}$$

$$P_{\text{эмп}} = n/N \tag{5}$$

Функция распределения

$$F(x) = P(X \leqslant x) \tag{6}$$

$$0 \leqslant F(x) \leqslant 1 \tag{7}$$

$$F(x_1) \leqslant F(x_2), \quad \textbf{для } x_1 < x_2 \tag{8}$$

$$F(-\infty) = 0, \quad F(\infty) = 1 \tag{9}$$

Плотность распределения вероятности

$$w(x) = \frac{dF}{dx} \tag{10}$$

$$w(x)dx = P(x < X \leqslant x + dx) \tag{11}$$

$$w(x) \geqslant 0 \tag{12}$$

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} w(\xi)d\xi \tag{13}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} w(x)dx = F(\infty) = 1 \tag{14}$$

Моменты случайной величины

$$\overline{f(x)} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)w(x)\,dx \tag{15}$$

$$m_n = \overline{x^n} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^n w(x)\,dx \tag{16}$$

$$m_1 = M(X) = m_x = \overline{x} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x w(x)\,dx \tag{17}$$

$$m_2 = \overline{x^2} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 w(x)\,dx \tag{18}$$

$$\mu_n = \overline{(x - \overline{x})^n} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - \overline{x})^n w(x)\, dx \tag{19}$$

$$\mu_2 = D(X) = \sigma_x^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - \overline{x})^2 w(x)\, dx \tag{20}$$

Равномерное распределение

$$w(x) = \begin{cases} 0, & x < x_1; \\ 1/(x_2 - x_1), & x_1 \leqslant x \leqslant x_2; \\ 0, & x > x_2. \end{cases} \tag{21}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < x_1; \\ \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, & x_1 \leqslant x \leqslant x_2; \\ 1, & x > x_2. \end{cases} \tag{22}$$

$$m_x = {}^1\!/_2(x_1 + x_2) \tag{23}$$

$$\sigma_x^2 = (x_2 - x_1)^2/12 \tag{24}$$

Нормальное (гауссовское) распределение

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \exp\left(-\frac{(x - m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right) \tag{25}$$

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \int\limits_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{(\xi - m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right) d\xi \tag{26}$$

Системы случайных величин

$$\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\} \tag{27}$$

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(X_1 \leqslant x_1, \ldots, X_n \leqslant x_n) \tag{28}$$

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \int\limits_{-\infty}^{x_1} \ldots \int\limits_{-\infty}^{x_n} w(\xi_1, \ldots, \xi_n)\, d\xi_1 \ldots d\xi_n \tag{29}$$

$$w(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqslant 0 \tag{30}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{\infty} w(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n = 1 \tag{31}$$

$$\overline{x_1} = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} x_1 w(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 \tag{32}$$

$$\overline{x_2} = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} x_2 w(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 \tag{33}$$

$$\sigma_1^2 = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} (x_1 - \overline{x_1})^2 w(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 \tag{34}$$

$$\sigma_2^2 = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} (x_2 - \overline{x_2})^2 w(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 \tag{35}$$

Ковариация:

$$R_{12} = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} (x_1 - \overline{x_1})(x_2 - \overline{x_2}) w(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 \tag{36}$$

Коэффициент корреляции:

$$r_{12} = R_{12}/(\sigma_1 \sigma_2) \tag{37}$$

Корреляционная матрица

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & 1 & \dots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix} \tag{38}$$

Многомерное нормальное распределение

$$w(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\mathbf{r}| \prod\limits_{i=1}^{n} \sigma_i^2}} \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{1}{2|\mathbf{r}|} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \frac{(x_i - m_i)}{\sigma_i} \frac{(x_j - m_j)}{\sigma_j}\right) \qquad (39)$$

где A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента r_{ij} матрицы $\mathbf{r}$