Случайные процессы

Случайным процессом называют функцию $X(t)$ неслучайной переменной (например времени), принимающая для каждого значения аргумента случайное значение.

Наблюдение случайного процесса на некотором интервале времени образует реализацию случайного процесса.

Значение случайного процесса в фиксированный момент времени образует случайноую величину, называемую сечением $X(t_1)$ случайного процесса.

$$X(t) = \{x(t)\} \tag{1}$$

$$P_{t_1}(a < x \leqslant b) = \int\limits_a^b w(x, t_1)\, dx \tag{2}$$

$$w(x_1, x_2; t_1, t_2) \tag{3}$$

$$w(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2, \ldots, t_n) \tag{4}$$

$$m_x(t) = \overline{X(t)} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xw(x; t)\, dx \tag{5}$$

$$\sigma_x^2(t) = \overline{\big(X(t) - m_x(t)\big)^2} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \big(x(t) - m_x(t)\big)^2 w(x; t)\, dx \quad (6)$$

$$B_x(t_1, t_2) = \overline{\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{X}(t_2)} = \quad (7)$$

$$= \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \big(x(t_1) - m(t_1)\big)\big(x(t_2) - m(t_2)\big) w(x_1, x_2; t_1, t_2)\, dx_1 dx_2$$

$$B_x(t_1, t_2)\Big|_{t_1 = t_2 = t} = \sigma_x^2(t) \quad (8)$$

$$\rho_x(t_1, t_2) = \frac{B_x(t_1, t_2)}{\sigma_x(t_1)\sigma_x(t_2)} \quad (9)$$

$$B_{xy}(t_1, t_2) = \overline{\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{Y}(t_2)} = \tag{10}$$

$$= \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \Big(x(t_1) - m(t_1)\Big)\Big(y(t_2) - m(t_2)\Big) w(x, y; t_1, t_2)\, dx dy$$

Стационарные случайные процессы

Случайный процесс называется *стационарным в узком смысле* (*строго стационарным*), если любая его n-мерная плотность вероятности зависит только от интервалов между сечениями в моменты времени $t_1, t_2, \ldots, t_n$ и не зависит от самих значений времени.

$$w(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n) = w(x_1, \ldots, x_n; t_1 + \boldsymbol{\tau}, \ldots, t_n + \boldsymbol{\tau}) \tag{11}$$

Случайный процесс называется *стационарным в широком смысле*, если его математическое ожидание и дисперсия не зависят от времени, а функция корреляции зависит только от разности между моментами времени t_1 и t_2.

$$m_x(t) = \mathrm{const}$$

$$\sigma_x^2(t) = \mathrm{const}$$

$$B_x(t_1, t_2) = B_x(\tau), \qquad \tau = |t_2 - t_1|$$

$$B_x(\tau) = B_x(-\tau) \tag{12}$$

$$|B_x(\tau)| \leqslant B_x(0) = \sigma_x^2 \tag{13}$$

Стационарный случайный процесс называется *эргодическим*, если его при нахождении его моментных функций усреднение по статистическому ансамблю можно заменить усреднением одной реализации по времени.

$$m_x = \widetilde{x(t)} = \langle x(t) \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_{-T/2}^{T/2} x(t)\, dt \tag{14}$$

$$\sigma_x^2 = \left\langle \left(x(t) - m_x\right)^2 \right\rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_{-T/2}^{T/2} \left(x(t) - m_x\right)^2 dt \tag{15}$$

$$B(\boldsymbol{\tau}) = \Big\langle \Big(x(t) - m_x\Big)\Big(x(t+\boldsymbol{\tau}) - m_x\Big) \Big\rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t+\boldsymbol{\tau})\,dt - m_x^2 \tag{16}$$