Корреляционная теория случайных процессов (СП)

Пусть $X(t)$ — стационарный СП с нулевым математическим ожиданием.

$$x(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_x(f) \exp\left(j2\pi f t\right) df \tag{1}$$

где $\dot{S}_x(f)$ — спектральная плотность реализации $x(t)$ случайного процесса $X(t)$.

$$\overline{x(t)} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{\dot{S}_x(f)} \exp\left(j2\pi f t\right) df = 0 \tag{2}$$

$$\overline{\dot{S}_x(f)} = 0 \tag{3}$$

$$B_x(\tau) = \overline{x(t)x(t+\tau)} = \overline{\overset{*}{x}(t)x(t+\tau)} =$$

$$= \overline{\int\limits_{-\infty}^{\infty} S_x(f)e^{j2\pi f t}e^{j2\pi f \tau}\,df \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overset{*}{S}_x(f_1)e^{-j2\pi f_1 t}\,df_1} =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{S_x(f)\overset{*}{S}_x(f_1)} e^{j2\pi(f-f_1)t}\,df_1 \right) e^{j2\pi f\tau}\,df \qquad (4)$$

$$\overline{S_x(f)\overset{*}{S}_x(f_1)} = G_x(f)\delta(f-f_1) \qquad (5)$$

где $G_x(f)$ — спектральная плотность мощности случайного процесса $X(t)$

Теорема Винера—Хинчина

$$B(\boldsymbol{\tau}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{j2\pi f\boldsymbol{\tau}}\, df \tag{6}$$

$$G(f) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} B(\boldsymbol{\tau}) e^{-j2\pi f\boldsymbol{\tau}}\, d\boldsymbol{\tau} \tag{7}$$

При $\boldsymbol{\tau} = 0$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} G(f)\, df = B(0) = \boldsymbol{\sigma}^2 \tag{8}$$

$$G(f) = 2\int\limits_0^{\infty} B(\tau)\cos 2\pi f\tau\, d\tau \tag{9}$$

$$B(\tau) = 2\int\limits_0^{\infty} G(f)\cos 2\pi f\tau\, df \tag{10}$$

$$G(f) = \begin{cases} 0{,}5G_0(f), & f \geqslant 0; \\ 0{,}5G_0(-f), & f < 0. \end{cases} \tag{11}$$

Интервал корреляции

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{к}} = \frac{1}{B(0)} \int\limits_0^\infty |B(\boldsymbol{\tau})| \, d\boldsymbol{\tau} \tag{12}$$

Эффективная ширина спектра

$$F_{\text{э}} = \frac{1}{G_{\max}} \int\limits_0^\infty G(f) \, df = \frac{1}{G_{0\max}} \int\limits_0^\infty G_0(f) \, df \tag{13}$$

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{к}} F_{\text{э}} \simeq 1 \tag{14}$$

Белый шум

Белым шумом называют стационарный СП, спектральная плотность которого одинакова на всех частотах.

$$G(f) = G(0) = N_0/2 \tag{15}$$

где N_0 — СПМ белого шума, определённая на положительных частотах $G_0(f) = N_0$

$$B(\tau) = \frac{N_0}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi f \tau}\, df = \frac{N_0}{2}\delta(\tau) \tag{16}$$

$$B(0) = \sigma^2 = \infty \tag{17}$$

Квазибелый шум

$$G_0(f) = \begin{cases} N_0, & 0 \leqslant f \leqslant F_{\text{в}}; \\ 0, & f > F_{\text{в}}. \end{cases} \tag{18}$$

$$B(\tau) = \int\limits_0^\infty G_0(f) \cos 2\pi f \tau \, df = N_0 F_{\text{в}} \frac{\sin 2\pi F_{\text{в}} \tau}{2\pi F_{\text{в}} \tau} \tag{19}$$

$$\tau_{\text{к}} = ?$$

$$F_{\text{э}} = ?$$

$$\tau_{\text{к}} F_{\text{э}} = ?$$

Узкополосные СП

$$B(\boldsymbol{\tau}) = \int\limits_{0}^{\infty} G_0(f)\cos 2\boldsymbol{\pi} f\boldsymbol{\tau}\, df \tag{20}$$

$$B(\boldsymbol{\tau}) = \int\limits_{-f_0}^{\infty} G_0(f_0+F)\cos 2\boldsymbol{\pi}(f_0+F)\boldsymbol{\tau}\, dF \tag{21}$$

Поскольку СП является узкополосным, то

$$B(\boldsymbol{\tau}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_0(f_0+F)\cos 2\boldsymbol{\pi}(f_0+F)\boldsymbol{\tau}\, dF \tag{22}$$

$$B(\tau) = a(\tau)\cos 2\pi f_0\tau + b(\tau)\sin 2\pi f_0\tau \tag{23}$$

где

$$a(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_0(f_0 + F)\cos 2\pi F\tau\, dF \tag{24}$$

$$b(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_0(f_0 + F)\sin 2\pi F\tau\, dF \tag{25}$$

Огибающая и начальная фаза

$$x(t) = U(t) \cos\bigl(2\pi f_0 t + \varphi(t)\bigr) \tag{26}$$

$$x(t) = A(t) \cos \omega_0 t - B(t) \sin \omega_0 t \tag{27}$$

$$y(t) = H\bigl[x(t)\bigr] = A(t) \sin \omega_0 t + B(t) \cos \omega_0 t \tag{28}$$

$$U(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} = \sqrt{A^2(t) + B^2(t)} \tag{29}$$

$$\varphi(t) = \arg\bigl(A(t) + jB(t)\bigr) \tag{30}$$