

**ПРИМЕНЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ WA-СИСТЕМ ФУНКЦИЙ КРАВЧЕНКО
К ОБРАБОТКЕ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ**

© 2011 г. В. Ф. Кравченко, академик В. И. Пустовойт, Д. В. Чуриков

Поступило 16.08.2010 г.

С использованием идей, изложенных в [1–6], впервые рассмотрено и обосновано применение комплексных WA-систем функций Кравченко к анализу и обработке временных рядов, имеющих важное значение в различных физических приложениях.

**АТОМАРНЫЕ ФУНКЦИИ
И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ В L_1 И L_2**

Известно [1–5], что атомарные функции (АФ) являются финитными решениями функционально-дифференциальных уравнений. Это позволяет привести доказательство существования преобразований Фурье (ПФ) [6]. Для этого рассмотрим прямое

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-i\omega x) dx \quad (1)$$

и обратное

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \exp(i\omega x) d\omega \quad (2)$$

преобразования Фурье. Докажем справедливость этих формул. Согласно [7, 8] введем определение.

Определение. Если $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$ (интеграл Лебега), то $f(x) \in L_1(\mathbb{R})$. Если $f(x) \in L_1(\mathbb{R})$, то интеграл (1) сходится, так как

$$|\hat{f}(\omega)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty.$$

В выражении для обратного преобразования (2) функция $\exp(i\omega x) \notin L_1(\mathbb{R})$. С помощью АФ докажем справедливость формулы (2).

Теорема 1. Если $f(x) \in L_1(\mathbb{R})$ и $\hat{f}(\omega) \in L_1(\mathbb{R})$, то

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \exp(i\omega x) d\omega.$$

Воспользуемся леммой Фату и теоремой Лебега [7, 8].

Лемма (Фату). Пусть $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ – семейство положительных функций $f_n(x) \geq 0$. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ почти всюду, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx.$$

Теорема Лебега о мажорируемой сходимости. Пусть $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ такое семейство, что $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ почти всюду. Если $\forall n \in \mathbb{N}$

$|f_n(x)| \leq g(x)$, а $\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx < \infty$, то $f(x)$ является интегрируемой и

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx.$$

Доказательство теоремы 1. Заменяем $\hat{f}(\omega)$ интегральным выражением (1)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \exp(i\omega x) d\omega = \\ & = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(u) \exp(-i\omega u) du \right) \exp(i\omega x) d\omega = \\ & = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \exp(i\omega(x-u)) dud\omega. \quad (3) \end{aligned}$$

Институт радиотехники и электроники
им. В.А. Котельникова
Российской Академии наук, Москва
Научно-технологический центр
уникального приборостроения
Российской Академии наук, Москва

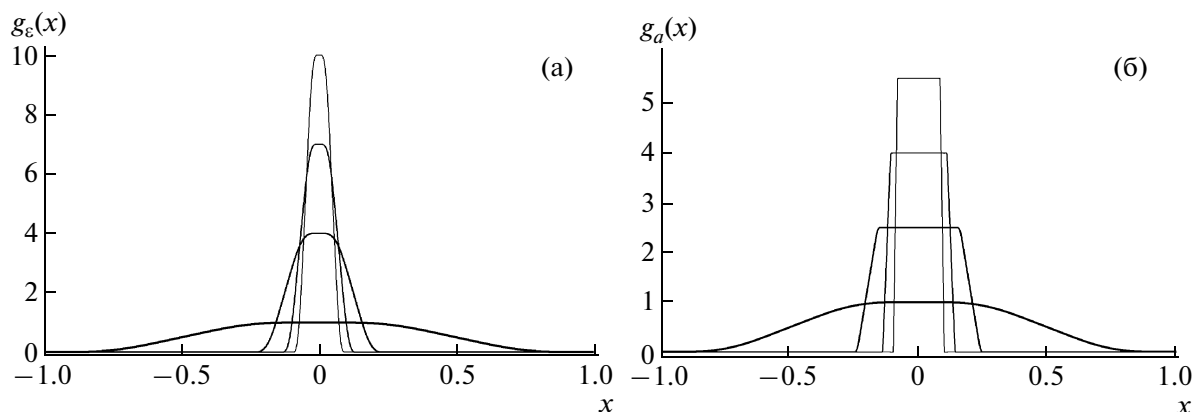


Рис. 1. Вид функций $g_\varepsilon(x)$ для $\varepsilon = 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{7}, \frac{1}{10}$ (а) и $g_a(x)$ для $a = 2, 5, 8, 11$ (б).

Используем теорему Тоннели–Фубини [8], которая позволяет свести вычисление двойного интеграла к повторным. Однако применить ее непосредственно нельзя, так как $f(u)\exp(i\omega(x-u))$ не интегрируемая в \mathbb{R}^2 . Для этого необходимо ввести в подынтегральную функцию множитель $\varphi(\omega) = \prod_{k=1}^{\infty} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega\varepsilon}{a^k}\right)$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi(\omega) = 1$. Тогда получим модифицированное выражение вида

$$I_\varepsilon(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} f(u) \times \prod_{k=1}^{\infty} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega\varepsilon}{a^k}\right) \exp(i\omega(x-u)) d\omega du. \quad (4)$$

Используя теорему Тоннели–Фубини, вычислим $I_\varepsilon(x)$ двумя способами.

1. Интегрируя по u , имеем

$$I_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \prod_{k=1}^{\infty} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega\varepsilon}{a^k}\right) \exp(i\omega x) d\omega.$$

Применим теорему Лебега о мажорируемой сходимости, так как

$$\left| \hat{f}(\omega) \prod_{k=1}^{\infty} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega\varepsilon}{a^k}\right) \exp(i\omega(x-u)) \right| \leq |\hat{f}(\omega)|,$$

и учитывая, что $\hat{f}(\omega)$ интегрируемая, то

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \exp(i\omega x) d\omega. \quad (5)$$

2. Интегрируя по ω , получим

$$I_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\pi} f(u) \times \left(\int_{-\infty}^{\infty} \prod_{k=1}^{\infty} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega\varepsilon}{a^k}\right) \exp(i\omega x) \exp(-i\omega u) d\omega \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) g_\varepsilon(x-u) du, \quad (6)$$

где

$$g_\varepsilon(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{k=1}^{\infty} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega\varepsilon}{a^k}\right) \exp(i\omega x) d\omega.$$

Введем переменную $\omega' = \omega\varepsilon$. Тогда

$$g_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{k=1}^{\infty} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega'}{a^k}\right) \exp\left(i\omega' \frac{x}{\varepsilon}\right) d\omega', \quad (7)$$

$$g_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} g_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

По определению АФ

$$g_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{k=1}^{\infty} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega'}{a^k}\right) \exp(i\omega' x) d\omega' = h_a(x). \quad (8)$$

Атомарная функция АФ $h_a(x)$ имеет интеграл, равный 1, с компактным носителем. Сжатие и масштабирование (7) также дает единичный интеграл. Поэтому $g_\varepsilon(x)$ стремится к дельта-функции Дирака $\delta(x)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ (см. рис. 1а). Учитывая (6), получим

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |I_\varepsilon(x) - f(x)| = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(u) - f(x)| g_\varepsilon(x-u) d\omega = 0. \quad (9)$$

Таким образом, из (5) и (9) следует, что

$$f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \exp(i\omega x) d\omega.$$

Теорема доказана.

Используя теорему Парсеваля и формулу Планшереля [7], преобразования (1), (2) продолжим в $L_2(\mathbb{R})$.

МОДИФИЦИРОВАННЫЕ АТОМАРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КРАВЧЕНКО В L_2

Рассмотрим модифицированное преобразование Фурье [5] со следующим интегральным ядром Кравченко [1–4]:

$$g_{u,\xi}(x) = \frac{1}{b} g(qx - u) \exp(i\xi x). \quad (10)$$

В выражении (10) $g(x)$ – АФ, u – временное смещение, ξ – частотное смещение, q и b – параметры масштабирования. Энергия ядра $g_{u,\xi}(x)$ сосредоточена в окрестности u на интервале размера σ_x , измеряемого стандартным отклонением $|g(x)|^2$. Спектром этой функции является ПФ $\hat{g}(\omega)$, смещенное на ξ , т.е. $\hat{g}_{u,\xi}(\omega) = \hat{g}(\omega - \xi)$. Энергия $\hat{g}_{u,\xi}(\omega)$ локализована около частоты ξ на интервале размера σ_ω в области, где $\hat{g}_{u,\xi}(\omega)$ не является пренебрежимо малой. Таким образом, модифицированное атомарное преобразование Кравченко имеет вид

$$y(u, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} y(x) g_{u,\xi}^*(x) dx = \frac{1}{b} \int_{-\infty}^{\infty} y(x) g(qx - u) \exp(-i\xi x) dx. \quad (11)$$

ВЕЙВЛЕТ-МОДУЛИРОВАННЫЕ ВЕСОВЫЕ ФУНКЦИИ КРАВЧЕНКО

Рассмотрим комплексные вейвлеты [3–6, 8, 9] Кравченко $\psi(x)$, для которых строго выполняется условие нулевого среднего. Основные свойства вейвлетов следующие.

Условие нулевого среднего:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 0. \quad (12)$$

Условие ограниченности во временной и в частотной областях:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx < \infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega < \infty.$$

Автомодельность базиса. Характерным признаком базиса вейвлет-преобразования

является его самоподобие, так как все базисные функции получены с помощью масштабных преобразований и сдвигов из одного и того же исходного вейвлета. Следовательно, выражение для определения вейвлет-функции Кравченко имеет следующий вид:

$$\psi(x) = \frac{1}{b} w(qx) \left\{ \exp(i\eta x) - \frac{1}{q} A\left(\frac{\eta}{q}\right) \right\}, \quad (13)$$

где $w(x)$ – АФ, η – параметр модулирования, b, q – параметры масштабирования, $A(\eta) = \hat{w}(\eta)$. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Пусть функция $\psi(x) = w(x)\{\exp(i\eta x) - A(\eta)\}$, где $w(x)$ – АФ ($\text{supp}(w(x)) = [-b, b]$), η – параметр модулирования. Если

$$A(\eta) = \int_{-b}^b w(x) \exp(i\eta x) dx,$$

то $\psi(x)$ является комплексным вейвлетом Кравченко с симметричным компактным носителем $[-b, b]$.

Доказательство. Подставив выражение $A(\eta)$ в (13) ($b = q = 1$), получим

$$\psi(x) = w(x) \left\{ \exp(i\eta x) - \int_{-b}^b w(x) \exp(i\eta x) dx \right\}. \quad (14)$$

Преобразование Фурье функции $\psi(x)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \exp(-i\omega x) dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^b \left\{ w(x) \exp(i\eta x) - w(x) \int_{-b}^b w(\xi) \exp(i\eta \xi) d\xi \right\} \times \\ &\times \exp(-i\omega x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^b w(x) \exp(i\eta x) \exp(-i\omega x) dx - \\ &- \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^b w(x) \left(\int_{-b}^b w(\xi) \exp(i\eta \xi) d\xi \right) \exp(-i\omega x) dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^b w(x) \exp(i\eta x) \exp(-i\omega x) dx - \\ &- \left(\int_{-b}^b w(\xi) \exp(i\eta \xi) d\xi \right) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^b w(x) \exp(-i\omega x) dx. \end{aligned}$$

При нулевой частоте

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^b w(x) \exp(i\eta x) dx - \\ &- \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-b}^b w(\xi) \exp(i\eta \xi) d\xi \right) \int_{-b}^b w(x) dx. \end{aligned}$$

Таблица 1. Расчет нормы относительной ошибки при увеличении M

M	Ошибка, %	
	$a = 2$	$a = 5$
1	32.3451	17.4366
2	3.7063	0.4098
3	0.7265	0.0136
4	0.1752	0.0005
5	0.0435	—
6	0.0109	—
7	0.0027	—
8	0.0007	—
9	0.0002	—
10	—	—

Используя [1] свойство нормировки АФ $\int_{-b}^b w(x) dx = 1$, получим $\hat{\psi}(0) = 0$ и $\int_{-b}^b \psi(x) dx = 0$. Теорема доказана.

СВОЙСТВА И ФИЗИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ФУНКЦИИ $\psi(x)$

Важными физическими параметрами вейвлетов являются константы неопределенности [6] по времени и частоте, которые определяются так:

$$x_f^* = \frac{1}{\|f(x)\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} x |f(x)|^2 dx, \tag{15}$$

$$\Delta_x = \frac{1}{\|f(x)\|} \left(\int_{-\infty}^{\infty} (x - x_f^*)^2 |f(x)|^2 dx \right)^{1/2},$$

$$\omega_f^* = \frac{1}{\|\hat{f}(\omega)\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega, \tag{16}$$

$$\Delta_\omega = \frac{1}{\|\hat{f}(\omega)\|} \left(\int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \omega_f^*)^2 |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \right)^{1/2}.$$

Частотно-временная локализация характеризуется произведением $\Delta = \Delta_x \Delta_\omega$. Выбрав АФ, запи-

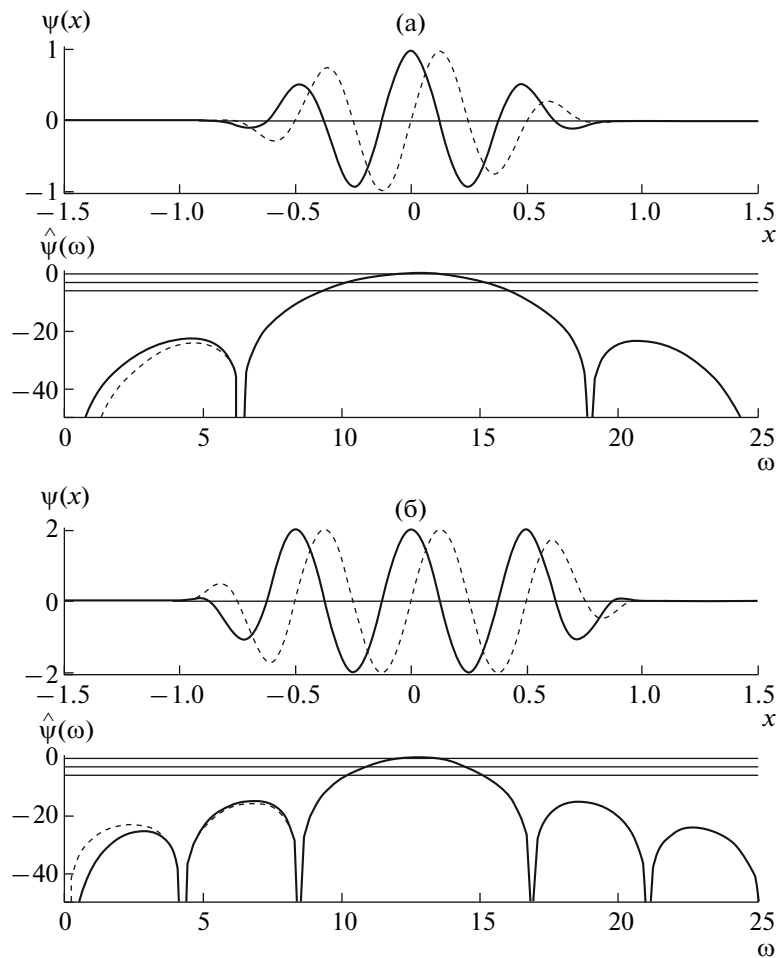


Рис. 2. Поведение действительной (сплошная линия) и мнимой (штриховая) частей и спектры (горизонтальные линии уровней соответствуют 0, -3 и -6 дБ) вейвлета Кравченко для $a = 2$ (а) и $a = 4$ (б), $\eta = 2\pi$.

Таблица 2. Физические характеристики действительной (над чертой) и мнимой (под чертой) частей вейвлета Кравченко

η	a	μ	γ_1	γ_2	γ_4	γ_7	γ_8	γ_9	γ_{10}	γ_{11}	Δ
$\frac{\pi}{2}$	2	$\frac{0.168}{1.562}$	$\frac{0.847}{0.596}$	$\frac{0.900}{1.220}$	$\frac{0.992}{0.860}$	$\frac{0.204}{0.202}$	$\frac{2.301}{2.353}$	$\frac{-16.468}{-20.524}$	$\frac{0.875}{0.885}$	$\frac{4.494}{4.601}$	$\frac{1.59}{1.64}$
		3	$\frac{1.126}{1.541}$	$\frac{0.898}{0.617}$	$\frac{0.814}{1.086}$	$\frac{1.020}{0.872}$	$\frac{0.501}{0.488}$	$\frac{2.015}{2.125}$	$\frac{-11.992}{-14.513}$	$\frac{1.171}{1.247}$	$\frac{4.215}{4.521}$
	4		$\frac{1.122}{1.509}$	$\frac{0.891}{0.628}$	$\frac{0.790}{1.046}$	$\frac{1.011}{0.872}$	$\frac{0.817}{0.793}$	$\frac{1.937}{2.051}$	$\frac{-10.414}{-12.259}$	$\frac{1.325}{1.463}$	$\frac{4.195}{4.582}$
		5	$\frac{1.128}{1.491}$	$\frac{0.909}{0.634}$	$\frac{0.769}{1.032}$	$\frac{1.023}{0.866}$	$\frac{1.133}{1.105}$	$\frac{1.912}{2.011}$	$\frac{-9.481}{-11.260}$	$\frac{1.425}{1.609}$	$\frac{4.240}{4.644}$
	6		$\frac{1.117}{1.538}$	$\frac{0.907}{0.625}$	$\frac{0.763}{1.051}$	$\frac{1.012}{0.875}$	$\frac{1.449}{1.420}$	$\frac{1.906}{1.986}$	$\frac{-8.902}{-10.753}$	$\frac{1.499}{1.715}$	$\frac{4.300}{4.694}$
		π	2	$\frac{1.162}{1.556}$	$\frac{0.852}{0.587}$	$\frac{0.923}{1.275}$	$\frac{0.992}{0.857}$	$\frac{0.328}{0.318}$	$\frac{2.373}{2.521}$	$\frac{-18.421}{-24.209}$	$\frac{0.820}{0.741}$
3	$\frac{1.156}{1.536}$			$\frac{0.865}{0.604}$	$\frac{0.854}{1.154}$	$\frac{1.000}{0.858}$	$\frac{0.727}{0.695}$	$\frac{2.077}{2.275}$	$\frac{-14.011}{-17.582}$	$\frac{1.083}{0.994}$	$\frac{4.257}{4.564}$
	4		$\frac{1.153}{1.508}$	$\frac{0.878}{0.612}$	$\frac{0.833}{1.123}$	$\frac{1.000}{0.878}$	$\frac{1.104}{1.060}$	$\frac{1.992}{2.161}$	$\frac{-12.353}{-15.869}$	$\frac{1.220}{1.135}$	$\frac{4.213}{4.482}$
5			$\frac{1.122}{1.548}$	$\frac{0.891}{0.604}$	$\frac{0.840}{1.114}$	$\frac{1.022}{0.854}$	$\frac{1.457}{1.412}$	$\frac{1.960}{2.087}$	$\frac{-11.413}{-15.586}$	$\frac{1.311}{1.223}$	$\frac{4.233}{4.418}$
	6		$\frac{1.150}{1.533}$	$\frac{0.870}{0.609}$	$\frac{0.810}{1.118}$	$\frac{0.989}{0.870}$	$\frac{1.796}{1.755}$	$\frac{1.944}{2.036}$	$\frac{-10.890}{-15.711}$	$\frac{1.377}{1.282}$	$\frac{4.263}{4.368}$
$\frac{3\pi}{2}$			2	$\frac{1.179}{1.546}$	$\frac{0.833}{0.600}$	$\frac{0.991}{1.200}$	$\frac{0.985}{0.860}$	$\frac{0.356}{0.328}$	$\frac{2.537}{2.980}$	$\frac{-21.800}{-24.279}$	$\frac{0.715}{0.529}$
	3	$\frac{1.160}{1.467}$		$\frac{0.845}{0.667}$	$\frac{0.939}{1.010}$	$\frac{0.991}{0.902}$	$\frac{0.686}{0.637}$	$\frac{2.267}{2.635}$	$\frac{-17.485}{-16.635}$	$\frac{0.899}{0.713}$	$\frac{4.453}{4.920}$
		4	$\frac{1.158}{1.416}$	$\frac{0.855}{0.730}$	$\frac{0.894}{0.871}$	$\frac{1.000}{0.929}$	$\frac{0.961}{0.922}$	$\frac{2.198}{2.391}$	$\frac{-15.738}{-15.120}$	$\frac{0.986}{0.845}$	$\frac{4.407}{4.630}$
	5		$\frac{1.174}{1.371}$	$\frac{0.852}{0.770}$	$\frac{0.870}{0.828}$	$\frac{0.981}{0.951}$	$\frac{1.226}{1.203}$	$\frac{2.164}{2.246}$	$\frac{-15.157}{-14.294}$	$\frac{1.042}{0.942}$	$\frac{4.394}{4.456}$
		6	$\frac{1.156}{1.297}$	$\frac{0.865}{0.814}$	$\frac{0.867}{0.804}$	$\frac{1.000}{0.966}$	$\frac{1.497}{1.492}$	$\frac{2.137}{2.150}$	$\frac{-15.127}{-13.525}$	$\frac{1.080}{1.023}$	$\frac{4.378}{4.347}$
	2π		2	$\frac{1.187}{1.350}$	$\frac{0.829}{0.759}$	$\frac{0.992}{0.947}$	$\frac{0.987}{0.946}$	$\frac{0.331}{0.318}$	$\frac{2.883}{3.108}$	$\frac{-23.537}{-23.063}$	$\frac{0.556}{0.509}$
3		$\frac{1.115}{1.008}$		$\frac{0.912}{1.016}$	$\frac{0.817}{0.786}$	$\frac{1.022}{1.079}$	$\frac{0.607}{0.632}$	$\frac{2.601}{2.402}$	$\frac{-16.801}{-16.978}$	$\frac{0.701}{0.822}$	$\frac{4.854}{4.627}$
		4	$\frac{1.041}{0.844}$	$\frac{0.984}{1.185}$	$\frac{0.759}{0.745}$	$\frac{1.071}{1.167}$	$\frac{0.903}{0.955}$	$\frac{2.405}{2.149}$	$\frac{-14.642}{-15.528}$	$\frac{0.837}{1.023}$	$\frac{4.648}{4.345}$
5			$\frac{1.008}{0.791}$	$\frac{1.033}{1.255}$	$\frac{0.719}{0.704}$	$\frac{1.090}{1.196}$	$\frac{1.238}{1.296}$	$\frac{2.259}{2.061}$	$\frac{-13.968}{-14.484}$	$\frac{0.941}{1.160}$	$\frac{4.480}{4.301}$
		6	$\frac{0.959}{0.750}$	$\frac{1.085}{1.333}$	$\frac{0.684}{0.679}$	$\frac{1.110}{1.229}$	$\frac{1.588}{1.641}$	$\frac{2.163}{2.026}$	$\frac{-13.501}{-13.991}$	$\frac{1.020}{1.256}$	$\frac{4.370}{4.322}$

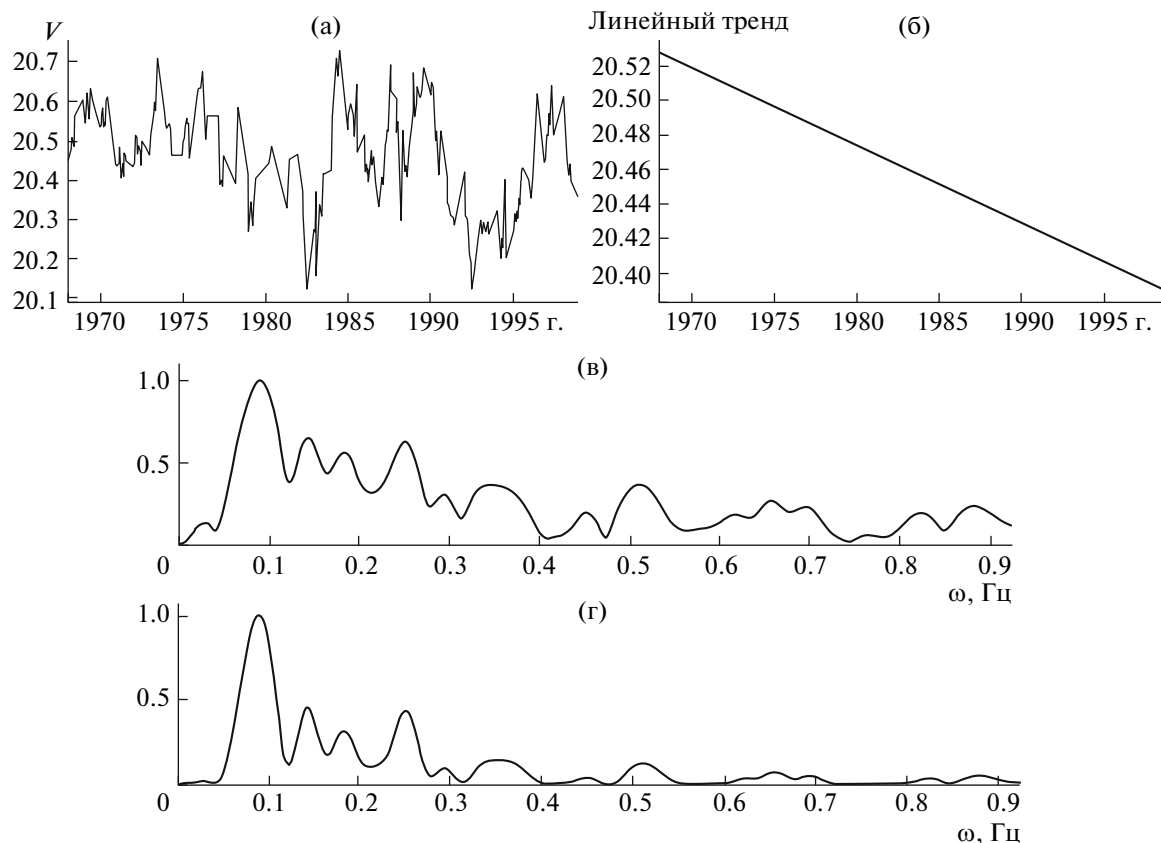


Рис. 3. Изменения кривой блеска в период времени с 1968 по 2000 г. (а), линейный тренд (б), спектр (в) и периодограмма (г) функции блеска V .

шем (13) в конкретной форме. Если $w(x) = h_a(x)$,

то $A(\eta) = \prod_{k=1}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{\eta}{a^k}\right)$. Тогда

$$\psi(x) = h_a(x) \left\{ \exp(i\eta x) - \prod_{k=1}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{\eta}{a^k}\right) \right\}. \quad (17)$$

При численных экспериментах ограничимся небольшим числом множителей бесконечного произведения. Это следует из быстрой сходимости

функции $A_M^*(\eta) = \prod_{k=1}^M \text{sinc}\left(\frac{\eta}{a^k}\right)$, $A(\eta) = \lim_{M \rightarrow \infty} A_M^*(\eta)$.

Определим относительную ошибку вычислений:

$$E(M) = 100\% \frac{\|A(\eta) - A_M^*(\eta)\|_{L_2}}{\|A(\eta)\|_{L_2}}.$$

Проанализируем результаты численного эксперимента. В табл. 1 представлены значения $E(M)$. Из табл. 1 следует, что процент ошибки становится меньше одной десятичной для $a = 2$ на 10-й, а при $a = 5$ на 5-й итерации. В табл. 2 приведены физические характеристики [3] вейвлетов Кравченко, нормированные по уровню 3 дБ ($\gamma_3 = 1$).

Поведение действительной и мнимой частей вейвлета Кравченко и их спектры представлены на рис. 2. Преимуществом комплексных WA-систем функций Кравченко по сравнению, например, с вейвлетом Морле [8, 9] является точное выполнение условия нулевого среднего для любого значения параметра модулирования, даже в том случае, если он меньше максимальной частоты “материнской” АФ. При этом наблюдается искажение спектра действительной части вейвлета. Так как “материнская” АФ является финитной функцией, то при масштабировании аргумента вид $A(\eta)$ не изменяется. Если положить $\eta = \nu_i$, $i = 1, 2, 3, \dots$, где ν_i — нули $A(\eta)$, то (14) упрощается.

ФУНКЦИОНАЛ КАЧЕСТВА ВЫБОРА ВЕЙВЛЕТНОГО БАЗИСА ДЛЯ АНАЛИЗА СИГНАЛОВ

Для повышения качества физического анализа сигналов следует выбирать наиболее подходящую систему вейвлетов. Вейвлет-функция должна обладать характеристиками, согласованными с анализируемым сигналом. Введем функционал качества

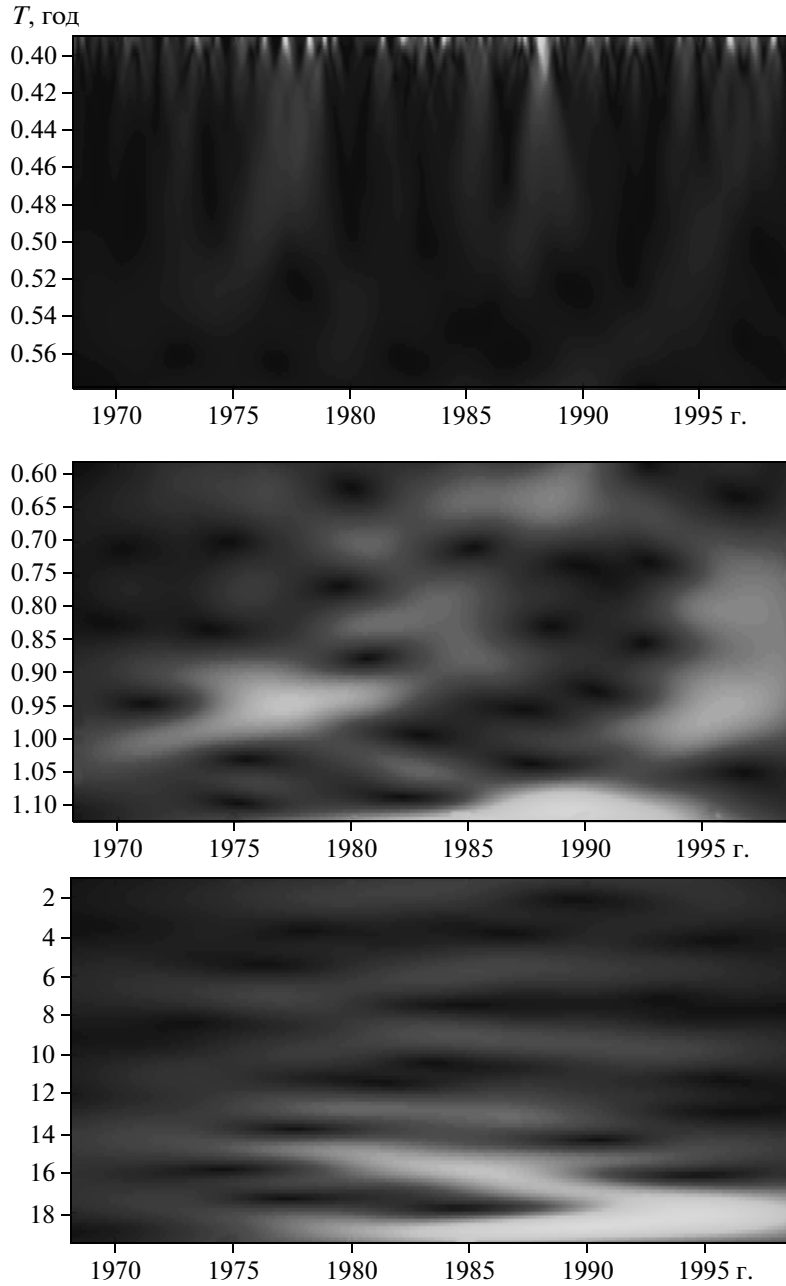


Рис. 4. Нерывное вейвлет-преобразование кривой блеска с вычетом линейного тренда для разных диапазонов периодов; $a = 2$.

$$J(\psi, y) = \sum_{k=0}^4 \left| \frac{\gamma_k^\psi - \gamma_k^y}{\gamma_k^y} \right|^2, \quad (18)$$

где $\psi(x)$ – вейвлет-функция, $y(x)$ – сигнал, а γ_k^ψ и γ_k^y – их физические характеристики. Здесь $\gamma_0 = \mu$. Оптимальному выбору базиса будет соответствовать минимальное значение функционала. Для достижения лучших результатов вейвлет-функ-

ция и сигнал должны иметь близкие показатели широкополосности: $\mu^\psi \approx \mu^y$. Из (13) следует

$$\mu^\psi = 2 \frac{f_{\max}^\psi - f_{\min}^\psi}{f_{\max}^\psi + f_{\min}^\psi} = f_{\max}^w \frac{2}{\eta}$$

Здесь f_{\max}^w – максимальная частота функции спектральной плотности $w(x)$. Таким образом, получаем выражение $\eta = f_{\max}^w \frac{2}{\mu^\psi}$. После некоторых преобразований (13) принимает следующий вид:

$$\psi(x) = w(x) \left\{ \exp \left(i \frac{2f_{\max}^w}{\mu'} x \right) - A(\eta) \right\}. \quad (19)$$

Здесь μ' – заданный показатель широкополосности, f_{\max}^w – максимальная частота функции спектральной плотности $\hat{w}(\omega)$. Таким образом, получена модифицированная вейвлет-модулированная весовая функция Кравченко, согласованная с анализируемым сигналом. Следует отметить, что в отличие от [3] точно выполняется условие нулевого среднего (12).

АНАЛИЗ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ КОМПЛЕКСНЫМИ ВЕЙВЛЕТАМИ КРАВЧЕНКО

Пример. Применим новые вейвлеты Кравченко для исследования космических тел [10] квазаров. Известно, что их излучение изменчиво во всех диапазонах длин волн. Исследуем поведение физических характеристик ближайшего к Земле квазара 3C273. Изучим поведение функции его блеска в зависимости от времени. Экспериментальные данные взяты из открытого источника (<http://isdc.unige.ch/3c273/>). Блеск [10] – это безразмерная звездная величина, которая определяется по формуле $V = -\frac{5}{2} \lg F + C$, где F – световой поток от объекта, $C = 16.5$. Поведение изменения светового потока F в период времени с 1968 по 2000 г. представлено на рис. 3 а. Средняя квадратичная относительная ошибка измерений составляет 2%. Графики изменения блеска V , а также линии линейного тренда приведены на рис. 3а, б. Исключим из ряда V линейный тренд ($-4.85 \cdot 10^{-3}$ в год), а затем определим ПФ. Результаты показаны на рис. 3 в, г. Оценка спектральной плотности мощности (периодограмма) основана на вычислении квадрата модуля преобразования Фурье последовательности данных с использованием статистического усреднения:

$$S_T(\omega) = E \left(\frac{|\hat{y}(\omega)|^2}{T} \right), \quad (20)$$

где T – интервал финитности, $E(*)$ – оператор статистического усреднения (математическое ожидание). Результаты непрерывного вейвлет-преобразования для разных масштабов см. на рис. 4. Из физического анализа результатов вейвлет-преобразования следует четкое выделение как периодических, так и случайных составляющих сигналов. Кроме того, прослеживается динамика

изменения частотных свойств и последствия локальных событий. При этом наиболее устойчивыми являются 6-, 15- и 18-летние циклы.

Таким образом, построены и обоснованы новые модифицированные атомарные преобразования Кравченко, являющиеся обобщением преобразования Фурье. На их основе доказано в L_1 и L_2 существование обратного ПФ. Модифицированные атомарные преобразования Кравченко существенно улучшают временное и частотное разрешение спектральных компонент сигналов. Новые WA-системы функций Кравченко применены для анализа временных рядов изменения блеска квазара 3C273 и солнечной активности. Большой численный эксперимент и физический анализ результатов подтвердили эффективность предложенных модифицированных атомарных преобразований.

Результаты работы были частично доложены на Международной конференции “DAYS on DIFFRACTION 2010”, Санкт-Петербург [11].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кравченко В.Ф. Лекции по теории атомарных функций и некоторым их приложениям. М.: Радиотехника, 2003.
2. Кравченко В.Ф., Рвачев В.Л. Алгебра логики, атомарные функции и вейвлеты в физических приложениях. М.: Физматлит, 2006.
3. Цифровая обработка сигналов и изображений в радиофизических приложениях / Под ред. В.Ф. Кравченко. М.: Физматлит, 2007.
4. Kravchenko V.F., Perez-Meana H.M., Ponomaryov V.I. Adaptive Digital Processing of Multidimensional Signals with Applications. Moscow: Fizmatlit, 2009.
5. Кравченко В.Ф., Лабунько О.С., Лерер А.М., Синяевский Г.П. Вычислительные методы в современной радиофизике / Под ред. В.Ф. Кравченко. М.: Физматлит, 2009.
6. Кравченко В.Ф., Пустовойт В.И. // ДАН. 2009. Т. 428. № 5. С. 601–607.
7. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.
8. Mallat S.G. A Wavelet Tour of Signal Processing. N.Y.: Acad. Press, 1998.
9. Chui C.K. An Introduction to Wavelets. N.Y.: Acad. Press, 1992.
10. Астрономия. Век XXI / Под ред. В.Г. Сурдина. Фрязино: Век 2, 2007.
11. Kravchenko V.F., Churikov D.V. New Analytical WA-Systems of Kravchenko Functions. Proc. Int. Conference “DAYS on DIFFRACTION”. St. Petersburg, June 8–11, 2010. P. 49–50.