УДК 621.395.8

СЛЕПАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ ИНФОРМАЦИОННОГО КАНАЛА ПО МНОГООБРАЗИЯМ ЗАДАННОЙ КОРРЕЛЯЦИИ, ПОРОЖДЕННЫМ СЛУЧАЙНЫМИ ПОЛИНОМАМИ.

Горячкин О.В., Эрина Е.И.

В статье рассматривается актуальная проблема слепой идентификации канала связи. Для решения задачи используются полиномиальные представления кумулянтов случайных последовательностей конечной длины и порожденные ими алгебраические многообразия. Данный подход позволяет использовать для построения алгоритмов слепой идентификации методы алгебраической геометрии и коммутативной алгебры.

BLIND CHANNEL IDENTIFICATION BY MANIFOLDS OF GIVEN CORRELATION GENERATED BY RANDOM POLYNOMS.

Oleg V. Goriachkin, Elena I. Erina

In this paper is considered an actual problem of Blind Channel Identification. For the solving of this problem are used polynomial representations of cumulants of finite random sequences and manifolds generated by them. This approach allows the using of methods of algebraic geometry and commutative algebra for design of blind identification algorithms.

1. Введение

В последние годы наблюдается большой интерес к так называемой “слепой проблеме” [1] – [6]. В общем виде задачу слепой обработки можно сформулировать, как цифровую обработку неизвестных сигналов, прошедших линейный канал или среду с неизвестными характеристиками на фоне аддитивных шумов. Слепая идентификация является противоположностью или дополнением задач классической идентификации систем, где используется как наблюдаемый сигнал, так и считаются заданными входные сигналы.

Слепая идентификация или слепое выравнивание каналов в системах связи позволяет увеличить их пропускную способность, за счет отказа от периодического зондирования канала испытательными сигналами. Вне области связи слепое оценивание канала применяется в различных областях: компенсация искажений, вызванных эффектами распространения в радиолокационных и радионавигационных системах; коррекция линейных искажений в системах формирования изображений; обработка сейсмосигналов в геофизике; компенсация искажений в системах распознавания речи.

Важный вопрос при решении задач слепой идентификации – идентифицируемость системы. Под идентифицируемостью системы вслепую понимается возможность восстановления передаточной функции и/или импульсной характеристики (ИХ) системы с точностью до комплексного множителя только по выходным сигналам. Для каналов с одним входом и одним выходом условия идентифицируемости формулируются в контексте статистической идентификации. Статистическая идентификация предполагает наличие некоторого множества реализаций выходного сигнала, при формировании которых ИХ канала постоянна. При этом система идентифицируема, если на входе имеется нестационарный или негауссовский случайный процесс.

Впервые алгоритм прямого слепого выравнивания канала связи, использующий негауссовость информационных сигналов в цифровых системах с амплитудной модуляцией, был предложен, по-видимому, Сато [8] в 1975 г. Алгоритм Сато был в последствии обобщен Годардом [9] в 1980 г. для случая комбинированной амплитудно-фазовой модуляции (известен также как «алгоритм постоянных модулей»). К настоящему времени известно большое количество алгоритмов слепой идентификации и коррекции каналов связи, использующие различные критерии адаптации линейных эквалайзеров. Поэтому в литературе они объединяются в класс стохастических градиентных алгоритмов, или алгоритмов Базганга. Базовыми ограничениями этих алгоритмов являются относительно медленная сходимость, требование достоверных начальных условий, большая вычислительная сложность (вследствие наличия процедуры нелинейной оптимизации коэффициентов эквалайзера), низкая помехоустойчивость.

Другой класс алгоритмов слепой идентификации, разработанный относительно недавно, включает алгоритмы, использующие правило максимального правдоподобия. Эти алгоритмы обеспечивают асимптотическую эффективность и состоятельность получаемых оценок, обладают более высокой помехоустойчивостью, однако имеют две основные проблемы: вычислительная сложность и локальные максимумы [7].

Весьма соблазнительным для разработки слепых оценщиков является метод моментов. Суть этого метода заключается в замене уравнений, связывающих сигналы на входе и выходе системы, уравнениями, связывающими соответствующие моментные функции. Оценки, полученные в рамках метода моментов, не являются наилучшими среди всех оценок в смысле их асимптотической эффективности [3], [10], однако данный подход, как правило, позволяет получить оценку канала в явном виде, минуя процедуру нелинейной оптимизации. Важным достоинством этих методов в контексте «слепой проблемы» является отсутствие требований к априорному знанию распределений вероятностей информационных сигналов и помех. Хорошо известно, что ковариационные функции стационарного процесса на выходе линейной системы не содержат информации о фазе её передаточной функции, и идентификация возможна только для узкого класса систем с минимальной фазой. Исторически это обусловило интерес, прежде всего, к статистикам высокого порядка и соответственно к негауссовским моделям входных сигналов [7], [11]. Использование статистик 2-го порядка для слепой идентификации канала возможно для нестационарной модели входного или выходного сигналов и, в частном случае, для периодически-коррелированного (циклостационарного) сигнала. Возможность такой идентификации для телекоммуникационных каналов, в общем случае для нестационарного входа, показано в [12]. Как правило, для построения оценок в рамках метода моментов используются кумулянтные спектры (или «полиспектры»), поскольку в этом случае уравнения для неизвестного канала можно записать в простой алгебраической форме. В данной работе развивается новый подход к синтезу алгоритмов статистической слепой идентификации, основанный на полиномиальном представлении моментов случайных последовательностей [3], [13], [14].

2. Полиномиальные статистики и порожденные ими многообразия

Пусть $\mathbf{x} \in C^n$ – комплексный случайный вектор, описываемый плотностью вероятности $f_x\left(x_1,...,x_n\right)$, определенной в R^{2n}.

Полиномиальный момент порядка $\left(k+m\right)$, $k=k_1+k_2+...+k_r$, $m=m_1+m_2+...+m_r$ случайного вектора $\mathbf{x}$ – это полином от r переменных, принадлежащий кольцу $C\left[z_1,...,z_r\right]$ над полем комплексных чисел, сформированный следующим образом:

$$P^x_{k_1,...,k_r,m_1,...,m_r}\left(z_1,z_2,...,z_r\right)=\mathbf{M}\left\{x\left(z_1\right)^{k_1}...x\left(z_r\right)^{k_r}\,x^*\left(z_1\right)^{m_1}...x^*\left(z_r\right)^{m_r}\right\}. \qquad (1)$$

Набор определенных таким образом полиномиальных моментов формально определяет функцию плотности вероятности и характеристическую функцию комплексного случайного вектора, образованного r значениями случайного полинома $x\left(z\right)\in C\left[z\right]$ в точках $\left\{z_1,...,z_r\right\}$ в виде:

$$\begin{aligned}\Theta\left(p_1,...,p_r;z_1,...,z_r\right)=1+\sum_{l=1}^{\infty} j^l \sum_{m_1,...,m_r=l}\frac{1}{m_1!...m_r!}\sum_{k_1,...,k_r=0}^{m_1,...,m_r}\binom{k_1}{m_1}\cdot...\cdot\binom{k_r}{m_r}\times \\ \times P^x_{k_1,...,k_r,m_1,...,m_r}\left(z_1,z_2,...,z_r\right)p_1^{m_1-k_1}\left(p_1^*\right)^{k_1}...p_r^{m_r-k_r}\left(p_r^*\right)^{k_r},\end{aligned} \qquad (2)$$

где $p_i=\frac{1}{2}\left(\omega_i^{\mathrm{Re}}-j\omega_i^{\mathrm{Im}}\right)$, а $\binom{k}{m}$ – биномиальный коэффициент.

Плотность вероятности комплексных коэффициентов случайного полинома может быть найдена вычислением $2r$-мерного обратного преобразования Фурье от характеристической функции (2).

Если $y(z)=h(z)x(z)$ – произведение случайного полинома $x(z)$ и неслучайного полинома $h(z)$, то

$$P_l^y(z_1,...,z_l)=P_l^x(z_1,...,z_l)h(z_1)...h(z_l). \tag{3}$$

Если $y(z)=x_1(z)x_2(z)$ – произведение случайных независимых полиномов $x_1(z)$ и $x_2(z)$ (т.е. полиномов с независимыми векторами коэффициентов $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$), тогда

$$P_l^y(z_1,...,z_l)=P_l^{x_1}(z_1,...,z_l)P_l^{x_2}(z_1,...,z_l). \tag{4}$$

Если $y(z)=x_1(z)+x_2(z)$ – сумма случайных независимых полиномов $x_1(z)$ и $x_2(z)$, тогда справедливы следующие соотношения:

$$P_l^y(z_1,...,z_l)=\sum_{r=1}^{l}\left(\sum_{\substack{0<i_1<\ldots<i_r<l\\ 0<i_{r+1}<\ldots<i_l<l}} P_r^{x_1}\left(z_{i_1},\ldots,z_{i_r}\right)P_{l-r}^{x_2}\left(z_{i_{r+1}},\ldots,z_{i_l}\right)\right). \tag{5}$$

Из этого выражения видно, что полиномиальные моменты не коммутируют сумму независимых случайных полиномов. Свойство коммутативности характерно для полиномиальных кумулянтов независимых полиномов.

Определим полиномиальный кумулянт порядка $(k+m)$, где $k=k_1+k_2+...+k_r$, $m=m_1+m_2+...+m_r$, случайного вектора $\mathbf{x}$ как полином от r переменных, принадлежащий кольцу $C[z_1,...,z_r]$:

$$K^x_{k_1,...,k_r,m_1,...,m_r}(z_1,z_2,...,z_r)=\operatorname{cum}\left\{x(z_1)^{k_1}...x(z_r)^{k_r}\,x^*(z_1)^{m_1}...x^*(z_r)^{m_r}\right\}. \tag{6}$$

Связь характеристической функции r значений случайного полинома и набора полиномиальных кумулянтов можно записать в виде:

$$\begin{aligned}\ln\left(\Theta\left(p_1,...,p_r;z_1,...,z_r\right)\right)&=\sum_{l=1}^{\infty}j^l\sum_{m_1,...,m_r=l}\frac{1}{m_1!...m_r!}\sum_{k_1,...,k_r=0}^{m_1,...,m_r}\binom{k_1}{m_1}\cdot...\cdot\binom{k_r}{m_r}\times\\ &\times K^x_{k_1,...,k_r,m_1,...,m_r}(z_1,z_2,...,z_r)\,p_1^{m_1-k_1}\left(p_1^*\right)^{k_1}...p_r^{m_r-k_r}\left(p_r^*\right)^{k_r}.\end{aligned} \tag{7}$$

Для каждого полиномиального кумулянта $K^x_{k_1,...,k_r,m_1,...,m_r}(z_1,z_2,...,z_r)$ можно определить множество точек в пространстве C^r, на котором значение полиномиального кумулянта равно нулю

$$\Xi^{x}_{k_1,\dots,k_r,m_1,\dots,m_r} = \left\{ z \in C^r : K^{x}_{k_1,\dots,k_r,m_1,\dots,m_r}\left(z_1, z_2, \dots, z_r\right) = 0 \right\}. \qquad (8)$$

Заданное таким образом множество точек является множеством корней полинома из кольца $C\left[z_1,\dots,z_r\right]$ и аффинным многообразием в пространстве C^r.

Рассмотрим роль полиномиальных кумулянтов и порожденных ими многообразий в определении статистических связей между компонентами случайного вектора.

Многообразие нулевой корреляции (декоррелирующее многообразие) l-го порядка r значений случайного полинома определяется следующим образом:

$$\Xi^{x}_{l} = \begin{Bmatrix} z \in C^r : K^{x}_{k_1\dots k_r,m_1\dots m_r}\left(z_1,\dots,z_r\right) = 0, \\ k_1 + \dots + k_r + m_1 + \dots + m_r = l,\ k_1 + m_1 > 1, \dots, k_r + m_r > 1 \end{Bmatrix}. \qquad (9)$$

Пусть далее $\mathbf{x} \in R^n$ – случайный вектор, описываемый плотностью вероятности $f_x\left(x_1,\dots,x_n\right)$ в R^n. Пусть $x\left(z\right) \in C[z]$ – случайный полином степени $n-1$, заданный случайным вектором $\mathbf{x} \in R^n$.

Для каждого $K^{x}_{k_1,\dots,k_r,m_1,\dots,m_r}\left(z_1, z_2,\dots,z_r\right)$ мы можем определить множество точек в пространстве C^r, на котором значение полиномиального кумулянта имеет заданное значение $t \in C$:

$$\Xi^{x}_{k_1,\dots,k_r,m_1,\dots,m_r}\left(t\right) = \left\{ z \in C^r : K^{x}_{k_1,\dots,k_r,m_1,\dots,m_r}\left(z_1, z_2, \dots, z_r\right) = t \right\}. \qquad (10)$$

В частном случае мы можем определить все возможные значения $z_1 \neq z_2$, для которых $x\left(z_1\right)$ и $x\left(z_2\right)$ имеют заданное значение первой корреляционной функции. Для этого необходимо решить систему полиномиальных уравнений вида:

$$\Xi^{x}_{1,0,0,1}\left(t\right) = \left\{ z \in C^2 : K^{x}_{1,0,0,1}\left(z_1, z_2\right) = t, \quad t \in C \right\}. \qquad (11)$$

Для каждого $t \in C$ аффинное многообразие $\Xi^{x}_{1,0,0,1}\left(t\right)$ называется многообразием заданной корреляции случайного полинома $x\left(z\right)$ первого порядка.

Если выбрать m различных комплексных чисел $\left\{c_0,\dots,c_{m-1}\right\}$, так что любая составленная из них пара принадлежит $\Xi^{x}_{1,0,0,1}\left(t\right)$, то можно определить соответствующее линейное отображение вектора $\mathbf{x} \in R^n$ в вектор $\mathbf{y} \in C^m$.

Пусть $x_1\left(z\right), x_2\left(z\right)$ – независимые случайные полиномы и $\Xi^{x_1}_{k_1,\dots,k_r,m_1,\dots,m_r}\left(t_1\right)$, $\Xi^{x_2}_{k_1,\dots,k_r,m_1,\dots,m_r}\left(t_2\right)$ – соответствующие им многообразия заданной корреляции. Тогда многообразия нулевой корреляции, возникающие в результате произведения и суммы соответствующих полиномов, описываются следующими выражениями:

$$\Xi^{x_1 x_2}_{k_1,\ldots,k_r,m_1,\ldots,m_r}(0) = \Xi^{x_1}_{k_1,\ldots,k_r,m_1,\ldots,m_r}(0) \bigcup \Xi^{x_1}_{k_1,\ldots,k_r,m_1,\ldots,m_r}(0), \tag{12}$$

$$\Xi^{x_1 + x_2}_{k_1,\ldots,k_r,m_1,\ldots,m_r}(0) = \Xi^{x_1}_{k_1,\ldots,k_r,m_1,\ldots,m_r}(t) \bigcap \Xi^{x_2}_{k_1,\ldots,k_r,m_1,\ldots,m_r}(-t). \tag{13}$$

Пусть $x_1(z), x_2(z), \ldots, x_n(z)$ – набор независимых случайных полиномов и $\Xi^{x_1}_{k_1,\ldots,k_r,m_1,\ldots,m_r}(t_1), \ldots, \Xi^{x_n}_{k_1,\ldots,k_r,m_1,\ldots,m_r}(t_n)$ – соответствующие им многообразия заданной корреляции, тогда

$$\Xi^{x_1 \ldots x_n}_{k_1,\ldots,k_r,m_1,\ldots,m_r}(0) = \bigcup_{i=1}^{n} \Xi^{x_i}_{k_1,\ldots,k_r,m_1,\ldots,m_r}(0), \tag{14}$$

$$\Xi^{x_1 \ldots x_n}_{k_1,\ldots,k_r,m_1,\ldots,m_r}(t_1 t_2 \ldots t_n) = \bigcap_{i=1}^{n} \Xi^{x_i}_{k_1,\ldots,k_r,m_1,\ldots,m_r}(t_i), \tag{15}$$

$$\Xi^{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}_{k_1,\ldots,k_r,m_1,\ldots,m_r}(t_1 + t_2 + \ldots + t_n) = \bigcap_{i=1}^{n} \Xi^{x_i}_{k_1,\ldots,k_r,m_1,\ldots,m_r}(t_i). \tag{16}$$

В (15) и (16) $t_i \neq 0$.

Многообразие $\Xi \subset C^r$ называется неприводимым, если оно может быть представлено в виде $\Xi = \Xi_1 \bigcup \Xi_2$, где Ξ_1 и Ξ_2 аффинные многообразия, в том и только том случае, когда или $\Xi_1 = \Xi$, или $\Xi_2 = \Xi$.

Если $\Xi \subset C^r$ – аффинное многообразие, тогда существует единственное разложение вида:

$$\Xi = \bigcup_{i=1}^{n} \Xi_i, \tag{17}$$

где каждое Ξ_i – неприводимое многообразие и $\Xi_i \not\subset \Xi_j, i \neq j$.

Таким образом, любое аффинное многообразие может быть получено конечным объединением неприводимых многообразий или разложено в такое объединение (следствие из теоремы Гильберта о конечной порождённости идеала) [7].

Проиллюстрируем на простых примерах визуальные особенности приводимых и неприводимых многообразий.

Пример 1. Пусть $x(z) \in C[z]$ – случайный полином степени $n-1$, заданный случайным вектором $\mathbf{x} \in R^n$ с нулевым математическим ожиданием, независимыми компонентами и дисперсией компонент σ^2. Тогда многообразие нулевой корреляции случайного полинома может быть факторизовано в объединение $n-1$ неприводимых многообразий:

$$\Xi^x = \bigcup_{i=1}^{n-1} \Xi_i, \tag{18}$$

где $\Xi_i = \left\{ \left(z_1, z_2 \right) \in C^2 : z_1 z_2 = \alpha_i \right\}$ и $\alpha_i, i = \overline{1, n-1}$ – корни приводимого многочлена $P\left(x \right) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}$.

Введем следующие обозначения: $z_1 = x + yj, z_2 = u + vj, \alpha_i = a_i + b_i j, i = \overline{1, n-1}$. Каждому уравнению $z_1 z_2 = \alpha_i$ соответствует система равенств:

$$\begin{cases} x = \dfrac{a_i u + b_i v}{u^2 + v^2}, \\ y = \dfrac{b_i u - a_i v}{u^2 + v^2}, \end{cases} \tag{19}$$

которая задает в четырехмерном пространстве $C^2 = R^4$ неприводимое многообразие Ξ_i.

Систему (19) можно записать в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = \dfrac{a_i h + b_i t}{h^2 + t^2}, \\ y = \dfrac{b_i h - a_i t}{h^2 + t^2}, \\ u = h, \\ v = t. \end{cases} \tag{20}$$

Рассматривая $t = v$ в качестве так называемого временного параметра, мы будем представлять его изменение, как движение многообразия нулевой корреляции в пространстве трех оставшихся переменных. Итак, в трехмерном пространстве наше многообразие задается следующим образом:

$$\begin{cases} x = \dfrac{a_i h + b_i t}{h^2 + t^2}, \\ y = \dfrac{b_i h - a_i t}{h^2 + t^2}, \\ u = h, \end{cases} \tag{21}$$

где t – временной параметр.

Следует заметить, что из двух пространственных параметров в (21) присутствует только один – h. Это означает, что неприводимые подмногообразия являются пространственными кривыми в R^3. Чтобы наиболее полно отразить на рисунках движение этих кривых, мы изображаем их как поверхности, образованные их перемещением в пространстве при изменении параметра $t \in [10, 20]$.

Иллюстрация этого примера для $n = 6$ (т.е. полинома пятой степени) представлена на рис. 1, где легко различимы пять неприводимых компонент многообразия нулевой корреляции Ξ^x.

Рис. 1. Приводимое многообразие нулевой корреляции

Пример 2. Теперь рассмотрим случайный полином первой степени $x(z) \in C[z]$ с ненулевой ковариацией коэффициентов. Многообразие нулевой корреляции Ξ^x в этом случае порождается неприводимым полиномом

$$K^x_{1,1,0,0}(z_1, z_2) = r_{00} + r_{01}(z_1 + z_2) + r_{11} z_1 z_2, \tag{22}$$

и потому неприводимо.

Многообразие нулевой корреляции Ξ^x случайного полинома $x(z)$ с дисперсией коэффициентов $r_{00} = r_{11} = 1$ и корреляцией $r_{01} = \frac{1}{2}$ изображено на рис. 2 при изменении временного параметра $t \in [10, 20]$.

Рис. 2. Неприводимое многообразие нулевой корреляции

Обозначив $z_1 = x + yj, z_2 = u + vj$, из уравнения $r_{00} + r_{01}(z_1 + z_2) + r_{11} z_1 z_2 = 0$ получим систему равенств:

$$\begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{v^2 + u^2 + 2{,}5u + 1}{(u + 0{,}5)^2 + v^2}, \\ y = \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{v}{(u + 0{,}5)^2 + v^2}. \end{cases} \tag{23}$$

Следовательно, декоррелирующее многообразие Ξ^x можно задать параметрически:

$$\begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{t^2 + h^2 + 2{,}5h + 1}{(h + 0{,}5)^2 + t^2}, \\ y = \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{t}{(h + 0{,}5)^2 + t^2}, \\ u = h, \\ v = t. \end{cases} \tag{24}$$

Тогда в трехмерном пространстве многообразие нулевой корреляции (24) задается следующим образом:

$$\begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{t^2 + h^2 + 2,5h + 1}{(h+0,5)^2 + t^2}, \\ y = \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{t}{(h+0,5)^2 + t^2}, \\ u = h, \end{cases} \tag{25}$$

где t – временной параметр, а h – пространственный параметр.

Далее рассмотрим применение полиномиальных статистик для решения задач слепой идентификации.

3. Идентификация детерминированного канала связи по многообразиям заданной корреляции

В статье рассматриваются подходы к решению задачи слепой идентификации последовательных систем передачи дискретных сообщений с пассивной паузой. Заметим, что в отличие от систем с испытательным импульсом на пассивную паузу тратиться в 2 раза меньшее время.

Для систем с пассивной паузой модель детерминированного канала может быть описана линейной комбинацией полиномов положительной степени

$$y(z) = h(z)x(z) + v(z). \tag{26}$$

В этом выражении $h(z) \in C[z]$ – неслучайный полином конечной дискретной ИХ канала, а $y(z), x(z), v(z) \in C[z]$ – случайные полиномы, соответствующие наблюдаемому дискретизированному сигналу, информационной последовательности на входе канала и отсчетам шума соответственно. Рассмотрим случайные полиномы как комплексные случайные поля, определенные на комплексной плоскости. В этом случае можно определить моментные и кумулянтные функции этих случайных полей, которые будут полиномами от многих переменных [3,13,14].

Уравнение, связывающее полиномиальные кумулянты на входе и выходе идентифицируемой системы (18), можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} K^{y}_{k,m}(z_1,\dots,z_R) = h(z_1)^{k_1} \dots h(z_R)^{k_R}\, h^*(z_1)^{m_1} \dots h^*(z_R)^{m_R}\, K^{x}_{k,m}(z_1,\dots,z_R) + \\ + K^{v}_{k,m}(z_1,\dots,z_R). \end{aligned} \tag{27}$$

Когда о статистике информационной последовательности имеются лишь общие предположения, для слепой идентификации мы можем использовать структуру декоррелирующих многообразий. Поскольку статистика шума известна, то выражение (27) можно записать в виде

$$\Xi_{k,m}^{y-v}(0) = \Xi_{k,m}^{h}(0) \bigcup \Xi_{k,m}^{x}(0), \tag{28}$$

где
$$\Xi_{k,m}^{x}(t) = \left\{ K_{k,m}^{x}(z_1,\ldots,z_R) = t,\ t \in C \right\},$$

$$\Xi_{k,m}^{h}(t) = \left\{ K_{k,m}^{h}(z_1,\ldots,z_R) = t,\ t \in C \right\},$$

$$\Xi_{k,m}^{y-v}(t) = \left\{ K_{k,m}^{y}(z_1,\ldots,z_R) - K_{k,m}^{v}(z_1,\ldots,z_R) = t,\ t \in C \right\}.$$

Как уже было отмечено выше, любое многообразие может быть представлено в виде объединения конечного числа неприводимых многообразий, и более того, такое представление единственно. Если $\Xi_{k,m}^{h}(0) \not\subset \Xi_{k,m}^{x}(0)$, то представление (28) единственно. А значит, многообразие $\Xi_{k,m}^{h}(0)$ полностью характеризует импульсную характеристику канала и может быть найдено разложением многообразия $\Xi_{k,m}^{y-v}(0)$ на объединение неприводимых многообразий. При этом нам не требуется априорного знания моментов информационной последовательности. Однако подобное разложение крайне сложная задача в поле комплексных чисел. Поэтому мы воспользуемся отличием размерностей многообразий, порожденных ИХ канала и информационной последовательностью.

Многообразие нулевой корреляции $\Xi_{k,m}^{h}(0)$ порождено нульмерным многообразием (конечным множеством точек в C) и представляет собой объединение комплексных гиперплоскостей в C^r. Многообразие $\Xi_{k,m}^{x}(0)$ порождается, как правило, одномерным многообразием в C. В частном случае, при независимых одинаково распределенных отсчетах информационной последовательности оно является набором гиперповерхностей в C^r.

Итак, с учетом размерности можно разделить неизвестные многообразия, выбирая различные сечения. А алгоритм слепой идентификации при $r = 2$ сводится к следующей последовательности действий (идея алгоритма предложена в [15]).

В общем случае, при $r > 2$ принцип разделения остается тем же. Т.е. проекция $C^r \to C$ многообразия, порожденного ИХ канала, на любую координату нульмерна, а многообразия, порожденного информационной последовательностью, как правило, имеет размерность 1.

Иллюстрация алгоритма для случая полинома $x(z) \in C[z]$ входного сигнала с некоррелированными коэффициентами из примера 1 представлена на рис. 3. При этом в качестве полинома ИХ канала выбран детерминированный полином первой степени $h(z)=h_0+h_1 z$ с комплексными коэффициентами $h_0=1-j, h_1=2+3j$, корнем которого является число $-\frac{h_0}{h_1}=\frac{1}{13}+\frac{5}{13}j$. Таким образом, порождаемое им многообразие нулевой корреляции имеет вид:

$$\Xi_{1,1,0,0}^{h}(0)=\left\{(z_1,z_2)\in C: K_{1,1,0,0}^{h}(z_1,z_2)=0\right\}=\left\{(z_1,z_2)\in C: h(z_1)h(z_2)=0\right\}, \tag{29}$$

$$\Xi_{1,1,0,0}^{h}(0)=\Xi_1^h\cup\Xi_2^h=\left\{(z_1,z_2)\in C: z_1=-\frac{h_0}{h_1}\right\}\cup\left\{(z_1,z_2)\in C: z_2=-\frac{h_0}{h_1}\right\}. \tag{30}$$

Рис. 3. Многообразие нулевой корреляции $\Xi_{k,m}^{y}(0)$ наблюдаемого колебания в отсутствие шума для случая некоррелированной входной информационной последовательности $x(z)\in C[z]$

При проецировании $C^2\to C$ для подмногообразия, соответствующего ИХ канала, мы получаем точки, а входного сигнала – кривые. Эти объекты хорошо просматриваются на представленной иллюстрации на пересечении многообразия $\Xi_{1,1,0,0}^{y-v}(0)$ с плоскостью Ξ_1^h и отмечены стрелками. Заметим, что независимо от выбранного сечения вертикальная прямая Ξ_2^h проецируется в точку (многообразие нулевой размерности в C), а поверхности, порожденные входным сигналом $x(z)\in C[z]$ – в кривые (имеющие размерность 1).

4. Идентификация стохастического канала связи по многообразиям заданной корреляции

Теперь рассмотрим случай стохастического канала связи. Модель стохастического канала для систем с пассивной паузой также описывается линейной комбинацией (26) полиномов положительной степени. Однако в этом случае, полином конечной дискретной ИХ канала $h(z)\in C[z]$ имеет случайные коэффициенты, а задача слепой идентификации канала подразумевает восстановление статистических характеристик канала (например, ковариационной матрицы).

Будем считать, что статистические характеристики ни входной информационной последовательности, ни самого канала связи не известны. Новый эффективный способ восстановления статистических характеристик канала заключается в использовании приводимости алгебраических многообразий (17), порожденных полиномиальными кумулянтами наблюдаемого колебания. В этом случае при идентификации подмногообразий, соответствующих ИХ канала, играют роль вторичные признаки, такие как длина канала и длина информационной последовательности (т.е. мы допускаем, что нам могут быть известны степени случайных полиномов).

Теперь допустим, что входная информационная последовательность и ИХ канала задаются случайными векторами $\mathbf{x} \in R^n$ и $\mathbf{h} \in R^m$ с различной корреляцией компонент и имеющими нулевые математические ожидания.

Пусть корреляционная матрица вектора $\mathbf{x} \in R^n$ имеет трехдиагональный вид:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & r & & \mathrm{O} \\ r & 1 & r & \\ & r & \ddots & r \\ \mathrm{O} & & r & 1 \end{pmatrix}, \tag{31}$$

тогда многообразие нулевой корреляции Ξ^x порождается полиномом

$$K^x_{1,1,0,0}\left(z_1, z_2\right) = 1 + \left(z_1 r + z_2 r + z_1 z_2\right)\left(1 + z_1 z_2 + \left(z_1 z_2\right)^2 + \ldots + \left(z_1 z_2\right)^{n-1}\right), \tag{32}$$

$$K^x_{1,1,0,0}\left(z_1, z_2\right) = 1 + \left(z_1 r + z_2 r + z_1 z_2\right)\left(1 - \left(z_1 z_2\right)^n\right). \tag{33}$$

После подстановки

$$\begin{cases} \sigma_1 = z_1 + z_2, \\ \sigma_2 = z_1 z_2, \end{cases} \tag{34}$$

и элементарных преобразований мы получаем, что многообразие нулевой корреляции задается следующим образом:

$$\Xi^x_{1,1,0,0}(0) = \left\{ (\sigma_1, \sigma_2) \in C^2 : \sigma_1 = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\left(1 - \sigma_2\right)^{n+1}}{\left(1 - \sigma_2\right)^n} \right\}. \tag{35}$$

Очевидно, что оно является неприводимым многообразием.

На рис. 4 представлено многообразие нулевой корреляции $\Xi^y_{1,1,0,0}(0)$ наблюдаемого колебания, где в качестве полиномов ИХ канала и информационной последовательности выбраны случайные полиномы, которым соответствуют корреляционные матрицы вида (31) для значений $r_1 = \frac{1}{2}, r_2 = -\frac{1}{7}$ соответственно.

Рис. 4. Многообразие нулевой корреляции $\Xi^y_{k,m}\left(0\right)$ наблюдаемого колебания распадается на два неприводимых подмногообразия, порожденные ИХ канала и входным сигналом

Выбирая различные сечения многообразия, мы можем восстановить неизвестную статистику канала или информационной последовательности.

5. Заключение

Применение полиномиальных представлений случайных векторов в задачах слепой идентификации позволило найти ряд алгоритмов слепой идентификации канала связи, основанных на применении методов коммутативной алгебры и алгебраической геометрии. Показано, что многообразия, порожденные полиномиальными кумулянтами, обладают рядом уникальных свойств. Например, многообразия нулевой корреляции, порожденные случайной последовательностью и детерминированным каналом, могут быть разделены по их размерности, т.е. возможна слепая идентификация канала в отсутствии априорной информации о статистике информационной последовательности. Показано, что если многообразия, порожденные ИХ канала и информационной последовательностью, неприводимы и различны, то возможно их однозначное разделение с помощью факторизации многообразий наблюдаемого сигнала. Таким образом, становится возможным спектральный или корреляционный анализ случайных сигналов, прошедших стохастические каналы с неизвестными характеристиками.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. L. Tong, S. Perreau, “Multichannel blind identification: From subspace to maximum likelihood methods”, *Proceedings of IEEE*, vol.86, pp. 1951-1968, 1998.
2. J.T. Tugnait, L. Tong, Z. Ding, “Single-user channel estimation and equalization”, *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 12, pp.17-28, 2000.
3. Горячкин О.В., Методы слепой обработки сигналов и их приложения в системах радиотехники и связи. – М.: Радио и связь, 2003. – 230с.
4. P. Comon, M. Rajih, “Blind identification of under-determined mixtures based on the characteristic function”, *Signal Processing*, vol. 86, September 2006, pp. 2271-2281.
5. J. Lebrun, P. Comon, “Blind algebraic identification of communication channels: symbolic solution algorithms”, *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing*, vol. 17, Nov. 2006, pp. 471- 485.
6. Кравченко В.Ф., Цифровая обработка сигналов и изображений в радиофизических приложениях. – М.: Физматлит, 2007. – 544 с.
7. Прокис Дж. Цифровая связь. Пер. с англ./ под ред. Д.Д. Кловского. – М. Радио и связь. – 2000. – 800с.
8. Y. Sato, “A method of self-recovering equalization for multilevel amplitude-modulation systems”, *IEEE Trans. on Communications*, vol. 23, pp. 679-682, 1975.
9. D. N. Godard, “Self-recovering equalization and carrier tracking in two dimensional data communication systems”, *IEEE Trans. on Communications*, vol.28, pp. 1867-1875, 1980.
10. Крамер Г., Математические методы статистики. Пер. с англ. – М. – 1975. – 745с.
11. C. L. Nikias, R. V. “Raguver, Bispectral Analysis of Gravity Capillary Waves”, *Radiophysics and Quantum Electronics*, vol. 45, July 2002, pp. 534-553.
12. O. V. Goriachkin, D.D. Klovsky, “Blind Channel Identification with Non-Stationary Input Processes”, in *Proc. World Multiconf. SCI, 2001,* Orlando, Florida, USA, pp.386-388.
13. Горячкин О.В., Полиномиальные представления и слепая идентификация систем// Физика волновых процессов и радиотехнические системы. – 2002. – Т.5. – №4. – С. 53-60.
14. Горячкин О.В., Полиномиальные статистики и их применение в задаче слепой идентификации радиотехнических систем // Доклады академии наук РФ. – 2004. – Т.396. – №4. – С.477-479.
15. Горячкин О.В. Многообразия постоянных парных корреляций и их применения в задаче слепой обработки широкополосных сигналов // Успехи современной радиоэлектроники. – 2003. - №10. – С.72-76.