УДК 621.396

АЛГОРИТМ СЛЕПОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ ВЕКТОРНОГО КАНАЛА РАСПРОСТРАНЕНИЯ СИГНАЛОВ В РТС

О.В. Горячкин

Поволжская государственная академия информатики, радиотехники и связи,

443010, г. Самара, ул. Л. Толстого 23,

E-mail: gor@mail.radiant.ru

Аннотация. *В статье рассматривается задача оценки импульсной характеристики системы со скалярным входом и векторным выходом, по априори неизвестному входному сигналу.*

Формулируется и доказывается основная теорема слепой идентификации в полиномиальной интерпретации. В рамках известного метода слепой идентификации, использующего перекрёстные связи каналов, на основе полиномиального представления предлагается новый алгоритм, использующий аналитическое решение задачи слепой идентификации. Получены выражения для относительной погрешности алгоритма, проведено математическое моделирование.

BLIND IDENTIFICATION ALGORITHM OF VECTORIAL CHANELS OF PROPAGATION OF SIGNALS IN RADIO-ENGINEERING SYSTEMS

O.V. Goriachkin

Abstract: *In paper the problem of blind identification SIMO channels of radio-engineering systems are discussed. The new proof of basis theorem of blind identification in polynomial interpretation is demonstrated. On the base of cross-correlation method the new algorithm are proposed. This algorithm gives the closed form solution of SIMO blind identification problem. The performances of noise stability of the algorithm are showed.*

1. Формулировка проблемы

Статья посвящена решению так называемой «слепой проблемы», возникающей в различных областях современной радиотехники и связи. Суть «слепой проблемы» можно сформулировать как задачу восстановления неизвестных информационных сигналов, прошедших линейный канал с неизвестными характеристиками на фоне аддитивных шумов. Различают два основных типа подобных задач: слепая идентификация канала (оценка неизвестной импульсной характеристики (ИХ) или передаточной функции), слепое выравнивание (или коррекция) канала. В обоих случаях для обработки доступны только реализации наблюдаемого сигнала. В целом методы решения подобных задач в последние годы всё чаще называют методами слепой обработки сигналов (СОС).

«Слепая проблема» часто возникает в задачах цифровой обработки сигналов радиотехнических систем, в том числе в системах радиолокации, радионавигации, радиоастрономии, цифрового телевидения, в системах радиосвязи.

В практике радиотехнических систем передачи информации, рассчитанных на высокоскоростную передачу через каналы с различного вида рассеянием, ИХ радиоканала, как правило, не известна с достаточной точностью для возможности синтеза оптимальных модуляторов и демодуляторов. Это является следствием многолучевого распространения радиоволн на трассе передатчик – приемник, эффектов рефракции и дифракции широкополосных радиосигналов в тропосферных и ионосферных слоях.

В системах подвижной радиосвязи многолучевой характер распространения сигнала вызван в основном переотражениями радиоволн от различных сооружений, особенностей рельефа. Подобные эффекты возникают и в подводных акустических каналах.

В системах цифровой транкинговой связи, использующих TDMA, системах удаленного радиодоступа, локальных офисных радиосетях каналы также характеризуются существенным временным рассеянием и замираниями.

Сходные проблемы возникают в спутниковых системах глобальной радионавигации. Радиосигнал от пригоризонтных космических аппаратов приходит к наземному подвижному объекту не только прямым путем, но и за счет зеркального отражения от земной поверхности. При этом погрешности измерения псевдодальностей, обусловленные многолучевостью, могут достигать в худшей ситуации 10-30% общей погрешности измерения.

В системах одночастотной (последовательной) передачи дискретных сообщений по каналам, характеризующимся возникновением эффекта межсимвольной интерференции, оценка рассеяния с помощью тестирования канала испытательным импульсом - ключевая технология реализации эквалайзеров различного типа. Однако время (от 20% до 50%), затрачиваемое системой на тестирование канала, все более привлекательный ресурс для модернизации стандартов одночастотных систем передачи (TDMA), особенно в системах подвижной радиосвязи. Альтернативой тестированию канала в этих системах является использование методов слепой идентификации.

В современной радиолокации использование для зондирования все более широкополосных электромагнитных импульсов напрямую связано с увеличением временной разрешающей способности и, следовательно, информативности этих систем. Однако влияние тракта и среды распространения возрастает пропорционально полосе частот используемых сигналов, что часто приводит к потере когерентности системы. Особенно этот эффект существенен для сверхширокополосной радиолокации.

Такая проблема возникает в частности в задаче активной радиолокации малозаметных космических объектов через атмосферу Земли, в РЛС противовоздушной и космической обороны, системах предупреждения о ракетном нападении.

В системах радиоразведки, системах радиоэлектронной борьбы и радиопротиводействия актуальной является проблема слепого разделения источников радиоизлучения, адаптации диаграмм направленности активных фазированных решеток к создаваемой помеховой обстановке. Возникновение слепой проблемы здесь связано с отсутствием априорной информации о координатах источников, их ориентации относительно антенны радиотехнического устройства и соответственно отсутствие информации о коэффициентах смешивающей матрицы в (1).

Радиолокация поверхности Земли с летательных аппаратов с помощью радиолокаторов с синтезированной апертурой (РСА) за последние 30 лет прошла путь от единичных научных экспериментов до устойчиво развивающейся отрасли дистанционного зондирования Земли (ДЗЗ). От применения этих систем научное сообщество ожидает в ближайшем будущем существенного прогресса в решении таких глобальных проблем, как предсказание землетрясений, понимания процессов глобального изменения климата. Помимо научного назначения эти системы сегодня являются уникальным инструментом при решении таких практических задач, как контроль чрезвычайных ситуаций, экологический мониторинг, картография, сельское хозяйство, мореплавание во льдах и прочее.

Расширение областей применения РСА стимулирует постоянный рост требований к их пространственному разрешению, а также целесообразности освоения новых частотных диапазонов. В последние годы активно обсуждаются проблемы реализации космических РСА дистанционного зондирования Земли, работающих в диапазонах частот, традиционно не используемых в космической радиолокации. Это РСА, работающие в диапазонах (X, Ku, K, P, UHF, VHF).

Использование диапазонов (P, UHF, VHF) особенно интересно, поскольку РЛИ в этих диапазонах несет в себе информацию о распределении коэффициента отражения в толще земной поверхности, при этом глубина проникновения в VHF диапазоне может достигать нескольких сотен метров. Кроме того, использование низкочастотных диапазонов связано с высокой эффективностью применения РСА для картографирования растительных покровов.

Для космических РСА в этих диапазонах становится катастрофическим эффект деградации пространственного разрешения радиолокационных изображений, который возникает в этих системах вследствие погрешности траекторных измерений, влияния среды распространения. Единственным, практически безальтернативным способом преодоления данных проблем являются методы СОС.

Т.о. в современной радиотехнике решение слепой проблемы является во многих случаях безальтернативной технологией достижения высоких тактико-технических характеристик, является порой единственной возможностью для освоения новых частотных диапазонов и уровней разрешающей способности, повышения обнаружительных характеристик, скорости передачи, и в целом информативности радиотехнических систем.

Задачи слепой обработки предполагают широкий класс моделей для описания наблюдаемых сигналов. Часто непрерывная модель стационарной системы может быть описана выражением:

$$\mathbf{y}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{h}(t-\tau)x(\tau)d\tau+\mathbf{v}(t), \qquad (1)$$

где: $\mathbf{y}(t)$ - наблюдаемый векторный сигнал со значениями в $\mathbf{C}^m$, $\mathbf{h}(\tau)$ - неизвестная импульсная характеристика m-мерного канала; $x(\tau)$- неизвестный комплексный информационный сигнал со значениями в $\mathbf{C}$; $\mathbf{v}(t)$- аддитивная помеха (векторный случайный процесс со значениями в $\mathbf{C}^m$, как правило с независимыми компонентами). Системы, описываемые моделями вида (1) называют системами с одним входом и множественным выходом. Если в (1) $m=1$, то мы имеем модель системы с одним входом и выходом.

В данной работе мы рассматриваем возможности и алгоритмы решения задачи идентификации векторного канала (в (1) $m>1$). Подобная модель возникает в радиотехнических системах использующих разнесённые в пространстве приемники, методы синтезирования апертуры, интерферометрическую обработку, временное разнесение и т.п.

Под идентифицируемостью системы вслепую понимается возможность восстановления импульсной характеристики системы с точностью до комплексного множителя только по выходным сигналам в отсутствии шумов. При этом различают задачи статистической и детерминированной идентификации, имея в виду модель информационной последовательности.

В данной статье рассматривается случай детерминированной идентификации векторного канала особенно актуальный для радиотехнических приложений, поскольку позволяет получить оценку неизвестного канала распространения только по одной реализации принятого сигнала. Особенностью предлагаемого подхода является использование полиномиальной интерпретации векторных дискретных сигналов в приёмном устройстве РТС.

2. Условия идентифицируемости векторного канала

Пусть идентифицируемый дискретный канал описывается следующими выражениями:

$$y_l^{(k)}(z) = \sum_{i=0}^{L-1} h_i^{(k)} x_{i+l}(z). \qquad (2)$$

В этом выражении: $y_l^{(k)}(z)$ - полином степени $(t-1)$ над полем комплексных чисел, образованный блоком из t отсчетов на выходе k-го канала, $k=1,...,M$, $l=0,...,N-1$- номер блока выходных отсчетов; $L=\max\{L_1,...,L_M\}$- максимальная длина векторного канала; $x_l(z)$ - полином степени $(t-1)$ над полем комплексных чисел, образованный блоком из t информационных отсчетов на входе канала.

Наша задача найти условия, которым должны удовлетворять детерминированная информационная последовательность и отсчеты векторного канала, при выполнении которых набор полиномов $\left\{y_l^{(1)}(z),...,y_l^{(M)}(z)\right\}$ кольца $C[z]$, однозначно характеризует коэффициенты канала $h_0^{(1)},...,h_{L-1}^{(1)},...,h_0^{(M)},...,h_{L-1}^{(M)}$ и коэффициенты информационной последовательности.

Рассмотрим случай детерминированной идентификации векторного канала для $M=2$ в полиномиальной интерпретации (2). Анализируя структуру преобразования (2) легко заметить, что если $N=L$, то справедливо следующее соотношение:

$$\sum_{l=0}^{L-1} y_l^{(1)}(z) h_l^{(2)} - \sum_{l=0}^{L-1} y_l^{(2)}(z) h_l^{(1)} = 0\,. \qquad (3)$$

В этом уравнении $2L$ неизвестных $h_0^{(1)},...,h_{L-1}^{(1)},h_0^{(2)},...,h_{L-1}^{(2)}$. Выберем $2L$ различных значений формальной переменной $z_1,...,z_{2L}$. Тогда используя (3) мы можем записать $2L$ однородных линейных уравнений относительной $2L$ неизвестных коэффициентов канала.

В матричной форме, получим:

$$\mathbf{Y}_1(z_1,...,z_{2L})\mathbf{h} = \begin{pmatrix} y_0^{(1)}(z_1) & \ldots & y_{L-1}^{(1)}(z_1) & -y_0^{(2)}(z_1) & \ldots & -y_{L-1}^{(2)}(z_1) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_0^{(1)}(z_{2L}) & \ldots & y_{L-1}^{(1)}(z_{2L}) & -y_0^{(2)}(z_{2L}) & \ldots & -y_{L-1}^{(2)}(z_{2L}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_0^{(2)} \\ \vdots \\ h_{L-1}^{(2)} \\ h_0^{(1)} \\ \vdots \\ h_{L-1}^{(1)} \end{pmatrix} = 0 \quad (4)$$

Для того, чтобы система линейных уравнений (4) имела единственное нетривиальное решение необходимо и достаточно чтобы ранг матрицы $\mathbf{Y}_1(z_1,...,z_{2L})$ был равен $(2L-1)$. Используя формулы (2) матрицу системы уравнений (4) можно представит в виде:

$$
\mathbf{Y}_1(z_1,...,z_{2L}) = \begin{pmatrix} x_0(z_1) & \dots & x_{2L-2}(z_1) \\ \vdots & & \vdots \\ x_0(z_{2L}) & \dots & x_{2L-2}(z_{2L}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_0^{(1)} & \dots & 0 & -h_0^{(2)} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{L-1}^{(1)} & & h_0^{(1)} & -h_{L-1}^{(2)} & & -h_0^{(2)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & h_{L-1}^{(1)} & 0 & \dots & -h_{L-1}^{(2)} \end{pmatrix} = \quad (5)
$$

$$
= \mathbf{X}(z_1,...,z_{2L})\mathbf{H}_{1,2}.
$$

Т.о. для идентифицируемости системы необходимо и достаточно, чтобы выполнялись два условия: 1) ранг $(2L \times 2L-1)$ матрицы $\mathbf{X}(z_1,...,z_{2L})$ равен $(2L-1)$, для любых различных $z_1,...,z_{2L}$; 2) ранг $(2L-1\times 2L)$ матрицы $\mathbf{H}_{1,2}$ равен $(2L-1)$.

Для того чтобы матрица $\mathbf{H}_{1,2}$ имела ранг $(2L-1)$ необходимо, что бы нашелся не равный нулю минор порядка $(2L-1)$. Используя перестановку строк матрицу $\mathbf{H}_{1,2}$ для случая $L_2 \geq L_1$ можно представить в виде:

$$
\mathbf{H}_{1,2} = \mathbf{T}^{-1} \begin{pmatrix} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & \vdots & & & \vdots \\ Syl(h_1(z),h_2(z))^T & -h_0^{(2)} & & & h_0^{(1)} \\ & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & -h_{L_2-1}^{(2)} & & -h_{L_2-1}^{(2)} & h_{L_1-1}^{(1)} \\ 0 & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & 0 & \dots & -h_{L_2-1}^{(2)} & 0 \end{pmatrix}. \quad (6)
$$

Где $\mathbf{T}$ - матрица перестановки, $Syl(h_1(z),h_2(z))$ это матрица Сильвестра, образованная коэффициентами полиномов $h_1(z)$ и $-h_2(z)$, которые соответствуют каналам $h_0^{(1)},...,h_{L_1-1}^{(1)}$ и $h_0^{(2)},...,h_{L_2-1}^{(2)}$. Поскольку $\det(Syl(h_1(z),h_2(z)))$ равен результанту полиномов $h_1(z)$ и $h_2(z)$, то в соответствии с известным фактом теории результантов [1] $\det(Syl(h_1(z),h_2(z)))=0$ только если полиномы $h_1(z)$ и $h_2(z)$ имеют общий корень. Тогда если длина $L_2 = L$, то главный минор матрицы (1.6) равен $\left(-h_{L-1}^{(2)}\right)^{L-L_1+1}\det(Syl(h_1(z),h_2(z)))$, т.е. не равен нулю.

Первое условие содержит в себе еще два ограничения, которые становятся более очевидны, если представить матрицу $\mathbf{X}(z_1,...,z_{2L})$ в виде:

$$
\mathbf{X}(z_1,...,z_{2L}) = \begin{pmatrix} 1 & z_1 & \dots & z_1^{t-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & z_{2L} & \dots & z_{2L}^{t-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_{2L-2} \\ x_1 & x_2 & \dots & x_{2L-1} \\ x_2 & x_3 & \dots & x_{2L} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_t & x_{t+1} & & x_{t+2L-2} \end{pmatrix} = \mathbf{V}_t^{2L}(z_1,...,z_{2L})\mathbf{X}_H(2L-1). \quad (7)
$$

Где: $\mathbf{V}_t^{2L}(z_1,...,z_{2L})$- матрица Вандермонда имеет ранг $2L-1$ если $t \geq 2L-1$, и $\mathbf{X}_H(2L-1)$ - ганкелева матрица, составленная из отсчетов информационной последовательности имеет полный ранг по столбцам. Данное свойство характеризуется т.н. линейной сложностью информационной последовательности.

Линейная сложность детерминированной последовательности это наименьшее значение D такое, что $\mathbf{X}_H(D)$ имеет полный ранг по столбцам или существуют такие не равные нулю одновременно $\{\lambda_j\}$ для которых:

$$x_i = -\sum_{j=1}^{D} \lambda_j x_{i-j} \quad i = D,...,t+2L-2\,. \tag{8}$$

Линейная сложность характеризует степень предсказуемости детерминированной последовательности ограниченной длины. Для того чтобы матрица $\mathbf{X}_H(2L-1)$ имела полный ранг по столбцам, линейная сложность информационной последовательности должна быть больше $(2L-2)$.

Т.о. мы определили необходимые и достаточные условия идентифицируемости векторного канала для случая $M = 2$. Сформулируем этот результат в виде следующей теоремы, обобщив его на случай $M > 2$.

Теорема. Для идентифицируемости детерминированного векторного канала необходимо и достаточно выполнения следующих условий:

1) полиномы $h_1(z),...,h_M(z)$ не должны иметь общих корней;

2) линейная сложность информационной последовательности должна быть больше $(2L-2)$;

3) длина информационной последовательности должна быть больше $(4L-3)$ или длина вектора данных больше $(3L-2)$.

Доказательство: Случай $M = 2$ был нами доказан. Докажем теперь общий случай.

Уравнение (3) для любой пары, образованной i-м и j-м каналом имеет вид:

$$\sum_{l=0}^{L-1} y_l^{(i)}(z) h_l^{(j)} - \sum_{l=0}^{L-1} y_l^{(i)}(z) h_l^{(j)} = 0\,, \tag{9}$$

где: $i, j = 1,...,M$.

Среди этих уравнений нетривиальных и несовпадающих $K = M(M-1)/2$ для LM неизвестных. Из них мы всегда можем сформировать дополнительные, выбирая сечения $z_1,...,z_s$ так что $sK \geq LM$. Запишем (9) в матричной форме, аналогично (4), пусть:

$$\mathbf{Y}^{(i)}(z_1,...,z_s)=\begin{pmatrix} y_0^{(i)}(z_1) & ... & y_{L-1}^{(i)}(z_1) \\ \vdots & & \vdots \\ y_0^{(i)}(z_s) & ... & y_{L-1}^{(i)}(z_s) \end{pmatrix},\ i=1,...,M \tag{10}$$

$$\mathbf{Y}_i(z_1,...,z_s)=\begin{pmatrix} 0 & ... & 0 & \mathbf{Y}^{(i+1)}(z_1,...,z_s) & -\mathbf{Y}^{(i)}(z_1,...,z_s) & ... & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & ... & 0 & \mathbf{Y}^{(M)}(z_1,...,z_s) & 0 & ... & -\mathbf{Y}^{(i)}(z_1,...,z_s) \end{pmatrix} \tag{11}$$

$$\mathbf{Y}(z_1,...,z_s)=\begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1(z_1,...,z_s) \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_{M-1}(z_1,...,z_s) \end{pmatrix} \tag{12}$$

Матрица $\mathbf{Y}^{(i)}(z_1,...,z_s)$ имеет размер $(s\times L)$, блочная матрица $\mathbf{Y}_i(z_1,...,z_s)$ имеет размер $((M-i)s\times LM)$ и $\mathbf{Y}(z_1,...,z_s)$ соответственно $(Ks\times LM)$.

Определим вектор $\mathbf{h}^T=\left(h_0^{(1)},...,h_{L-1}^{(1)},...,h_0^{(M)},...,h_{L-1}^{(M)}\right)$, тогда (4) можно записать в виде:

$$\mathbf{Y}(z_1,...,z_s)\mathbf{h}=0 \tag{13}$$

Для однозначной идентификации необходимо и достаточно, что бы для любых различных чисел $z_1,...,z_s$ ранг матрицы $\mathbf{Y}(z_1,...,z_s)$ был равен $(ML-1)$. Пусть $\mathbf{H}^{(i)}$ - тёплицева матрица, и пусть:

$$\mathbf{H}_i=\begin{pmatrix} 0 & ... & 0 & \mathbf{H}^{(i+1)} & -\mathbf{H}^{(i)} & ... & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & ... & 0 & \mathbf{H}^{(M)} & 0 & ... & -\mathbf{H}^{(i)} \end{pmatrix},\qquad \mathbf{H}^{(i)}=\begin{pmatrix} h_0^{(i)} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{L-1}^{(i)} & & h_0^{(i)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & h_{L-1}^{(i)} \end{pmatrix}. \qquad 14)$$

Тогда:

$$\mathbf{Y}_i(z_1,...,z_s)=\mathbf{X}_i\mathbf{H}_i=\begin{pmatrix} \mathbf{X}(z_1,...,z_s) & ... & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & ... & \mathbf{X}(z_1,...,z_s) \end{pmatrix}\mathbf{H}_i, \tag{15}$$

$$\mathbf{Y}(z_1,...,z_s)=\mathbf{X}_\Sigma\mathbf{H}=\begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 & ... & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & ... & \mathbf{X}_{M-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{H}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{H}_{M-1} \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Т.к. при выполнении 2-го и 3-го условий теоремы матрица информационной последовательности $\mathbf{X}_\Sigma$ имеет ранг $rank(\mathbf{X}_\Sigma)=\min\{sK,(2L-1)K\}$. Тогда в соответствии с неравенством Фробениуса и неравенством $sK\ge LM$ $rank(\mathbf{Y}(z_1,...,z_s))\ge rank(\mathbf{H})$. Очевидно, что $rank(\mathbf{H})<ML$, поскольку легко проверить равенство $\mathbf{H}\mathbf{h}=0$ где $\mathbf{h}\ne 0$.

Покажем, что при выполнении условия 1) $rank(\mathbf{H}) = (ML-1)$. Введем новые переменные $\mathbf{v}^T = \left(v_0^{(1)},...,v_{L-1}^{(1)},...,v_0^{(K)},...,v_{L-1}^{(K)}\right)$, так что имеют место следующие уравнения:

$$\begin{cases} v_0^{(1)} = \hat{h}_0^{(1)},...,v_{L-1}^{(1)} = \hat{h}_{L-1}^{(1)}, \\ v_0^{(3)} = \hat{h}_0^{(1)},...,v_{L-1}^{(3)} = \hat{h}_{L-1}^{(1)}, \\ ... \\ v_0^{(K-2)} = \hat{h}_0^{(M)},...,v_{L-1}^{(K-2)} = \hat{h}_{L-1}^{(M)}, \\ v_0^{(K)} = \hat{h}_0^{(M)},...,v_{L-1}^{(K)} = \hat{h}_{L-1}^{(M)}. \end{cases} \tag{17}$$

Тогда уравнение $\mathbf{H}\hat{\mathbf{h}} = 0$ эквивалентно следующей системе уравнений:

$$\mathbf{H}'\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_{2,1} & & ... & & 0 \\ & \ddots & & & \\ \vdots & & \mathbf{H}_{M,1} & & \vdots \\ & & & \ddots & \\ 0 & & ... & & \mathbf{H}_{M,M-1} \\ \mathbf{I}_{2L} & & ... & & \mathbf{I}_{2L} \end{pmatrix} \mathbf{v} = \mathbf{0}, \tag{18}$$

где $\mathbf{I}_{2L}$ - единичная $2L \times 2L$ матрица. Условие $rank(\mathbf{H}) = (ML-1)$ эквивалентно условию $rank(\mathbf{H}') = (K(2L)-1)$. Проведя элементарные преобразования по аналогии с (6) легко убедиться в справедливости последнего утверждения, для чего необходимо и достаточно выполнение условия 1). Теорема доказана.

Данная теорема (впервые сформулированная в [2,3]) играет ключевую роль в задачах слепой детерминированной идентификации векторных каналов. В данной работе мы приводим несколько модифицированное доказательство этой теоремы в необходимой нам полиномиальной интерпретации.

3. Алгоритм нулевого подпространства

Рассмотрим задачу построения алгоритма слепой идентификации векторного канала. Алгоритмы слепой идентификации, рассматриваемые в данном разделе, основаны на свойстве взаимной симметрии выходных сигналов каналов, на входе которых присутствует одна и та же информационная последовательность. Данное свойство было использовано нами выше в доказательстве теоремы при записи выражения (3).

В соответствии с этим свойством матричное уравнение (13) в отсутствии шума имеет единственное, с точностью до комплексного множителя, решение для любых различных чисел $z_1,...,z_s$. Другими словами нуль-пространство $Ks \times LM$ матрицы $\mathbf{Y}(z_1,...,z_s)$ является линейной оболочкой единственного базисного вектора $\mathbf{h}^T = \left(h_0^{(1)},...,h_{L-1}^{(1)},...,h_0^{(M)},...,h_{L-1}^{(M)}\right)$ или, что эквивалентно, $\mathbf{h}$ является собственным вектором матрицы $\mathbf{Y}^*(z_1,...,z_s)\mathbf{Y}(z_1,...,z_s)$, соответствующим нулевому собственному числу.

Наличие шума заставляет нас искать приближенное решение наилучшее, с точки зрения некоторого критерия качества. Идентифицируемая система в этом случае описывается следующим выражением:

$$y_l^{(k)}(z) = \sum_{i=0}^{L-1} h_i^{(k)} x_{i+l}(z) + v_l^{(k)}(z), \tag{19}$$

где $v_l^{(k)}(z)$ полином степени $(t-1)$ над полем комплексных чисел, образованный блоком из t отсчетов на выходе k-го канала. Для небольших значений уровня шума весьма эффективным оказывается метод наименьших квадратов, в соответствии с которым [4]:

$$\hat{\mathbf{h}} = \arg\min_{\|\mathbf{h}\|=1} \left\| \mathbf{Y}(z_1,...,z_s)\mathbf{h} \right\|_2^2, \tag{20}$$

где: $\|\bullet\|_2^2$ - евклидова векторная норма.

Эквивалентно, оценка канала $\mathbf{h}$ может быть получена из собственного вектора, связанного с наименьшим сингулярным значением матрицы $\mathbf{Y}(z_1,...,z_s)$ [5]:

Метод слепой идентификации, описываемый выражением (20) в несколько иной форме хорошо известен в литературе как «метод взаимных отношений» [6,7]. Метод был впервые предложен в [8], а также независимо рядом других авторов (см. библиографию в [10]).

В отличие от большинства известных статистических методов слепой идентификации [6,7], метод взаимных отношений является весьма эффективным для небольших выборок при большом отношении сигнал-шум. В [8] методом моделирования показано, что данный метод дает оценку близкую к границе Рао-Крамера. Использование полиномиального представления позволит нам несколько упростить вычислительную структуру алгоритма взаимных отношений и получить аналитическое решение задачи слепой идентификации в данном случае. Для этого запишем (3) в виде:

$$\sum_{l=0}^{L-1} y_l(z,s_1)h_l(s_2) - \sum_{l=0}^{L-1} y_l(z,s_2)h_l(s_1) = 0, \tag{21}$$

$$y_l(z,s) = \sum_{i=0}^{M-1}\sum_{j=0}^{t-1} y_{j+l}^i z^j s^i, \; h_l(s) = \sum_{i=0}^{M-1} h_l^i s^i.$$

Выберем $2L-1$ различных значений формальной переменной $z_1,...,z_{2L-1}$. Тогда используя (21) мы можем записать $2L-1$ однородных линейных уравнений относительной L неизвестных полиномов $h_0(s),...,h_{L-1}(s)$. В матричной форме, получим:

$$\mathbf{Y}_1(z_1,...,z_{2L-1},s_1,s_2)\mathbf{h}(s_1,s_2)=$$

$$=\begin{pmatrix} y_0(z_1,s_2) & \dots & y_{L-1}(z_1,s_2) & -y_0(z_1,s_1) & \dots & -y_{L-1}(z_1,s_1) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_0(z_{2L-1},s_2) & \dots & y_{L-1}(z_{2L-1},s_2) & -y_0(z_{2L-1},s_1) & \dots & -y_{L-1}(z_{2L-1},s_1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_0(s_1) \\ \vdots \\ h_{L-1}(s_1) \\ h_0(s_2) \\ \vdots \\ h_{L-1}(s_2) \end{pmatrix}=0 \quad (22)$$

При выполнении условий теоремы матрица $\mathbf{Y}_1(z_1,...,z_{2L-1},s_1,s_2)$ имеет ранг $2L-1$:

$$\mathbf{Y}_1(z_1,...,z_{2L-1},s_1,s_2)=\begin{pmatrix} x_0(z_1) & \dots & x_{2L-2}(z_1) \\ \vdots & & \vdots \\ x_0(z_{2L-1}) & \dots & x_{2L-2}(z_{2L-1}) \end{pmatrix}\times$$
$$\times\begin{pmatrix} h_0(s_2) & \dots & 0 & h_0(s_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{L-1}(s_2) & & h_0(s_2) & h_{L-1}(s_1) & & h_0(s_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & h_{L-1}(s_2) & 0 & \dots & h_{L-1}(s_1) \end{pmatrix}=\mathbf{X}(z_1,...,z_{2L-1})\mathbf{H}(s_1,s_2) \quad (23)$$

Ранее при доказательстве теоремы мы показали, что ранг $(2L-1\times 2L-1)$ матрицы $\mathbf{X}(z_1,...,z_{2L-1})$ для любых различных $z_1,...,z_{2L-1}$ равен $(2L-1)$. Легко заметить также по аналогии с (6), что ранг $(2L-1\times 2L)$ матрицы $\mathbf{H}(s_1,s_2)$ также равен $(2L-1)$ если полиномы $h(z,s_1)$ и $h(z,s_1)$, где $h(z,s)=\sum_{l=0}^{M-1} h_l(z)s^l$, не имеют общих корней для различных s_1 и s_2. Это условие эквивалентно условию 1) теоремы об условиях идентифицируемости.

В отсутствии шума легко получить явное решение однородной системы уравнений (22). Так как, по условию теоремы, матрица $\mathbf{Y}_1(z_1,...,z_{2L-1},s_1,s_2)$ имеет ранг $2L-1$, то хотя бы один из ее миноров порядка $2L-1$ $\mathbf{M}_i(z_1,...,z_{2L-1},s_1,s_2)$ $i=1,...,2L$ - номер столбца, отличен от нуля, тогда решение системы уравнений (22) с точностью до произвольного комплексного коэффициента будет иметь вид:

$$\begin{aligned} h_l(s_1)&=(-1)^l\mathbf{M}_l(z_1,...,z_{2L-1},s_1,s_2), \\ h_l(s_2)&=(-1)^{L+l}\mathbf{M}_{L+l}(z_1,...,z_{2L-1},s_1,s_2), \quad l=0,...,L\text{-}1 \end{aligned}, \quad (24)$$

Заметим также, что нам нужно вычислить только L миноров, т.к. из анализа структуры матрицы (22) следует, что:

$$\mathbf{M}_{2L-l}(z_1,...,z_{2L-1},s_1,s_2)=(-1)^L\mathbf{M}_l(z_1,...,z_{2L-1},s_2,s_1) \quad (25)$$

Таким образом, мы нашли значения неизвестных полиномов $h_0(s),...,h_{L-1}(s)$ в точках s_1 и s_2. Если $M=2$ этого достаточно для оценки всех коэффициентов неизвестного векторного канала. Для того чтобы найти решение системы для произвольного числа каналов мы должны выполнить вычисления (24) в кольце $C[s_1, s_2]$. Поскольку решение системы (22) по формулам (24) не содержит операции деления, то мы получим решение с точностью до некоторого полинома $g(s_1, s_2) \in C[s_1, s_2]$. Поскольку полиномы $h_l(s_1)$ и $h_l(s_2)$ очевидно не имеют общих множителей, то неизвестный множитель $g(s_1, s_2)$ мы можем найти как наибольший общий делитель полиномов $\mathbf{M}_l(z_1,...,z_{2L-1}, s_1, s_2)$ и $\mathbf{M}_{L+l}(z_1,...,z_{2L-1}, s_1, s_2)$, используя, например алгоритм Евклида. Конечно, такой алгоритм не имеет практического значения из-за больших вычислительных затрат.

Альтернативный путь состоит в формировании системы линейных уравнений для M значений полиномов канала $h_l(s_1),...,h_l(s_M)$. Запишем неизвестные значения в виде вектора $\mathbf{h}(s_1,...,s_M) = (h_0(s_1),...,h_{L-1}(s_1),...,h_0(s_M),...,h_{L-1}(s_M))^T$. Тогда система линейных уравнений в матричной форме имеет вид:

$$\mathbf{Y}(z_1,...,z_r, s_1,...,s_M)\mathbf{h}(s_1,...,s_M) = \\ = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1(z_1,...,z_r, s_1, s_2) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathbf{Y}_1(z_1,...,z_r, s_{M-1}, s_M) \end{pmatrix} \mathbf{h}(s_1,...,s_M) = 0, \tag{26}$$

где: $\mathbf{Y}(z_1,...,z_r, s_1,...,s_M)$ $(M-1)r \times LM$ комплексная матрица ранга $(ML-1)$, r как и ранее, выбирается из условия $(M-1)r \ge LM - 1$. Общее решение для коэффициентов канала может быть найдено далее по интерполяционной формуле Лагранжа.

Т.о. в отсутствии шума алгоритм слепой идентификации канала сводится к вычислению базиса нуль-пространства матрицы $\mathbf{Y}(z_1,...,z_r, s_1,...,s_M)$. Условия теоремы обеспечивают единственность решения этой задачи, т.е. наличие единственного нулевого собственного числа и соответствующего ему единственного собственного вектора с точностью до комплексной константы, за счет строгого равенства $rank(\mathbf{Y}(z_1,...,z_r, s_1,...,s_M)) = ML - 1$. Данный алгоритм далее будем называть алгоритмом нулевого подпространства (АНП).

Наличие аддитивного шума в матрице входных данных $\widetilde{\mathbf{Y}}(z_1,...,z_r, s_1,...,s_M) = \mathbf{Y}(z_1,...,z_r, s_1,...,s_M) + \mathbf{V}(z_1,...,z_r, s_1,...,s_M)$ создает условия, когда $rank(\widetilde{\mathbf{Y}}(z_1,...,z_r, s_1,...,s_M))$ может быть равен ML или может быть меньше $(LM-1)$. В первом случае нуль-пространство матрицы состоит только из нулевого вектора, а во втором содержит несколько базисных векторов. Поэтому задача слепой идентификации может вообще не иметь решения или решение задачи становится неоднозначным.

Как уже отмечалось выше, в этом случае мы можем использовать стратегию метода наименьших квадратов, т.е. в качестве решения задачи для случая

$rank\left(\widetilde{\mathbf{Y}}(z_1,...,z_r,s_1,...,s_M)\right)= ML$ взять собственный вектор, соответствующий минимальному по модулю собственному числу матрицы $\widetilde{\mathbf{Y}}^*(z_1,...,z_r,s_1,...,s_M)\widetilde{\mathbf{Y}}(z_1,...,z_r,s_1,...,s_M)$.

В этом случае решение задачи всегда единственно и, как известно [9] минимизирует функционал $\left\|\widetilde{\mathbf{Y}}(z_1,...,z_r,s_1,...,s_M)\hat{\mathbf{h}}(s_1,...,s_M)\right\|_2^2$, при ограничении нормы $\left\|\hat{\mathbf{h}}(s_1,...,s_M)\right\|_2^2 = 1$.

Поскольку выбор числа уравнений и соответственно числа строк в матрице $\widetilde{\mathbf{Y}}(z_1,...,z_r,s_1,...,s_M)$ в отличие от традиционного подхода [10] в нашей интерпретации произволен, то мы можем выбрать их число строго равным $(LM-1)$. Тогда $rank\left(\widetilde{\mathbf{Y}}(z_1,...,z_{r'},s_1,...,s_M)\right)\le ML-1$ теперь уже за счет линейной независимости строк. При этом, поскольку $r=(LM-1)/(M-1)$ целое только в частных случаях, то мы выбираем r как наименьшее целое, а r' так, что $(M-2)r + r' = LM-1$. Тогда:

$$\widetilde{\mathbf{Y}}(z_1,...,z_{r'},s_1,...,s_M)=\begin{pmatrix} \widetilde{\mathbf{Y}}_1(z_1,...,z_r,s_1,s_2) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \widetilde{\mathbf{Y}}_1(z_1,...,z_{r'},s_{M-1},s_M) \end{pmatrix}. \tag{27}$$

Теперь мы можем решать задачу слепой идентификации векторного канала при наличии шума используя алгоритмы точного решения однородной системы уравнений.

При этом, поскольку нуль-пространства матриц $\widetilde{\mathbf{Y}}(z_1,...,z_{r'},s_1,...,s_M)$ и $\widetilde{\mathbf{Y}}^*(z_1,...,z_{r'},s_1,...,s_M)\widetilde{\mathbf{Y}}(z_1,...,z_{r'},s_1,...,s_M)$ совпадают, то решение, получаемое, например, по формулам (24) и решение вариационной задачи (20) совпадают с точностью до комплексного множителя, и являются нормальным псевдорешением однородной системы уравнений (26). Т.е. мы показали эквивалентность оценки АНП и оценки, полученной в рамках метода наименьших квадратов.

Несмотря на то, что формулы (24) дают явное решение, непосредственное их использование для нахождения численного решения однородной системы, задаваемой матрицей (27) нецелесообразно даже при сравнительно небольших размерах матрицы, поскольку требует вычисления $(LM-1)$ определителей размера $(LM-1)$. Поэтому более целесообразно использование алгоритмов имеющих меньшие вычислительные затраты.

Одним из таких методов может быть несколько модифицированный метод Перселла [9]. В рамках данного подхода мы интерпретируем систему однородных уравнений с матрицей (26) как условия ортогональности вектора $\mathbf{h}(s_1,...,s_M)$ с $(LM-1)$ линейно независимыми строками матрицы (26). При этом решение системы находится путем построения базисов подпространств унитарного линейного пространства C^{LM} убывающих размерностей:

$$C^{LM} = R_0 \supset R_1 ... \supset R_k \supset ... \supset R_{LM-1}, \tag{28}$$

где: R_k - подпространство, состоящее из векторов, ортогональных к первым k строкам $\mathbf{y}_1,...,\mathbf{y}_k$ матрицы $\widetilde{\mathbf{Y}}(z_1,...,z_{r'},s_1,...,s_M)$. Базис подпространства R_k строиться из базиса подпространства R_{k-1} в виде следующих линейных комбинаций:

$$\mathbf{e}_i^k = \mathbf{e}_i^{k-1} - c_i^k \mathbf{e}_k^{k-1}, \qquad i = k+1,...,LM \tag{29}$$

Коэффициенты c_i^k определяются из условия ортогональности строк матрицы $\widetilde{\mathbf{Y}}(z_1,...,z_{r'},s_1,...,s_M)$ и вектора решения, в виде:

$$c_i^k = \frac{\left(\mathbf{y}_k, \mathbf{e}_i^{k-1}\right)}{\left(\mathbf{y}_k, \mathbf{e}_k^{k-1}\right)} \tag{30}$$

Для реализуемости процесса необходимо, чтобы скалярные произведения $\left(\mathbf{y}_k, \mathbf{e}_k^{k-1}\right)$ были отличными от нуля. Если $k = 0$, то в качестве базиса берется естественный базис в C^{LM}: $\mathbf{e}_1^0 = (1,0,...,0),...,\mathbf{e}_{LM}^0 = (0,...,0,1)$.

Подпространство R_{LM-1} является нуль-пространством матрицы $\widetilde{\mathbf{Y}}(z_1,...,z_{r'},s_1,...,s_M)$, т.к. единственный базисный вектор этого подпространства ортогонален ко всем линейно независимым векторам $\mathbf{y}_1,...,\mathbf{y}_{LM-1}$ и является численным решением системы однородных уравнений, заданных матрицей (27).

Т.о. мы получили итерационную модификацию АНП, которая, конечно с точки зрения погрешности, эквивалентна АНП в аналитической форме, но требует меньших вычислительных затрат.

Теперь рассмотрим вопрос о выборе значений формальных переменных $z_1,...,z_{r'},s_1,...,s_M$ при формировании системы уравнений (26). Ранее мы требовали, чтобы эти множества не содержали совпадающих значений. Если матрица $\widetilde{\mathbf{Y}}(z_1,...,z_{r'},s_1,...,s_M)$ содержит отсчеты аддитивного шума, то выбор значений формальных переменных будет влиять на обусловленность матрицы и соответственно на погрешность алгоритма. Поэтому мы должны выбрать различные значения формальных переменных $z_1,...,z_{r'},s_1,...,s_M$ так, чтобы минимизировать в некотором унитарном пространстве переменных $z_1,...,z_{r'},s_1,...,s_M$ функционал погрешности алгоритма слепой идентификации.

Относительную погрешность слепой оценки можно оценить следующим неравенством:

$$\gamma^2 \le 4(LM-1)\frac{\alpha_1^2(z_1,...,z_{r'},s_1,...,s_M)\alpha_2^2(s_1,...,s_M)}{q^2(z_1,...,z_{r'},s_1,...,s_M)}. \tag{31}$$

где $\alpha_2^2(s_1,...,s_M)$ - число обусловленности невырожденной матрицы Вандермонда $\mathbf{V}_M^M(s_1,...,s_M)$, число обусловленности матрицы, $\mathbf{Y}(z_1,...,z_{r'},s_1,...,s_M)$ ранга $(LM-1)$ по отношению к собственному вектору, соответствующему нулевому собственному числу, параметр $q^2(z_1,...,z_{r'},s_1,...,s_M)$ имеет смысл отношения сигнал-шум. Выбор значений формальных переменных $s_i=\exp(-j2\pi i/M)$, $i=1,...,M$, и $z_i=\exp(-j2\pi i/r')$, $i=0,...,t-1$ при выполнении условия $t=r'=r$ обеспечивают минимальное значение относительной погрешности оценки канала, при $t=r'\neq r$ данный выбор обеспечивает решение близкое к оптимальному при одинаковой дисперсии белого гауссовского шума в подканалах. В целом, при наличии сосредоточенных помех, различия параметров аддитивного шума в разных подканалах, корреляции отсчетов шума, выбор сечений $z_1,...,z_{r'},s_1,...,s_M$ должен проводиться минимизацией функционала в правой части (31).

На Рис.1. показаны результаты математического моделирования АНП при различных длинах канала в сравнении со стандартным алгоритмом взаимных отношений (ВО) [10]. Относительная погрешность оценки канала оценивалась по формуле:

$$\gamma^2=\mathbf{M}\left\{\left\|\mathbf{h}-\hat{\mathbf{h}}\right\|_2^2\Big/\left\|\mathbf{h}\right\|_2^2\right\} \tag{32}$$

При моделировании в качестве входных отсчетов, отсчетов шума и отсчетов векторного канала дискретной модели использовались независимые реализации гауссовых случайных векторов в свою очередь с независимыми компонентами. При вычислении выборочного математического ожидания в формуле (32) при моделировании усреднялись как реализации шума, так и отсчеты информационной последовательности и канала.

Приемлемый уровень погрешности достигается при отношении сигнал-шум более 30Дб. При увеличении длины канала погрешность растет линейно, однако при увеличении числа каналов для больших отношений сигнал шум длина канала практически не влияет на величину погрешности.

4. Заключение

Рассмотрена задача оценки неизвестного канала распространения неизвестного сигнала при разнесенном в пространстве или во времени приеме (задача слепой идентификации векторного канала). Показано, что полиномиальная интерпретация метода взаимных отношений позволяет использовать для решения вариационной задачи метода минимальных квадратов алгоритмы решения системы однородных уравнений. Полученный в рамках данного подхода алгоритм АНП слепой идентификации векторного канала, эквивалентен оценке, полученной в рамках метода наименьших квадратов, и допускает аналитическую и итерационную формы представления решения. АНП при больших значениях сигнал шум практически совпадает с классическим алгоритмом ВО, однако в отличие от АНП алгоритм ВО имеют более резкий рост погрешности при малых отношениях сигнал-шум.

Литература

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1975. – 431с.
2. Xu G., Liu H., Tong L., Kailath T. A least-squares approach to blind channel identification. – IEEE Trans. Signal Processing. - 1995. – Vol. SP-43, - N 12. – P. 2982-2993.
3. Hua Y., Vax M. Strict identifiability of multiple FIR channels driven by an unknown arbitrary sequence // IEEE Trans. Signal Processing. - 1996. – Vol.-44, - N 3. – P. 756-759.
4. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 552с.
5. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ: Пер. с англ. – М.: Мир, 1989. – 665с.
6. Горячкин О.В. Методы слепой обработки сигналов и их приложения в системах радиотехники и связи. – М.: Радио и связь, 2003. – 230с.
7. Горячкин О.В., Добрынин С.С. Слепая идентификация систем связи: обзор методов // Инфокоммуникационные технологии. - 2003. - №3.
8. Hua Y. Fast maximum likelihood for blind identification of blind identification of multiple FIR channels // IEEE Transactions on Signal Processing. - vol. 44, Mar. – 1996. - P.661-672.
9. Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. – СПб.: Издательство «Лань», 2002. – 736с.
10. Tong L., Perreau S. Blind Channel Estimation: From Subspace to Maximum Likelihood Methods // IEEE Proceedings. – 1998. - vol.86. - no.10 – P.1951-1968.

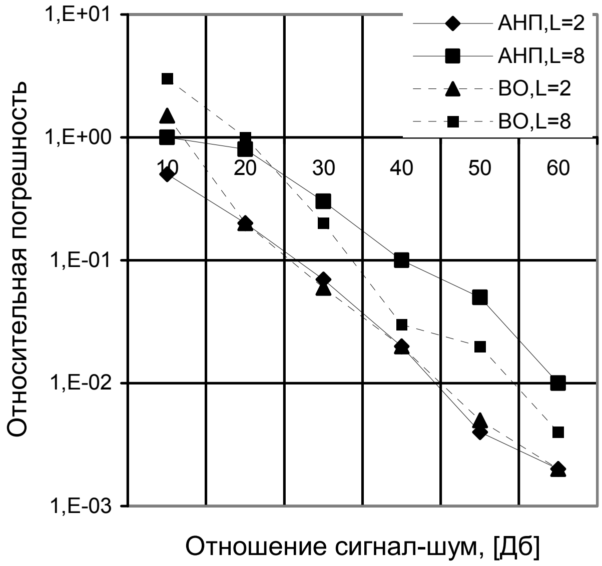

Рис.1. Относительная погрешность АНП, при М=3.