УДК 621.396.96 *ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА*

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ СТАТИСТИКИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ЗАДАЧЕ СЛЕПОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Горячкин О.В.

Представлено академиком РАН Ю.В. Гуляевым

Введение. В последние годы наблюдается большой интерес к так называемой “слепой проблеме” [1,3]. Суть «слепой проблемы» можно сформулировать как задачу восстановления неизвестных сигналов прошедших линейный канал или среду с неизвестными характеристиками на фоне аддитивных шумов. Ключевым элементом этой задачи является оценка импульсной характеристики (ИХ) канала только по наблюдаемым сигналам – слепая идентификация. Слепая идентификация является противоположностью задачам классической идентификации систем, где используются как наблюдаемый сигнал, так и считаются известными входные сигналы.

«Слепая проблема» часто возникает в различных приложениях цифровой обработки сигналов и изображений: в системах радиотехники, в том числе в системах радиолокации, радионавигации, радиоастрономии, цифрового телевидения; в системах радиосвязи и т.д. [1,3].

Для каналов с одним входом и одним выходом условия идентифицируемости формулируются в контексте статистической идентификации. Статистическая идентификация предполагает наличие некоторого множества реализаций выходного сигнала, при формировании которых ИХ канала постоянна.

Основной подход при слепой статистической идентификации это метод моментов, суть которого, в замене уравнений, связывающих сигналы на входе и выходе системы, уравнениями, связывающими соответствующие моментные функции. Хорошо известно, например, что ковариационные функции стационарного процесса на выходе линейной системы не содержат информации о фазе её передаточной функции, и идентификация возможна только для систем с минимальной фазой. Поэтому, в этом случае для идентификации используются статистики высокого порядка и соответственно негауссовы модели входных сигналов [2]. Использование статистик 2-го порядка для слепой идентификации канала возможно для нестационарной модели входного или выходного сигналов и в частном случае периодически-нестационарного сигнала [1]. Во всех этих случаях, тем не менее, статистики входных сигналов предполагаются априори известными. Однако часто данное требование не может быть выполнено. Например, в задачах радиолокации статистика коэффициента обратного рассеяния зависит от свойств цели, в системах радиосвязи статистика сигнала определяется передаваемым сообщением.

В данной работе предлагается новый подход к решению задачи статистической слепой идентификации, основанный на полиномиальном представлении моментов случайных последовательностей [3]. В рамках данного подхода решение задачи слепой идентификации «переносится» из линейного пространства в кольцо полиномов от многих переменных и используется успешно развивающийся в последние годы математический аппарат, созданный в рамках алгебраической геометрии и коммутативной алгебры. При этом удается решить задачу слепой идентификации при различной степени априорной неопределенности относительно статистики информационных сигналов, вплоть до полной априорной неопределенности.

Полиномиальные статистики. Полиномиальный кумулянт порядка $(k+m)$, $k=k_1+k_2+\ldots+k_r$, $m=m_1+m_2+\ldots+m_r$ случайного вектора $\mathbf{x}$ определяется как полином r переменных принадлежащий кольцу $C[z_1,\ldots,z_r]$:

$$K^x{}_{k_1,\ldots,k_r,m_1,\ldots,m_r}(z_1,z_2,\ldots,z_r)=cum\left\{x(z_1)^{k_1}\ldots x(z_r)^{k_r}\,x^*(z_1)^{m_1}\ldots x^*(z_r)^{m_r}\right\}.$$

Для каждого полиномиального кумулянта $K^x{}_{k_1,\ldots,k_r,m_1,\ldots,m_r}(z_1,z_2,\ldots,z_r)$ задается множество точек в пространстве C^r на котором значение полиномиального кумулянта равно нулю

$$\Xi^x{}_{k_1,\ldots,k_r,m_1,\ldots,m_r}=\left\{z\in C^r : K^x{}_{k_1,\ldots,k_r,m_1,\ldots,m_r}(z_1,z_2,\ldots,z_r)=0\right\}.$$

Заданное таким образом множество точек является аффинным многообразием в пространстве C^r и называется многообразием заданной корреляции [3].

Возможности статистической слепой идентификации. Положим, что входная последовательность имеет конечную длину и для обработки доступно некоторое множество реализаций, число которых достаточно для статистической идентификации. Тогда сигнал на выходе линейной стационарной системы можно записать в виде произведения полиномов положительной степени над полем комплексных чисел $C[z]$

$$y(z)=h(z)x(z)+v(z)\quad . \tag{1}$$

В этом выражении $y(z), h(z), x(z), v(z) \in C[z]$ - полиномы, соответствующие наблюдаемому дискретизированному сигналу, конечной дискретной ИХ канала, информационной последовательности на входе канала и отсчетам шума, соответственно. Обычно при построении алгоритмов слепой идентификации полагают, что полиномиальный кумулянт информационного сигнала $K^x{}_{k_1,\dots,k_r,m_1,\dots,m_r}(z_1, z_2, \dots, z_r)$ известен. Однако, в рассматриваемом случае о статистике информационной последовательности имеются лишь весьма общие предположения или таковые вообще отсутствуют.

Покажем, что в этом случае для слепой идентификации возможно использование структуры многообразий нулевой корреляции наблюдаемого сигнала. Поскольку статистика шума обычно известна, то выражение для многообразия нулевой корреляции принятого сигнала, в соответствии с (1), можно записать в виде

$$\Xi^{y-v}_{k_1,\dots,k_r,m_1,\dots,m_r}(0) = \Xi^{h}_{k_1,\dots,k_r,m_1,\dots,m_r}(0) \cup \Xi^{x}_{k_1,\dots,k_r,m_1,\dots,m_r}(0), \quad (2)$$

где

$$\Xi^h{}_{k_1,\dots,k_r,m_1,\dots,m_r}(0) = \left\{ z \in C^r : (h(z_1))^{k_1} \dots (h(z_r))^{k_r} \left(h^*(z_1)\right)^{m_1} \dots \left(h^*(z_r)\right)^{m_r} = 0 \right\},$$

$$\Xi^{y-v}{}_{k_1,\dots,k_r,m_1,\dots,m_r}(0) = \left\{ \begin{array}{l} z \in C^r : K^y{}_{k_1,\dots,k_r,m_1,\dots,m_r}(z_1, z_2, \dots, z_r) - \\ - K^v{}_{k_1,\dots,k_r,m_1,\dots,m_r}(z_1, z_2, \dots, z_r) = 0 \end{array} \right\}.$$

Поскольку полином от одной переменной в поле комплексных чисел всегда имеет полный набор корней, то многообразие $\Xi^h{}_{k_1,\dots,k_r,m_1,\dots,m_r}(0)$ нульмерно, т.е. состоит из конечного числа точек, соответствующих нулям полинома канала.

Причем, это многообразие может быть факторизовано в объединение не более $(L-1)^{2r}$ простейших многообразий, описывающих точки в C^r, где L - длина ИХ канала. С другой стороны многообразие нулевой корреляции, порождаемое случайным полиномом информационной последовательности, также может быть факторизовано в объединение неприводимых многообразий или остается неприводимым. В целом свойство неприводимости многообразия не может являться определяющим фактором разделения параметров канала и информационной последовательности. Однако, фактором разделения может стать размерность многообразия. Если многообразие, порожденное полиномом канала всегда нульмерно, то многообразие нулевой корреляции, порожденное случайным информационным сигналом имеет размерность ≥ 1. При этом нули канала и информационной последовательности могут быть отделены некоторой процедурой селекции многообразий по их размерности.

Рассмотрим в качестве примера случай идентификации по полиномиальным статистикам второго порядка и независимых одинаково распределенных отсчетов информационной последовательности. Тогда многообразие нулевой корреляции наблюдаемого сигнала в C^2 с учетом шума имеет вид

$$\Xi^{y}_{1,0,0,1}(0) = \Xi^{h}_{1,0,0,1}(0) \cup \Xi^{x}_{1,0,0,1}(0). \tag{3}$$

Многообразие $\Xi^{x}_{1,0,0,1}(0)$ является пучком кривых в C^2 и имеет размерность 1, как уже отмечалось выше $\Xi^{h}_{1,0,0,1}(0)$ нульмерно. Анализируя разложение (3) с учетом размерности простейших многообразий, можно разделить априори неизвестные многообразия канала и информационной последовательности, выбирая различные сечения $\Xi_{1,0,0,1}^{y}(0)$. Пусть $\mathbf{W}(c)$ – вектор комплексных корней полинома одной переменной z, определенный в виде

$$\mathbf{W}(c) = \mathrm{roots}\left(K_{1,0,0,1}^{y-v}(z,c)\right), \tag{4}$$

где c – константа, определяющая сечение аффинного многообразия; $\mathrm{roots}(\bullet)$ – функция вычисления корней полинома одной переменной с учетом их кратностей. Тогда принцип разделения корней ИХ и корней, индуцированных информационной последовательностью заключается в следующем: изменение значения c приводит к перемещению корней связанных с информационной последовательностью по многообразию $\Xi_{1,0,0,1}^{x}(0)$, в тоже время как корни, индуцированные неизвестным каналом, остаются на месте, это позволяет осуществить их однозначное разделение. Так, например, на Рис.1 показано перемещение на комплексной плоскости нулей, индуцированных информационной последовательностью при изменении c в (4). Причем при $c = 1$ соответствующие нули совпадают и идентификация канала невозможна.

Выводы. Использование полиномиальных статистик в задачах слепой идентификации каналов распространения сигнала, позволяет однозначно оценить импульсную характеристику канала в отсутствии априорной информации о статистических характеристиках входного сигнала. Фактором разделения является различие размерности аффинных многообразий нулевой корреляции порожденных детерминированной ИХ канала и случайного входного сигнала.

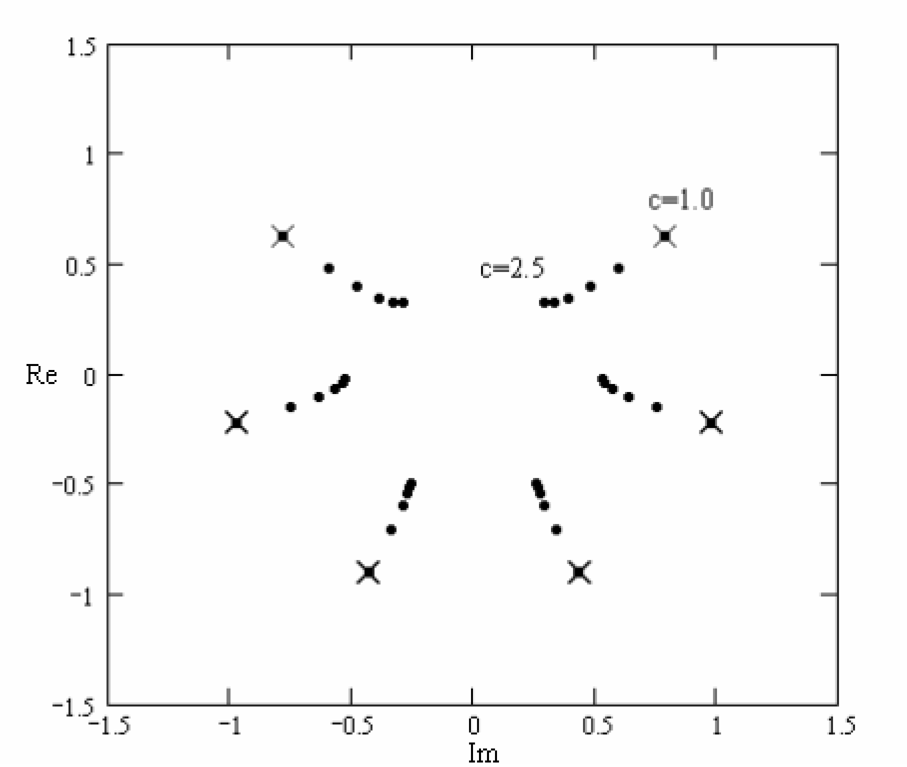

Рис.1. Пример разделения нулей системной характеристики канала по сечениям многообразий нулевой корреляции при $L = 7$, длине информационной последовательности $N = 7$, числе реализаций сигнала - 1000. Значками «×» и «•» обозначены нули системной характеристики и информационной последовательности соответственно при изменении c от 1 до 2.5.