УДК 621.396.96

МНОГООБРАЗИЯ ПОСТОЯННЫХ ПАРНЫХ КОРРЕЛЯЦИЙ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ В ЗАДАЧЕ СЛЕПОЙ ОБРАБОТКИ ШИРОКОПОЛОСНЫХ СИГНАЛОВ

О.В. Горячкин

Поволжская государственная академия информатики, радиотехники и связи,

443010, г. Самара, ул. Л. Толстого 23,

E-mail: gor@mail.radiant.ru

Аннотация: *В статье рассматривается задача слепой обработки ансамбля широкополосных сигналов, искаженных в результате прохождения через среду с неизвестными параметрами. Идентификация неизвестной передаточной функции среды обеспечивается применением отображений специального вида, полученных на аффинных многообразиях постоянных корреляций, образованных системой полиномиальных кумулянтов.*

VARIETIES OF CONSTANTS OF CONJUGATE CORRELATIONS AND THEIR APPLICATIONS IN THE PROBLEM OF BLIND PROCESSING OF WIDEBAND SIGNALS

O.V.Goriachkin

Abstract: *In the paper the problem of blind processing of set of wideband signals are discussed. The distortions of the set are a result of propagation of the signals via environment with unknown parameters. The blind identification of transfer function the using of special transformations is provided. The transformations have properties of constant coefficient of pair correlation.*

ВВЕДЕНИЕ

Использование широкополосных сигналов в системах радиолокации, связи, навигации открывает широкие возможности по увеличению их разрешающей способности, точности, пропускной способности. Помимо проблем с формированием, излучением и приемом широкополосных сигналов часто приходится иметь дело с искажениями этих сигналов, возникающими в процессе распространения. Применение широкополосных и сверхширокополосных сигналов в радиоканалах, характеризующихся многолучевым распространением, временным и частотным рассеянием часто ограничено этими эффектами. В этом случае эффективной альтернативой тестированию каналов или различного рода расчетным коррекциям могут быть алгоритмы слепой обработки сигналов.

Термин «слепая обработка сигналов» широко используется примерно с 80-х годов прошлого века. В общем виде задачу слепой обработки можно сформулировать как цифровую обработку неизвестных сигналов прошедших линейный канал или среду с неизвестными характеристиками на фоне аддитивных шумов.

Задачи слепой обработки предполагают следующую модель для описания наблюдаемых сигналов:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)\cdot x(\tau)\cdot d\tau + v(t). \quad (1)$$

Где $y(t)$ - наблюдаемый (выходной) сигнал; $h(\tau)$ - неизвестная импульсная характеристика канала; $v(t)$- аддитивная помеха; $x(\tau)$ - информационный (входной) сигнал.

Различают два основных типа задач слепой обработки сигналов: слепая идентификация канала (оценка неизвестной импульсной характеристики или передаточной функции), слепое восстановление информационного сигнала. В обоих случаях для обработки доступны только реализации входного сигнала. В случае слепой идентификации оценка импульсной характеристики может далее использоваться для оценки информационного сигнала, т.е. является первым этапом слепого восстановления, однако в некоторых приложениях важна сама по себе, поскольку содержит информацию о параметрах среды распространения.

В данной работе мы ориентируемся на решение проблемы оптимального когерентного приема неизвестных сигналов отраженных от протяженного объекта конечных размеров. Такая проблема возникает в частности при локации космических объектов через атмосферу Земли. В этом случае пачка зондирующих сигналов РЛС, проходя туда и обратно через атмосферу получает искажения, вызванные частотной зависимостью коэффициента преломления ионосферы и поляризационной дисперсией, возникающей вследствие эффекта Фарадея. Масштабы влияния данного эффекта рассмотрены в [1]. В соответствии с этими данными существенные дисперсионные искажения радиосигнала возникают уже в S диапазоне и быстро возрастают при увеличении полосы частот и длины волны.

Тогда неизвестная импульсная характеристика канала $h(\tau)$ в модели (1) это комплексная огибающая искаженного в атмосфере зондирующего сигнала РЛС, $x(\tau)$ - коэффициент обратного рассеяния объекта, являющийся реализацией конечной длины комплексного, как правило, δ - коррелированного случайного процесса.

Оптимальный прием в этом случае это свертка сигнала $y(t)$ с известным заранее сигналом $h(\tau)$. При наличии существенных фазовых искажений в качестве опорного сигнала мы используем оценку канала, полученную алгоритмом слепой идентификации в результате обработки сигнала $y(t)$. Данное устройство мы будем называть также «слепым» согласованным фильтром.

На сегодняшний день известно достаточно большое количество подходов к решению задач слепой идентификации или восстановления сигналов [2]. В данной работе мы представим новый подход к решению данной задачи, основанный на применении полиномиальных статистик случайных векторов [3].

1. ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ СТАТИСТИКИ СИГНАЛОВ

После дискретизации сигнала (1) на входе системы цифровой обработки мы имеем дискретно-временную модель канала с конечной импульсной характеристикой в виде (2).

$$y(l) = y(t)\big|_{t=lT} = \sum_{n=0}^{L-1} h(n)x(n+l) + v(l) \tag{2}$$

где: $\{x(l)\}, l = 0,...,M-1$ - комплексная информационная последовательность; $\{h(n)\}$ - импульсная характеристика дискретного канала длины L; $\{y(l)\}, l = 0,...,M-L-1$ комплексные отсчеты сигнала в приемнике.

Если входная последовательность имеет конечную длину, то выражение (2) можно записать в виде произведения полиномов положительной степени над полем комплексных чисел $C[z]$:

$$y(z) = h(z)\cdot x(z) + v(z),$$

$$y(z) = \sum_{i=0}^{M+L-1} y(i)z^i, \quad h(z) = \sum_{i=0}^{L-1} h(i)z^i, \quad x(z) = \sum_{i=0}^{M-1} x(i)z^i, \quad v(z) = \sum_{i=0}^{M+L-1} v(i)z^i. \tag{3}$$

Мы будем полагать, что нам доступна не одна, а некоторое множество реализаций выходного сигнала, возникающее вследствие зондирования объекта пачкой импульсов.

В данной работе мы будем рассматривать случайные полиномы (3) как комплексные случайные поля, определенные на комплексной плоскости. В этом случае естественно определить моментные и кумулянтные функции этих случайных полей, которые будут полиномами от многих переменных. Мы будем называть эти функции полиномиальными моментами и полиномиальными кумулянтами по аналогии с моментными и кумулянтными функциями.

Пусть $\mathbf{x} \in C^n$ - комплексный случайный вектор, описываемый плотностью вероятности $f_x(x_1,...,x_n)$, определенной в R^{2n}. Определим полиномиальный кумулянт порядка $(k+m)$, $k=k_1+k_2+...+k_R$, $m=m_1+m_2+...+m_R$ случайного вектора $\mathbf{x}$ как полином R переменных принадлежащий кольцу $C[z_1,...,z_R]$:

$$K^x{}_{k,m}(z_1,z_2,...,z_R) = cum\left\{x(z_1)^{k_1}\cdot...\cdot x(z_R)^{k_R}\cdot x^*(z_1)^{m_1}\cdot...\cdot x^*(z_R)^{m_R}\right\}. \tag{4}$$

Очевидно, что набор определенных таким образом полиномиальных кумулянтов (4) полностью определяет функцию плотности вероятности и характеристическую функцию комплексного случайного вектора образованного R значениями случайного полинома $x(z) \in C[z]$ в точках $\{z_1,...,z_R\}$ [3].

Рассмотрим роль полиномиальных кумулянтов в определении статистических связей между компонентами случайного вектора.

Пусть $x(z_1)$ и $x(z_2)$ два различных значения случайного полинома $x(z)$. Мы можем определить все возможные значения $z_1 \neq z_2$ для которых $x(z_1)$ и $x(z_2)$ имеют заданное значение корреляционной функции, решив систему полиномиальное уравнение вида:

$$V_{1,1}^x(t) = \{K_{1,1}^x(z_1, z_2) = t, \quad t \in C\} . \tag{5}$$

Заданное таким образом для каждого t аффинное многообразие $V_2^x(t)$ в C^2 будем называть многообразием заданной корреляции случайного полинома $x(z)$.

Декоррелирующее многообразие 2-го порядка случайного полинома $x(z)$ можно получить пересечением многообразий заданной корреляции, соответствующих 1-й и 2-й ковариационной функции в виде: $V_2^x = V_{2,0}^x(0) \bigcap V_{1,1}^x(0)$.

Если мы сможем выбрать m различных комплексных чисел $c_0,...,c_{m-1}$, так что любая пара, составленная из этих чисел $\in V_{2,0}^x(t)$, то мы можем определить линейное отображение вектора $\mathbf{x} \in C^n$ в вектор $\mathbf{y} \in C^m$ с помощью матрицы Вандермонда $m \times n$, составленной из всех $n-1$ степеней чисел $c_0,...,c_{m-1}$, т.е.:

$$\mathbf{y} = \mathbf{V}_n(c_0,...,c_{m-1}) \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & c_0 & ... & c_0^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & c_{m-1} & ... & c_{m-1}^{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} . \tag{6}$$

Пусть $x(z) \in$ кольцу $C[z]$ - случайный полином степени $n-1$, заданный случайным гауссовым вектором $\mathbf{x} \in R^n$ с нулевым математическим ожиданием, независимыми компонентами и дисперсией компонент σ^2, тогда многообразие заданной корреляции значений случайного полинома имеет вид:

$$V_{2,0}^x(t) = \{z_1 \cdot z_2 = \alpha_i,\ i = 1,...,n-1\}, \tag{7}$$

где $\{\alpha_1,...,\alpha_{n-1}\}$ корни полинома $P(z) = (1 - t/\sigma^2) + z + z^2 + ... + z^{n-1}$.

Построим декоррелирующее отображение для коэффициентов вектора $\mathbf{x}$. Пусть $t = 0$. Выбор точек на многообразии в принципе произволен положим $c_i = \exp\left(j \dfrac{2\pi \cdot i}{n}\right)$, $i = 0,...,m-1$, $m = \left[\dfrac{n+1}{2}\right] + 1$. Легко проверить, что все несовпадающие пары $\{c_0,...,c_{m-1}\} \in V_2^x$. Если построить многообразие, на котором равен нулю только второй полиномиальный кумулянт, то $m = n$, и получившееся преобразование будет дискретным преобразованием Фурье, что справедливо и в случае когда коэффициенты полинома комплексные независимые гауссовские величины.

Если $t \neq 0$ то выбор точек на $V_2^x(t)$, координаты которых принадлежат многообразию при любой их комбинации, не всегда возможен, однако практически всегда мы можем выбрать n различных пар комплексных чисел, каждая из которых образует точку в C^2, принадлежащею многообразию $V_2^x(t)$. Данный факт мы можем использовать для построения алгоритмов слепой идентификации канала по полиномиальным статистикам.

3. СЛЕПАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ КАНАЛА

Пусть известно, что информационный сигнал на входе канала имеет независимые сечения. Неизвестный канал описывается неслучайным полиномом $h(z)$. Если о статистике информационной последовательности имеются лишь весьма общие предположения, то для слепой идентификации мы можем использовать структуру декоррелирующих многообразий. Поскольку статистика шума как правило известна, то выражение (3) можно записать в виде:

$$V_{k,m}^{y-v}(0) = V_{k,m}^{h}(0) \bigcup V_{k,m}^{x}(0). \tag{8}$$

Известно также, что любое многообразие может быть представлено в виде объединения конечного числа неприводимых многообразий, и более того такое представление единственно, если $V_{k,m}^{h} \not\subset V_{k,m}^{x}$ и наоборот [5]. Очевидно, что если представление (8) единственно, то многообразие V^h полностью характеризует импульсную характеристику канала и может быть найдено разложением многообразия V^{y-v} на объединение неприводимых многообразий.

Однако часто подобное разложение крайне сложная задача. Поэтому мы можем воспользоваться отличием размерностей многообразий, порожденных ИХ канала и информационной последовательностью. Например, очевидно, что многообразие $V_{k,m}^{h}(0)$ порождено конечным множеством точек в C^R и является нульмерным многообразием, в тоже время, как многообразие $V_{k,m}^{x}(0)$ имеет размерность, как правило ≥ 1, а в частном случае независимых, одинаково распределенных отсчетов информационной последовательности является пучком кривых в C^R. Анализируя разложение (8) с учетом их размерности, можно разделить неизвестные многообразия выбирая различные сечения. Алгоритм слепой идентификации, основанный на данном свойстве, описан в [4].

Отметим, что если мы имеем априорную информацию о статистике входного сигнала, то для построения алгоритма слепой идентификации в рамках модели (3) мы непосредственно можем использовать структуру многообразия заданной корреляции случайного полинома.

Рассмотрим случай, когда точки выбраны на различных многообразиях заданных корреляций так, что парные корреляции компонент не равны нулю.

Пусть координатами являются $\{\alpha_1,...,\alpha_{n-1}\}$ корни полинома $P(z)$. Если $t \neq 0$, то можно показать, что любая парная комбинация эти корней $\notin V_2^x(0)$. Это означает, что значение второго смешанного кумулянта имеет вид:

$$r_{i,j} = K_{1,1}^y(\alpha_i,\alpha_j) = h(\alpha_i)\cdot h^*(\alpha_j)\cdot t_{i,j}, \quad i=1,...,n-1, \quad j=1,...,n-1, \quad t_{i,j} \neq 0 \tag{9}$$

Таким образом мы можем построить обратимое линейное отображение вектора $\mathbf{x}$ $\in C^n$ в вектор $\mathbf{y} \in C^n$, первая и вторая ковариационная матрицы которого имеют ненулевые недиагональные компоненты.

Т.о. алгоритм оценки канала – алгоритм нахождения собственного вектора соответствующего максимальному собственному числу матрицы $\mathbf{R} = \left(r_{i,j}/t_{i,j}\right)$, т.е.

$$\begin{pmatrix} h(\alpha_1) \\ \vdots \\ h(\alpha_{n-1}) \end{pmatrix} = \arg\left(\max_{\mathbf{x}^*\mathbf{x}=1}\left(\mathbf{x}^*\mathbf{R}\mathbf{x}\right)\right) \tag{10}$$

Если $\mathbf{R}$ - истинная матрица ковариации, то максимальное собственное число $\lambda_{\max}$ матрицы $\mathbf{R}$ будет равно 1. Если в качестве $\mathbf{R}$ используется выборочная матрица ковариации, оцениваемая на фоне аддитивного шума то $\lambda_{\max} < 1$, и оценка (10) является оптимальной по критерию минимума среднеквадратического отклонения. Доказательство данного факта в контексте близком к нашей задаче можно найти, например в [6].

Если $n-1 > L$, то матрица $\mathbf{V}_L(\alpha_1,...,\alpha_{n-1})$ имеет ранг L и оценка канала получается псевдоинверсией матрицы $\mathbf{V}_L(\alpha_1,...,\alpha_{n-1})$, в виде:

$$\begin{pmatrix} h_0 \\ \vdots \\ h_{L-1} \end{pmatrix} = \mathbf{V}_L^{\#}(\alpha_1,...,\alpha_{n-1})\cdot\begin{pmatrix} h(\alpha_1) \\ \vdots \\ h(\alpha_{n-1}) \end{pmatrix} \tag{11}$$

4. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

На Рис.1 показан результат применения преобразования постоянных корреляций к вектору с независимыми компонентами. Матрица преобразования задана в виде

$\mathbf{V}_{n-1}(\alpha_1,...,\alpha_{n-1})$, где $\{\alpha_1,...,\alpha_{n-1}\}$ корни полинома $P(z)$ для $t=1000$, число реализаций 10000.

На Рис.2. и Рис.3. показаны результаты математического моделирования выхода «слепого» согласованного фильтра. «Истинный» сигналом в этих экспериментах была фазоманипулированная последовательность, кодированная кодом Баркера длины 13. Длина реализаций комплексной информационной последовательности белого шума – 24.

Предложенный алгоритм характеризуется достаточно высокой скоростью сходимости и хорошей помехоустойчивостью. В отличие от алгоритмов идентификации по спектральным моментам, которые используют ДПФ и соответственно ковариацию в спектральной области, использование преобразование заданной корреляции гарантирует хорошую обусловленность матрицы $\mathbf{R}$.

Отметим также устойчивость данного алгоритма к априорной статистической модели информационной последовательности. Например, несмотря на то, что преобразование (6) явно использует модель стационарной информационной последовательности на входе, вариационный принцип формирования оценки в (10) гарантирует несмещенность оценки и в случае неизвестной нестационарной модуляции информационной последовательности на входе. При этом максимальное собственное число матрицы $\mathbf{R}$, $\lambda_{\max} < 1$ даже и идеальном случае.

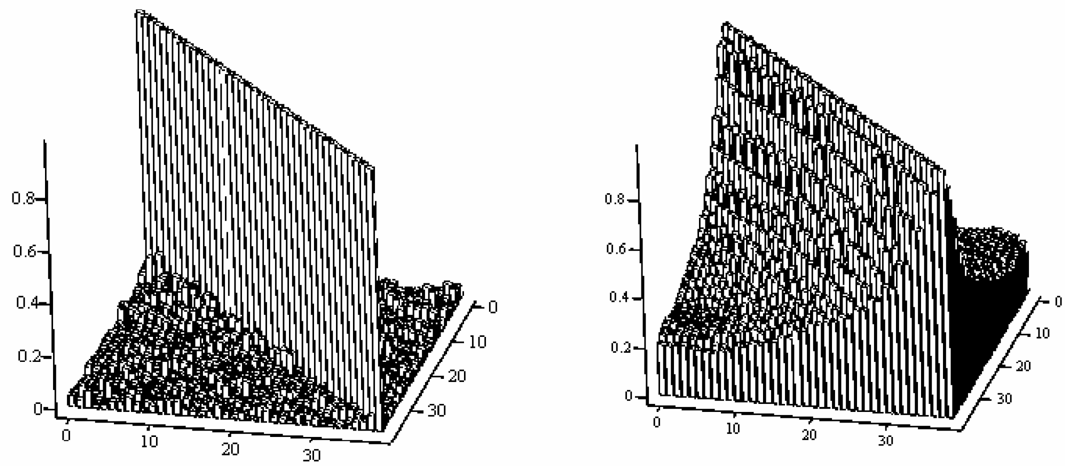

Рис. 1. Выборочная корреляционная матрица вектора до преобразования постоянных корреляций (слева) и после преобразования (справа).

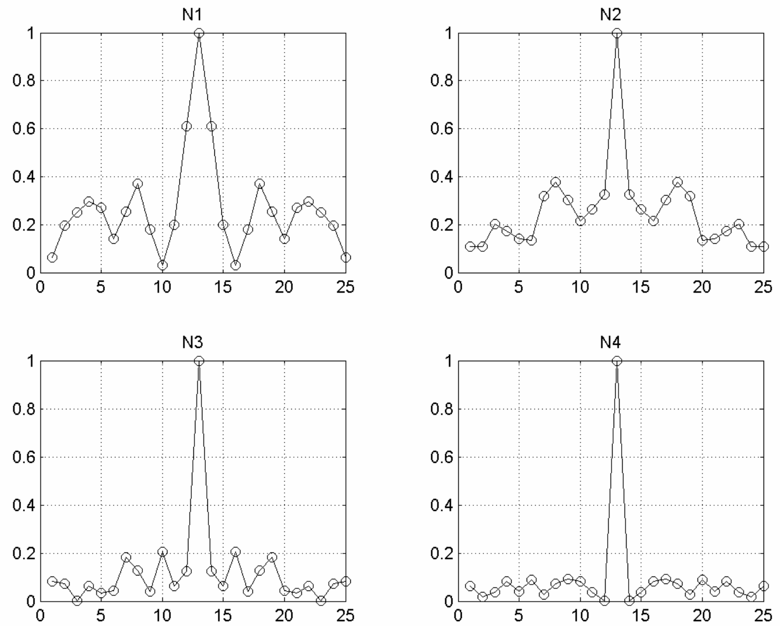

Рис. 2. Выход «слепого» согласованного фильтра для различного числа импульсов в пачке: $N1 = 5$, $N2 = 15$, $N3 = 45$, $N4 = 95$ в отсутствии шума.

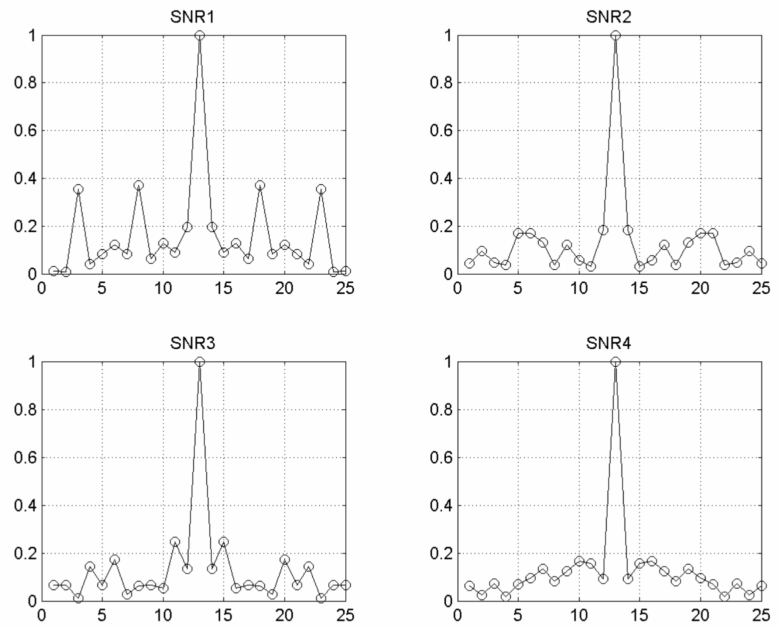

Рис. 3. Выход «слепого» согласованного фильтра для $N = 100$ и различного отношения сигнал-шум: $SNR1 = 5$ дБ, $SNR2 = 10$ дБ, $SNR3 = 15$ дБ, $SNR4 = 20$ дБ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кретов Н.В., Рыжкина Т.Е., Федорова Л.В. О дисперсионных искажениях широкополосных сигналов в ионосферной плазме // Радиотехника и электроника, 1991, т.36, вып. 1, С.1-6.
2. Tong L., Perreau S. Blind Channel Estimation: From Subspace to Maximum Likelihood Methods - IEEE Proceedings, 1998, vol. 86, no. 10, pp. 1951-1968.
3. Горячкин О.В. Полиномиальные представления и слепая идентификация систем // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. – 2002. – Т.5. - №4. – С. 53-60.
4. Горячкин О.В. Алгоритм слепой идентификации, основанный на анализе аффинных многообразий независимости полиномиальных кумулянтов случайных последовательностей // Труды 58-й научной сессии РНТОРЭС им. А.С. Попова - г. Москва, 14-15 мая, т.1, 2003, с.67-69.
5. Кокс Д., Литтл Дж., О'Ши Д. Идеалы, многообразия и алгоритмы. Пер. с англ. / под ред. В.Л. Попова. – М.: Мир, 2000г.-687с.
6. Вакман Д.Е., Седлецкий Р.М. Вопросы синтеза радиолокационных сигналов. – М.: Сов. радио, 1973, 312с.