УДК 621.396

Полиномиальные представления в задачах слепой обработки сигналов радиотехнических систем

О.В.Горячкин[*]

В статье рассматривается проблематика слепой обработки сигналов в системах радиотехники и связи. При решении этой задачи предлагается использование нового аналитического аппарата, основанного на полиномиальном представлении конечных дискретно-временных сигналов. В рамках данных представлений рассматриваются некоторые свойства случайных полиномов, моментов их значений и аффинных многообразий, порождаемых полиномиальными моментами и кумулянтами. Рассматриваются приложения данного подхода при построении ряда алгоритмов слепой идентификации каналов радиотехнических систем.

1.Введение

Термин «слепая» обработка сигналов (blind signal processing) широко используется примерно с 80-х годов прошлого века. В общем виде задачу слепой обработки можно сформулировать как цифровую обработку неизвестных сигналов прошедших линейный канал или среду с неизвестными характеристиками на фоне аддитивных шумов.

Задачи слепой обработки предполагают следующую модель для описания наблюдаемых сигналов:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)\cdot x(\tau)\cdot d\tau + v(t). \qquad (1)$$

Где $y(t)$ - наблюдаемый сигнал; $h(\tau)$ - неизвестная импульсная характеристика канала; $v(t)$- аддитивная помеха; $x(\tau)$ - информационный (входной) сигнал.

Различают два основных типа задач слепой обработки сигналов: слепая идентификация канала (оценка неизвестной импульсной характеристики или передаточной функции), слепая эквализация канала (непосредственная оценка информационного сигнала). В обоих случаях для обработки доступны только реализации входного сигнала. В случае слепой идентификации оценка импульсной характеристики может далее использоваться для оценки информационной последовательности, т.е. является первым этапом слепой эквализации, однако в некоторых приложениях важна сама по себе.

Задачи слепой обработки сигналов возникают в различных областях применения цифровой обработки сигналов и изображений. Это цифровая связь в радиоканалах с рассеянием, компенсация искажений вызванных эффектами распространения в радиолокационных и радионавигационных системах, коррекция линейных искажений в системах формирования изображений, обработка сейсмосигналов в геофизике, распознавание речи и т.д. (см. обзоры [1-3,5]).

Исторически методология слепой обработки сигналов развивалась в следующей последовательности.

Впервые алгоритм прямого слепого выравнивания канала связи в цифровых системах с амплитудной модуляцией был предложен Сато [4] в 1975г. Алгоритм Сато был впоследствии обобщен Годардом в1980г. [6] для случая комбинированной амплитудно-фазовой модуляции (известен также как «алгоритм постоянных модулей»). В общем виде алгоритмы данного типа относятся к классу так называемых стохастических градиентных алгоритмов слепого выравнивания, которые строятся по принципу адаптивного эквалайзера. Сигнал ошибки адаптивного эквалайзера в данном случае формируется безинерционным нелинейным преобразованием выходного

[*] г. Самара, Поволжская государственная академия телекоммуникаций и информатики

сигнала (см. подробнее в [5]), зависящим от вида используемой сигнально-кодовой конструкции.

Следующим этапом в развитии методов слепой обработки сигналов стало использование статистик высокого порядка для слепой идентификации каналов входные сигналы которых описываются моделью стационарных случайных процессов. Известно, что ковариационные функции стационарного процесса на выходе линейной системы не содержат информации о фазе передаточной функции системы, что обусловило интерес к статистикам более высокого порядка и соответственно к негауссовским моделям сигналов (см. обзор [7]).

Использование правила максимального правдоподобия для слепой идентификации или эквализации канала связи стало возможно после разработки эффективных итерационных процедур минимизации функционала правдоподобия [1,3,8]. В данном случае предполагается, что линейное отображение (1) не только обратимо при известной импульсной характеристике, но и идентифицируемо «вслепую», т.е. представление (1) единственно. Это оказывается, как правило, следствием использования модели системы с одним входом и множественным выходом (SIMO).

Использование статистик 2-го порядка для слепой идентификации канала, возможно, для нестационарной модели входного или выходного сигналов и в частном случае периодически-коррелированного (или циклостационарного) сигнала. Возможность такой идентификации для телекоммуникационных каналов в случае циклостационарности на выходе показана в [8], для циклостационарности на входе в [9], в общем случае для нестационарного входа в [10,11].

В данной работе мы рассмотрим методологию решения задач слепой идентификации в случае дискретно-временных систем с одним входом и одним выходом (SISO) и нестационарных по входу, а именно в частном случае, когда импульсная характеристика системы и входная последовательность конечны.

После дискретизации сигнала (1) на входе системы цифровой обработки мы имеем дискретно-временную модель системы с конечной импульсной характеристикой в виде (2).

$$y(l) = y(t)\big|_{t=lT} = \sum_{n=0}^{L-1} h(n)x(n+l) + v(l) \qquad (2)$$

где: $\{x(l)\}, l = 0,\dots, M-1$ - информационная последовательность; $\{h(n)\}$ - импульсная характеристика дискретного канала длины L; $\{y(l)\}, l = 0,\dots, M-L-1$.

Если входная последовательность имеет конечную длину и $\{y(l)\}, l = -L+1,\dots, M-1$, то выражение (2) можно записать в виде произведения полиномов положительной степени над полем комплексных чисел $C[z]$:

$$\begin{gathered} y(z) = h(z)\cdot x(z) + v(z), \\ y(z) = \sum_{i=0}^{M+L-1} y(i)z^i, \quad h(z) = \sum_{i=0}^{L-1} h(i)z^i, \\ x(z) = \sum_{i=0}^{M-1} x(i)z^i, \quad v(z) = \sum_{i=0}^{M+L-1} v(i)z^i. \end{gathered} \qquad (3)$$

Мы будем полагать, что нам доступна не одна, а некоторое количество реализаций выходного сигнала.

Т.о. объектом изучения в нашем случае являются случайные полиномы (3) и их линейные комбинации.

Обычно, полиномы со случайными коэффициентами являются объектом интереса математиков в основном с точки зрения исследования статистики корней этих полиномов, что в свою очередь обусловлено исследованием свойств детерминантов случайных матриц и рядом других приложений [12].

В данной работе мы будем рассматривать случайные полиномы как комплексные случайные поля, определенные на комплексной плоскости. В этом случае естественно определить моментные и кумулянтные функции этих случайных полей, которые будут уже полиномами от многих переменных. Мы будем называть эти функции полиномиальными моментами и полиномиальными кумулянтами по аналогии с моментными и кумулянтными функциями.

Несмотря на то, что сформированные таким образом случайные поля относятся к классу векторных случайных полей и на первый взгляд подобное представление случайных векторов лишь усложняет их описание, однако, как мы покажем далее, для решения рассматриваемых задач, мы сможем использовать успешно развивающийся в последние годы математический аппарат созданный в рамках алгебраической геометрии [16].

2. Полиномиальное представление случайных векторов

Пусть $\vec{x} \in C^n$ - комплексный случайный вектор, описываемый плотностью вероятности $f_x(x_1,...,x_n)$, определенной в R^{2n}.

Будем называть полиномиальным моментом порядка $(k+m)$, $k=k_1+k_2+...+k_R$, $m=m_1+m_2+...+m_R$ случайного вектора $\vec{x}$ полином R переменных принадлежащий кольцу $C[z_1,...,z_R]$ над полем комплексных чисел сформированный следующим образом:

$$\begin{aligned}&P^x{}_{k,m}(z_1,z_2,...,z_R)=\\&=\mathbf{M}\left\{x(z_1)^{k_1}\cdot...\cdot x(z_R)^{k_R}\cdot x^*(z_1)^{m_1}\cdot...\cdot x^*(z_R)^{m_R}\right\}\end{aligned}. \quad (4)$$

Очевидно, что набор определенных таким образом полиномиальных моментов (4) полностью определяет функцию плотности вероятности и характеристическую функцию комплексного случайного вектора образованного R значениями случайного полинома $x(z) \in C[z]$ в точках $\{z_1,...,z_R\}$.

Характеристическую функцию значений случайного полинома можно записать в виде:

$$\begin{aligned}&\Theta(p_1,...,p_R;z_1,...,z_R)=1+\\&+\sum_{l=1}^{\infty} j^l \sum_{m_1,...,m_R=l}\frac{1}{m_1!\cdot...\cdot m_R!}\sum_{k_1,...,k_R=0}^{m_1,...,m_R}\binom{k_1}{m_1}\cdot...\\&...\cdot\binom{k_R}{m_R}\cdot P^x{}_{m-k,k}(z_1,z_2,...,z_R)\cdot\\&\cdot p_1^{m_1-k_1}\cdot\left(p_1^*\right)^{k_1}\cdot...\cdot p_R^{m_R-k_R}\cdot\left(p_R^*\right)^{k_R}\end{aligned}, \quad (5)$$

где $p_i=\frac{1}{2}\left(\omega_i^{\mathrm{Re}}-j\omega_i^{\mathrm{Im}}\right)$, $\binom{k}{m}$ - биномиальный коэффициент.

Плотность вероятности комплексных коэффициентов случайного полинома может быть найдено вычислением $2R$ - мерного обратного преобразования Фурье от характеристической функции (5).

Без потери общности при решении наших задач далее мы будем рассматривать случайные полиномы с вещественными коэффициентами, которые по-прежнему являются элементами кольца $C[z]$.

В этом случае мы можем несколько упростить алгоритм формирования полиномиальных моментов, используя очевидное соотношение $x^*(z)=x(z^*)$.

Тогда любой полиномиальный момент вида (4) может быть получен выбором соответствующего сечения симметричного полиномиального момента, заданного следующим выражением:

$$P^x{}_l(z_1,z_2,...,z_l)=\mathbf{M}\{x(z_1)\cdot...\cdot x(z_l)\} \quad (6)$$

Соотношение, связывающее моменты (4) и (6) можно записать в виде:

$$P^x{}_{k,m}(z_1,z_2,...,z_R)=P^x{}_{k+m}(z_1,...,z_{k+m})\Big|_{\Omega}, \quad (7)$$

где сечение $\Omega_{k,m}$ задано следующей системой равенств:

$$\Omega_{k,m}=\begin{cases}z_1=...=z_{k_1}=z_1\\ z_{k_1+1}=...=z_{k_1+k_2}=z_2\\ ...\\ z_{k_1+...+k_{R-1}+1}=...=z_{k_1+...+k_R}=z_R\\ z_{k_1+...+k_R+1}=...=z_{k_1+...+k_R+m_1}=z_1^*\\ ...\\ z_{k_1+...+k_R+m_1+...+m_{R-1}+1}=...=z_{k+m}=z_R^*\end{cases}. \quad (8)$$

Т.о. случайный полином с вещественными коэффициентами может быть полностью описан набором симметричных полиномиальных моментов вида (6).

Рассмотрим теперь линейные комбинации случайных полиномов и свойства их полиномиальных моментов.

Пусть $y(z)=h(z)\cdot x(z)$ - произведение случайного полинома $x(z)$ и неслучайного полинома $h(z)$, тогда легко показать, что:

$$P_l^y(z_1,...,z_l)=P_l^x(z_1,...,z_l)\cdot h(z_1)\cdot...\cdot h(z_l). \quad (9)$$

Пусть $y(z)=x_1(z)\cdot x_2(z)$ - произведение случайных независимых полиномов $x_1(z)$ и $x_2(z)$, тогда:

$$P_l^y(z_1,...,z_l)=P_l^{x_1}(z_1,...,z_l)\cdot P_l^{x_2}(z_1,...,z_l). \qquad (10)$$

Пусть $y(z)=x_1(z)+x_2(z)$ - сумма случайных независимых полиномов $x_1(z)$ и $x_2(z)$, тогда справедливы следующие соотношения:

$$P_l^y(z_1,...,z_l)= =\sum_{r=1}^{l}\sum_{\substack{0<i_1<...<i_r<l\\0<i_{r+1}<...<i_l<l}}P_r^{x_1}(z_{i_1},...,z_{i_r})\cdot P_{l-r}^{x_2}(z_{i_{r+1}},...,z_{i_l})\cdot \qquad (11)$$

Из последнего выражения видно, что симметричные полиномиальные моменты не коммутируют сумму независимых случайных полиномов. В частном случае, когда симметричные полиномиальные моменты 1-го порядка независимых случайных полиномов равны нулю, то коммутируются полиномиальные моменты не более 3-го порядка.

Последнее обстоятельство заставляет нас обратиться к обобщенным корреляциям или кумулянтам значений случайных полиномов и определить симметричные кумулянтные полиномиальные моменты по аналогии с обычными кумулянтными функциями в соответствии с [13,14]. Кроме того, кумулянты, в отличии от моментов, могут задавать различные распределения вероятностей в известной степени [14] независимо.

Тогда обозначая кумулянтный полиномиальный момент случайного полинома буквой *K* запишем их используя связь с полиномиальными моментами в виде:

$$\begin{aligned}
&K_1^x(z_1)=P_1^x(z_1);\\
&K_2^x(z_1,z_2)=P_2^x(z_1,z_2)-P_1^x(z_1)P_1^x(z_2);\\
&K_3^x(z_1,z_2,z_3)=P_3^x(z_1,z_2,z_3)-\\
&\qquad -3\{P_1^x(z_1)P_2^x(z_2,z_3)\}_s+\\
&\qquad +2\cdot P_1^x(z_1)P_1^x(z_2)P_1^x(z_3);\\
&K_4^x(z_1,z_2,z_3,z_4)=P_4^x(z_1,z_2,z_3,z_4)- \qquad (12)\\
&\qquad -3\{P_2^x(z_1,z_2)P_2^x(z_3,z_4)\}_s-\\
&\qquad -4\{P_1^x(z_1)P_3^x(z_2,z_3,z_4)\}_s+\\
&\qquad +2\cdot 6\{P_1^x(z_1)P_1^x(z_2)P_2^x(z_3,z_4)\}_s-\\
&\qquad -6\cdot P_1^x(z_1)P_1^x(z_2)P_1^x(z_3)P_1^x(z_4);
\end{aligned}$$

...

где $\{\ \}_s$ - скобки симметризации [14].

Рассмотрим теперь кумулянты линейных комбинаций случайных полиномов.

Пусть $y(z)=h(z)\cdot x(z)$ - произведение случайного полинома $x(z)$ и неслучайного полинома $h(z)$, тогда:

$$K_l^y(z_1,...,z_l)=K_l^x(z_1,...,z_l)\cdot h(z_1)\cdot...\cdot h(z_l). \qquad (13)$$

Пусть $y(z)=x_1(z)+x_2(z)$ - сумма случайных независимых полиномов $x_1(z)$ и $x_2(z)$, тогда:

$$K_l^y(z_1,...,z_l)=K_l^{x_1}(z_1,...,z_l)+K_l^{x_2}(z_1,...,z_l).$$

(14)

3. Полиномиальные моменты и корреляция компонент случайных векторов

Рассмотрим теперь роль полиномиальных кумулянтов в определении статистических связей между компонентами случайного вектора.

Пусть $\vec{x}\in R^n$ - случайный вектор, описываемый плотностью вероятности $f_x(x_1,...,x_n)$ в R^n. Пусть $x(z)$ $\in$ кольцу $C[z]$ - случайный полином степени $n-1$, заданный случайным вектором $\vec{x}\ \in R^n$.

Пусть $x(z_1)$ и $x(z_2)$ два различных значения случайного полинома $x(z)$.

Мы можем определить все возможные значения $z_1\neq z_2$ для которых $x(z_1)$ и $x(z_2)$ некоррелированы, решив систему полиномиальных уравнений вида:

$$V_2^x=\begin{cases}K_2^x(z_1,z_2)=0\\K_2^x(z_1,z_2^*)=0\end{cases}=\begin{cases}K_2^x(z_1^*,z_2^*)=0\\K_2^x(z_1^*,z_2)=0\end{cases}.$$

(15)

Заданное таким образом аффинное многообразие V_2^x в C^2 будем называть декоррелирующим многообразием 2-го порядка случайного полинома $x(z)$. Декоррелирующее многообразие характеризует множество точек в C^2 на котором значения случайного полинома некоррелированы.

Если мы выберем *n* различных точек $\{c_0,...,c_{n-1}\}\in\ V_2^x$, то мы можем определить линейное обратимое отображение вектора $\vec{x} \in R^n$ в вектор $\vec{y} \in C^n$ вида:

$$\begin{cases} y_0 = x_0 + x_1 c_0 + x_2 c_0^2 + \ldots + x_{n-1} c_0^{n-1} \\ y_1 = x_0 + x_1 c_1 + x_2 c_1^2 + \ldots + x_{n-1} c_1^{n-1} \\ \ldots \\ y_{n-1} = x_0 + x_1 c_{n-1} + x_2 c_{n-1}^2 + \ldots + x_{n-1} c_{n-1}^{n-1} \end{cases}, \qquad (16)$$

которое обеспечивает попарную некоррелированность компонент вектора $\vec{y}$. Якобиан этого преобразования является определителем Вандермонда и для различных $\{c_0, \ldots, c_{n-1}\} \neq 0$. Отсюда следует существование невырожденного обратного линейного отображения.

Очевидно, что если распределение коэффициентов случайного полинома – гауссово, то значения полинома на V_2^x не только попарно некоррелированы, но и имеют нулевую корреляцию n-го порядка и более того они независимы, а отображение (16) является отображением независимости вектора $\vec{x}$ [17,15].

В общем случае декоррелирующее многообразие n-го порядка (17) обеспечивает возможность построения отображения типа (16), которое отображает вектор $\vec{x} \in R^n$ в вектор $\vec{y} \in C^n$, корреляция n-го порядка компонент которого равна нулю.

$$V_n^x = \begin{cases} K_n^x(z_1, z_2, \ldots, z_n) = 0 \\ K_n^x(z_1, z_2^*, \ldots, z_n) = 0 \\ \ldots \\ K_n^x(z_1, z_2, \ldots, z_n^*) = 0 \end{cases}. \qquad (17)$$

Число обобщенных корреляционных функций в (17), определяемое перебором знака сопряжения - 2^{n-1}.

Возвращаясь к случаю двух значений случайного полинома естественно задать вопрос: можем ли мы задать такое аффинное многообразие в C^2, на котором значения случайного полинома независимы в негауссовом случае?

Для выполнения этого требования необходимо и достаточно одновременное равенство нулю всех полиномиальных кумулянтов старших порядков для $z_1 \neq z_2$. Тогда многообразие независимости значений случайного полинома, соответствующего произвольному случайному вектору $\vec{x}$ определяется в виде:

$$V^x = \bigcap_{l=2}^{\infty} V_l^x \qquad (18)$$

Где V_l^x - аффинное многообразие, на котором обращаются в ноль все смешанные полиномиальные кумулянты порядка l. Если $V^x \neq \varnothing$ то такое многообразие существует.

Существование многообразия независимости в данном контексте означает существование линейного отображения независимости в отличие от отображений независимости общего вида предложенных в [17].

Рассмотрим теперь несколько простых примеров.

Пример 1. Пусть $x(z) \in$ кольцу $C[z]$ - нормальный случайный полином степени $n-1$, заданный случайным гауссовым вектором $\vec{x} \in R^n$ с нулевым математическим ожиданием, независимыми компонентами и дисперсией компонент σ^2. Тогда:

$$\begin{aligned} & K_1^x(z_1) = 0, \\ & K_2^x(z_1, z_2) = \sigma^2 \sum_{i=0}^{n-1} (z_1, z_2)^i \\ & K_2^x(z_1, z_2^*) = \sigma^2 \sum_{i=0}^{n-1} (z_1, z_2^*)^i \\ & K_l^x(z_1, \ldots, z_l) = 0, \quad l > 2. \end{aligned} \qquad (19)$$

Многообразие независимости значений случайного полинома имеет вид:

$$V^x = \left[\begin{array}{l} z_1 \cdot z_2 = \exp\left(j \dfrac{2\pi}{n}\right) \\ z_1 \cdot z_2 = \exp\left(j \dfrac{4\pi}{n}\right) \\ \ldots \\ z_1 \cdot z_2 = \exp\left(j \dfrac{2\pi(n-1)}{n}\right) \\ \mathrm{Im}[z_2] = 0 \end{array} \right. \qquad (20)$$

Выбор точек на многообразии независимости в принципе произволен. Положим $c_i = \exp\left(j \dfrac{2\pi \cdot i}{n}\right),\ i = 0, \ldots, n-1 \in V^x$. Тогда подставляя их в (16) получим дискретное преобразование

Фурье. Заметим, что многообразии независимости (20) образовано n непересекающимися кривыми в C^2 и мы можем в принципе задать бесконечное множество преобразований обладающих свойством независимости компонент образа в гауссовом случае и свойством попарной некоррелированности компонент в общем случае.

Пример 2. Пусть $x(z)$ случайный полином из первого примера. Пусть $h(z)$ - неслучайный полином. Построим преобразование независимости для случайного полинома $y(z)=h(z)\cdot x(z)$.

Многообразие независимости значений случайного полинома $y(z)$ имеет вид:

$$V^y = \left[\begin{array}{l} z_1 \cdot z_2 = \exp\left(j\dfrac{2\pi \cdot i}{n} \right),\ i = 1,...,n-1, \\ \mathrm{Im}[z_2] = 0, \\ h(z_1)h(z_2) = 0. \end{array} \right. \qquad (21)$$

Выберем n точек на многообразии (21) такими же, как и в предыдущем примере. Дополним их $L-1$ точками, соответствующими корням неслучайного полинома $h(z)$. Тогда преобразование (16) даст $L-1$ нулевых компонент и n независимых компонент вида $h(c_i)\cdot x(c_i)$, $i=1,...,n$. Эти независимые в гауссовом случае компоненты могут быть всегда сделаны ненулевыми выбором соответствующего сечения многообразия (19).

Заметим также, что многообразие независимости (21) является объединением многообразий, т.е. $V^y = V^h \cup V^x$.

Этот факт является следствием более общих свойств многообразий независимости, а именно: произведение независимых случайных полиномов дает объединение их многообразий независимости, а сумма – пересечение многообразий.

Решение задачи нахождения деккорелирующего многообразия или многообразия независимости в общем виде требует использования аппарата алгебраической геометрии и в частности базисов Грёбнера полиномиального идеала [16].

Пусть V_l^x аффинное многообразие, на котором обращаются в ноль все смешанные полиномиальные кумулянты порядка l принадлежащие кольцу $C[z_1,...,z_R]$. Аффинному многообразию V_l^x соответствует полиномиальный идеал $I(V_l^x)$ состоящий из всех полиномов, обращающихся в нуль на многообразии V_l^x. Таким образом, при нахождении многообразия V_l^x мы можем заменить полиномиальные кумулянты на более удобные полиномы $\in I(V_l^x)$.

Последовательность $I_l = \sum_{i=2}^{l} I(V_i^x)$ образует возрастающую цепь идеалов:

$$I_2 \subset I_3 \subset ... \subset I_l \subset ...$$

В соответствии с теоремой Гильберта о базисе идеала любой идеал кольца $C[z_1,...,z_R]$ конечно порожден. Это значит, что найдется такое $l_0 \geq R$, что последовательность идеалов при $l \to \infty$ имеет вид:

$$I_2 \subset I_3 \subset ... \subset I_{l_0} \subset I_{l_0} ...$$

Т.о. многообразие независимости полностью определяется базисом идеала порожденного конечным набором полиномов $\in I_{l_0}$.

Для каждого идеала кольца $C[z_1,...,z_R]$ можно определить бесконечное множество базисов, но существует единственный базис, обладающий рядом замечательных свойств. Это редуцированный базис Грёбнера. Одно из этих свойств это то, что этот базис содержит последовательно исключенные переменные кольца $C[z_1,...,z_R]$, что позволяет легко найти решение любой системы полиномиальных моментов. Известен также и алгоритм нахождения такого базиса – алгоритм Бухбергера [16].

Тогда алгоритм нахождения многообразия независимости случайного полинома в общем виде предполагает нахождение базиса Грёбнера идеала I_{l_0} и затем решение полиномиальной системы уравнений, связывающей полиномы базиса Грёбнера.

4. Слепая идентификация канала, на основе свойств полиномиальных моментов

Рассмотрим теперь применение полиномиальных представлений случайных векторов при решении задач слепой идентификации систем.

Используя предыдущие результаты уравнение, связывающее полиномиальные кумулянты на входе и выходе идентифицируемой системы можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} K^{y-v}_{k_1,k_2,\dots k_R}(z_1,z_2,\dots,z_R) &= K^{y}_{k_1,k_2,\dots k_R}(z_1,z_2,\dots,z_R) - \\ &- K^{v}_{k_1,k_2,\dots k_R}(z_1,z_2,\dots,z_R); \\ K^{y-v}_{k_1,k_2,\dots k_R}(z_1,z_2,\dots,z_R) &= h(z_1)^{k_1}\cdot\ldots\cdot h(z_R)^{k_R}\cdot \\ &\cdot K^{x}_{k_1,k_2,\dots k_R}(z_1,z_2,\dots,z_R). \end{aligned} \qquad (22)$$

Для систем связи статистика передаваемого сообщения и аддитивного шума часто известна получателю. В этом случаю алгоритм идентификации предполагает оценку полиномиального момента наблюдаемого семейства реализаций $\dot{y}(i)$, затем деление полинома левой части уравнения (22) на априори известный полиномиальный момент информационной последовательности. Единственным условием потенциальной идентифицируемости канала является конечность информационной последовательности и системной функции канала. Если известен набор ненулевых полиномиальных кумулянтов, то для $l > 3$ решение полиномиальных уравнений вида (22) можно записать в виде:

$$h(z_1) = \frac{K^{y-v}_{l}(z_1,\dots,z_l)\cdot K^{x}_{l-1}(z_1,\dots,z_{l-1})}{K^{x}_{l}(z_1,\dots,z_l)\cdot K^{y-v}_{l-1}(z_1,\dots,z_{l-1})} \qquad (23)$$

Однако часто в радиолокационных и радионавигационных системах статистика информационной последовательности недоступна. В этом случае возможность однозначной идентификации канала следует из однозначности разложения полинома в левой части (22) на неприводимые множители с одной стороны, или, по крайней мере, отсутствия делителей меньше чем второго порядка у полиномиального момента информационной последовательности с другой. Однако факторизация полиномов от нескольких переменных над полем комплексных чисел хотя и разрешимая, но алгоритмически крайне трудная задача [16].

Более простую технику можно предложить для практически важного случая независимых отсчетов информационной последовательности, имеющих нулевое математическое ожидание и произвольное распределение. При этом полиномиальные кумулянты информационной последовательности имеют вид:

$$\begin{aligned} &K^{x}_{k_1,k_2,\dots k_R}(z_1,z_2,\dots,z_R) = \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} \aleph_i^{k_1+k_2+\ldots+k_R}\cdot(z_1^{k_1} z_2^{k_2}\cdot\ldots\cdot z_R^{k_R})^i \end{aligned} \qquad (24)$$

где $\aleph_i^{k_1+k_2+\ldots+k_R}$ - кумулянт $k_1+k_2+\ldots+k_R$ порядка i-го отсчета информационной последовательности.

Рассмотрим возможности идентификации канала по симметричным полиномиальным моментам порядка R. Уравнение (22) в этом случае можно записать в виде:

$$K^{y-v}_{R}(z_1,\dots,z_R) = h(z_1)\cdot\ldots\cdot h(z_R) P_x(z_1,\dots,z_R). \qquad (25)$$

Полиномы в левой и правой части этого уравнения не изменяются при любой перестановке переменных $z_1, z_2, \dots, z_R$. В соответствии с основной теоремой о симметричных полиномах любой симметричный полином $f(z_1, z_2, \dots, z_R)$ может быть единственным образом представлен в виде полинома g от элементарных симметрических функций $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_R$, задаваемых следующими выражениями:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= z_1 + z_2 + \ldots + z_R, \\ \sigma_r &= \sum_{i_1<i_2<\ldots<i_r} z_{i_1}\cdot z_{i_2}\cdot\ldots\cdot z_{i_r}, \\ \sigma_R &= z_1\cdot z_2\cdot\ldots\cdot z_R. \end{aligned} \qquad (26)$$

Используя данное представление, формулы Вьета и (23) уравнение (24) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} &g^{y-v}_{R}(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_R) = \\ &= \prod_{i=1}^{L}\left(c_i^R - c_i^{R-1}\sigma_1 + \ldots + (-1)^R\sigma_R\right)\cdot \\ &\cdot\left(\sum_{i=0}^{N-1}\aleph_i^R\cdot(\sigma_R)^i\right) \end{aligned} \qquad (27)$$

где: $\{c_k\}_{k=1,L} - L$ корней полинома $h(z)$. Очевидно, что полиномы в правой части (23) не имеют общих делителей, что эквивалентно однозначной (с точностью до комплексного множителя) идентифицируемости канала.

Как и ранее в случае априори известного набора $\{\aleph_i^R\}$ кумулянтов входной последовательности для идентификации канала достаточно поделить полином g_R^{y-v} на g_R^x. Однако уравнение (26) разрешимо и в случае неизвестных моментов информационной последовательности. Для этого нам достаточно выбрать фиксированное значение переменной σ_R не равным нулю одномерного полинома информационной последовательности. В частности для стационарной информационной последовательности достаточно выбрать σ_R так, чтобы $|\sigma_R| \neq 1$. Получившийся полином от переменных $\{\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_{R-1}\}$ определен коэффициентами, зависящими только от корней системной функции, для которых мы можем записать соответствующую систему полиномиальных уравнений.

Для полиномиального момента произвольного порядка процедура нахождения разложения (26) может быть построена на использовании свойств базиса Грёбнера полиномиального идеала [16].

Рассмотрим алгоритм полиномиальной идентификации для наиболее простого и одновременно наиболее важного с практической точки зрения двумерного случая $R = 2$.

Пусть $\{a_{ij}\}$ коэффициенты полинома $K_2^{y-v}(z_1, z_2)$. Используя формулы Ньютона разложение по симметричным функциям может быть получено в виде:

$$g_2^{y-v}(\sigma_1, \sigma_2) = \sum_{l=0}^{N+L-1} S_l(\sigma_1, \sigma_2) \cdot \sum_{i=0}^{N+L-1-l} a_{i,i+l} \sigma_2^i \quad (28)$$

где $\{S_l(\sigma_1, \sigma_2)\}$ - последовательность S-полиномов, задаваемая следующими выражениями:

$$\begin{aligned} &S_0(\sigma_1, \sigma_2) = 1, \\ &S_1(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1, \\ &S_2(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1^2 - 2\sigma_2, \\ &\quad \dots \\ &S_k(\sigma_1, \sigma_2) = \\ &\quad = S_{k-1}(\sigma_1, \sigma_2) \cdot \sigma_1 - S_{k-2}(\sigma_1, \sigma_2) \cdot \sigma_2, \\ &\quad k > 2, \quad k \leq N + L\text{-}1. \end{aligned} \quad (29)$$

Разложение (22) можно записать в виде:

$$g_2^{y-v}(\sigma_1, \sigma_2) = \prod_{i=1}^{L} \left(c_i^2 - c_i \, \sigma_1 + \sigma_2\right) \cdot g_x(\sigma_2) \quad (30)$$

Можно показать, что уравнение (30) однозначно разрешимо в случае если $2L > N$. Можно предложить несколько способов решения уравнения (30) относительно неизвестных корней $\{c_k\}_{k=1,L}$ полагая $\sigma_2 = \lambda$, так что $g_x(\lambda) \neq 0$. В частности, если $\lambda = 0$, то полином $g_y(\sigma_1, 0) = h(\sigma_1) \cdot const$ в остальных случаях решение уравнения (30) дает следующее выражение:

$$c_i = \left(\left. \frac{d\mu_i(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda = \lambda_0} \right)^{-1} \quad (31)$$

где: $\{\mu_i(\lambda)\}$ - $L-1$ корней полинома $g_y(\sigma_1, \lambda)$.

5. Основные результаты и выводы

В данной работе представлен новый аппарат описания линейных систем, описываемых конечными дискретно-временными моделями, основанный на полиномиальных представлениях случайных дискретных сигналов. Предложенный аппарат использует методы 3-х математических дисциплин: теории вероятности, алгебраической геометрии и коммутативной алгебры.

В рамках данных представлений:

1) введены понятия и определены основные свойства полиномиальных моментов и полиномиальных кумулянтов случайных векторов;

2) рассмотрены свойства аффинных многообразий на которых декоррелируются или становятся независимыми значения случайных полиномов.

3) указывается пути построения соответствующих линейных отображений, использующие базисы Грёбнера полиномиальных идеалов.

Основные рассматриваемые применения предложенной техники – слепая обработка сигналов радиотехнических систем. В данном направлении приведены некоторые алгоритмы слепой идентификации канала, базирующиеся на операциях с полиномиальными моментами и кумулянтами.

Литература

1. Tugnait J.K., Tong L., Ding Z. Single-user channel estimation and equalization. - IEEE Signal Processing Magazine, vol. 17, no. 3, pp.17-28, May 2000.
2. Tong L., Perreau S. Blind Channel Estimation: From Subspace to Maximum Likelihood Methods - IEEE Proceedings, vol 86, no. 10, pp 1951-1968, 1998.
3. Liu H., Xu G., Tong L., Kailath T. Recent Developments in Blind Channel Equalization: From Cyclostationarity to Subspaces. - Signal Processing, vol. 50, pp. 82-99, 1996.
4. Sato Y. A method of self-recovering equalization for multilevel amplitude-modulation systems. - IEEE Trans. on Communications vol. 23, pp.679-682, 1975.
5. Прокис Дж. Цифровая связь. Пер с англ. / под ред. Д.Д. Кловского. – М. Радио и связь. 2000. – 800с.
6. Godard D.N. Self-recovering equalization and carrier tracking in two dimensional data communication systems. - IEEE Trans. on Communications vol. 28, no. 11, pp.1867-1875, 1980.
7. Никиас Х.Л., Рагувер М.Р. Биспектральное оценивание применительно к цифровой обработке сигналов. - ТИИЭР, 1987,т.75, №7, с.5-30.
8. Tong L., Xu G., Kailath T. A new approach to blind identification and equalization of multipath channels. – Proc. of the 25th Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers, Nov. 1991, pp. 856-860.
9. E. Serpedin and G.B. Giannakis, “Blind channel identification and equalization with modulation inducted cyclostationarity,” in Proc. CISS, Baltimore, MD, Mar. 1997, vol. II, pp. 792-797.
10. Горячкин О.В., Кловский Д.Д. Статистический алгоритм обращения оператора свертки с неизвестным ядром. // Сборник докладов РНТК «Радио и волоконно-оптическая связь, локация и навигация», Воронеж, 1997, т.1, с.227-232.
11. Горячкин О.В. Автоматическая фокусировка изображений в радиолокаторе с синтезированной апертурой.// ТУЗС «Анализ сигналов и систем связи». СПБ., 1996, №161, с.128-134.
12. Farahmand K. Topics in Random Polynomials. Addison Wesley Longman, London, 1998.
13. Стратанович Р.Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М.: «Сов.Радио», 1961,558с.
14. Малахов А.Н. Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований. М.: «Сов.Радио», 1978, 376с.
15. Goriachkin O.V., Klovsky D.D., Shatskih S.Ja., One Algorithm of Nonlinear Independent Components Analysis in Problem of Blind Channel Identification. // Proceedings of the 6th World Multiconference on Systemics, Cybernetics and Informatics, Volume XIV Image, Acoustic, Speech and Signal Processing III, July 14-18 2002, Orlando, Florida, USA, pages 244-246.
16. Кокс Д., Литтл Дж., О'Ши Д. Идеалы, многообразия и алгоритмы. Пер. с англ. / под ред. В.Л. Попова. – М.: Мир, 2000г.-687с.
17. Шатских С.Я. Об одном варианте преобразования независимости // Сб. “Мера и интеграл”, Самара: изд-во “Самарский университет”, 1995. С. 99-112.

Polynomial Representation In Blind Processing Problems Of Signals Radio-engineering Systems

O.V.Goriachkin

In an article the problems of blind signal processing in systems of radio engineering and telecommunication is considered. At a solution of this task the use of a new analytical approach based on polynomial representation of finite discrete-temporal signals is offered. Within the framework of dates of representations some properties of random polynomials, moment of their values and affine varieties generated polynomial by moment and cumulants are considered. The applications of the approach are considered at a construction of a series of algorithms of blind identification of channels of radio engineering systems.