

Поволжская государственная академия телекоммуникаций и информатики.

**И.В.Григоров**

**ПРИМЕНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УНИТАРНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ  
В ЗАДАЧАХ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ**

**I.V.Grigorov**

**THE APPLICATION OF NONLINEAR UNITARY TRANSFORMATIONS  
IN PROBLEMS OF SIGNAL PROCESSING**

**Аннотация**

В статье рассматривается новый способ обработки сигналов, основанный на использовании нелинейных унитарных преобразований. Обсуждаются вопросы реализации этих преобразований на базе нелинейных фазовых фильтров, рассматриваются компрессирующие свойства этих фильтров.

**The summary**

In clause the new way of signal processing, based on use of nonlinear unitary transformations is considered. Some questions of realization of these transformations on the basis of nonlinear phase filters are discussed, considering the compressing properties of these filters.

**1. Введение**

В задачах обработки сигналов, таких как фильтрация, подавление помех, компенсация дисперсионных искажений, сжатие информации и т.д., часто используются различные базисные представления (преобразования) сигналов. При этом процедуру обработки можно записать в операторной форме следующим образом:

$$\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{F}\mathbf{s}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{s}$  и  $\hat{\mathbf{s}}$  – векторы входного и выходного сигналов  $s(t)$  и  $\hat{s}(t)$ ,  $\mathbf{F}$  – оператор данного преобразования,  $\mathbf{F}^{-1}$  – оператор, обратный ему,  $\mathbf{K}$  – некоторый селектирующий оператор.

В частности, при обычной линейной фильтрации сигналов в цифровой форме в качестве  $\mathbf{F}$  можно использовать оператор дискретного преобразования Фурье (ДПФ), который осуществляет преобразование временных отсчетов сигнала в отсчеты его спектра;  $\mathbf{K}$  – оператор умножения отсчетов спектра на отсчеты передаточной функции фильтра, а  $\mathbf{F}^{-1}$  – оператор обратного ДПФ (ОДПФ). Обычно прямое и обратное ДПФ реализуются в форме быстрых алгоритмов – БПФ и ОБПФ.

Структурная схема описанного алгоритма обработки сигналов показана на рис.1.

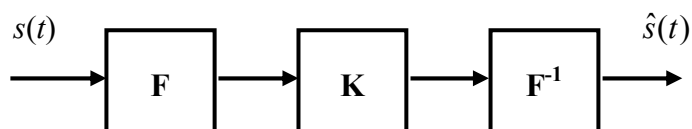


Рис. 1. Структурная схема алгоритма цифровой обработки сигналов.

Вместо преобразования Фурье можно использовать и другие преобразования – Френеля, Уолша, Хаара, дискретное косинусное преобразование, различные вейвлет-преобразования и т.д. [1,2]. Все указанные преобразования являются линейными и обладают свойством унитарности (ортогональности), т.е. имеют обратное преобразование, совпадающее с сопряженным:

$$\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F}^* \quad (2)$$

## 2. Нелинейные унитарные преобразования и их реализация с помощью нелинейных фазовых фильтров

Как показано в [3,4] и др., свойствами унитарности могут обладать и нелинейные преобразования сигналов. Одним из наиболее простых преобразований этого типа является отображение, описываемое нелинейным эволюционным уравнением шрёдингеровского типа:

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} + \alpha \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \tau^2} + f(\Psi)\Psi = 0. \quad (3)$$

Уравнение (3), в частности, описывает преобразование импульсных сигналов в нелинейных диспергирующих средах различной физической природы – в некоторых нелинейных электрических цепях с распределенными параметрами [5], оптических волокнах при достаточно большой мощности излучения [6] и других нелинейных каналах с рассеянием энергии сигналов во времени.

Применительно к описанию процесса распространения световых импульсов в оптических волокнах, функции и постоянные, входящие в (3), имеют следующий физический смысл:  $\Psi = \Psi(\eta, \tau)$  – комплексная огибающая импульса, распространяющегося вдоль пространственной координаты  $\eta$ ,  $\tau$  – «бегущая» временная координата импульса, отсчитываемая от его центра,  $\alpha$  – коэффициент фазы,  $f(\Psi)$  – функция, определяющая вид нелинейности волокна. В простейшем случае  $f(\Psi)$  – это квадратичная функция, а соответствующая нелинейность называется кубической (керровской) [6]:

$$f(\Psi) = \chi |\Psi|^2, \quad (4)$$

где  $\chi$  – параметр нелинейности волокна.

Огибающую  $\Psi(\eta, \tau)$  в некотором сечении волокна  $\eta = \eta_0$ , т.е.  $\Psi(\eta_0, \tau)$ , можно условно рассматривать как комплексную огибающую сигнала на входе некоторого эквивалентного нелинейного фильтра, описываемого оператором  $\mathbf{F}$  вида (3), а при значении координаты  $\eta$  – огибающей выходного сигнала этого фильтра:

$$\Psi(\eta_0, \tau) = \dot{Z}(\tau); \quad \Psi(\eta, \tau) = \dot{V}(\tau). \quad (5)$$

Для практической реализации нелинейного фильтра в цифровой форме целесообразно использовать метод расщепления по физическим факторам [7], который используется для численного решения волновых уравнений и моделирования эволюции огибающей оптических импульсов вдоль оптических волокон. Он заключается в том, что участок волокна длиной  $l$  разбивается на  $2n$  участков малой длины  $\Delta\eta$ . При этом, можно приближенно считать, что на участках с нечетными номерами действует только нелинейность, а с четными – только дисперсия. Это эквивалентно замене участка волокна длиной  $2\Delta\eta$  двумя последовательно включенными звеньями нелинейного фильтра – нелинейным (НЗ) и линейным (ЛЗ). При этом от уравнения (3) можно перейти к двум уравнениям, описывающим в отдельности действие нелинейности и дисперсии и, кроме того, описывающим работу НЗ и ЛЗ. Первое содержит только пространственную координату  $\eta$

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} + f(\Psi)\Psi = 0, \quad (6)$$

а второе – обе переменные (временную  $\tau$  и пространственную  $\eta$ ), но не содержит нелинейной функции  $f(\Psi)$ :

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} + \alpha \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \tau^2} = 0. \quad (7)$$

Рассмотрим одиночный участок волокна с нечетным номером малой длины  $\Delta\eta$ . Запишем уравнение (6) в виде:

$$\frac{\partial \Psi}{\Psi} = i f(\Psi) \partial \eta. \quad (8)$$

Проинтегрируем левую и правую части, учитывая, что в силу малости  $\Delta\eta$ , нелинейная функция  $f(\Psi)$  практически не будет зависеть от  $\eta$ . Поэтому

$$\int \frac{\partial \Psi}{\Psi} = i \int f(\Psi) \partial \eta \approx i f(\Psi) \eta \quad (9)$$

или

$$\ln \Psi - \ln C = i f(\Psi) \eta. \quad (10)$$

Отсюда

$$\Psi = C \exp(i f(\Psi) \eta) \quad (11)$$

Постоянную интегрирования  $C$  найдем из начальных условий:

$$\eta = \eta_0, \quad \Psi(\eta, \tau) = \Psi(\eta_0, \tau), \quad (12)$$

где  $\eta_0$  – фиксированная пространственная координата, предшествующая  $\eta$  на  $\Delta\eta$ .

$$\Psi(\eta_0, \tau) = C \exp(i f(\Psi) \eta_0), \quad (13)$$

$$C = \Psi(\eta_0, \tau) \exp(-i f(\Psi) \eta_0). \quad (14)$$

Подставим (14) в (11):

$$\Psi(\eta, \tau) = \Psi(\eta_0, \tau) \exp\{i f(\Psi)(\eta - \eta_0)\} = \Psi(\eta_0, \tau) \exp\{i f(\Psi) \Delta\eta\}. \quad (15)$$

Найдем отношение комплексных огибающих на выходе и входе рассмотренного участка длиной  $\Delta\eta$ :

$$H(\Psi) = \frac{\Psi(\eta, \tau)}{\Psi(\eta_0, \tau)} = \exp\{i f(\Psi)\Delta\eta\}. \quad (16)$$

Учитывая (5) и вводя постоянную величину  $\Delta\eta$  в качестве масштабного множителя в функцию  $f(\Psi)$ , отношение (15) можно записать:

$$H(Z) = \frac{\dot{Y}(\tau)}{\dot{Z}(\tau)} = \exp\{i f(Z)\}, \quad (17)$$

где  $\dot{Z}(\tau)$  и  $\dot{Y}(\tau)$  – комплексные огибающие сигналов на входе и выходе нелинейного звена. Комплексная нелинейная функция (17) имеет единичный модуль. Поэтому НЗ представляет собой безынерционный нелинейный преобразователь фазы, а  $H(Z)$  называется коэффициентом преобразования мгновенных значений сигнала по комплексной огибающей [3].

Рассмотрим теперь линейное звено, описываемое уравнением (7). Найдем его передаточную функцию. Перепишем (7) в следующем виде

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\eta} = i\alpha \frac{\partial^2\Psi}{\partial\tau^2} \quad (18)$$

и вычислим преобразование Фурье от левой и правой частей:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial\Psi}{\partial\eta} \exp(-i\omega\tau) d\tau = \frac{\partial}{\partial\eta} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\eta, \tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau \right] = \frac{\partial\tilde{\Psi}(\eta, i\omega)}{\partial\eta}, \quad (19)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} i\alpha \frac{\partial^2\Psi}{\partial\tau^2} \exp(-i\omega\tau) d\tau = i\alpha (i\omega)^2 \tilde{\Psi}(\eta, i\omega) = -i\alpha \omega^2 \tilde{\Psi}(\eta, i\omega). \quad (20)$$

Приравняв правые части (19) и (20) получим

$$\frac{\partial\tilde{\Psi}(\eta, i\omega)}{\partial\eta} = -i\alpha \omega^2 \tilde{\Psi}(\eta, i\omega), \quad (21)$$

или

$$\frac{\partial\tilde{\Psi}}{\tilde{\Psi}} = -i\alpha \omega^2 \partial\eta, \quad (22)$$

Интегрируя левую и правую части, получим:

$$\ln \tilde{\Psi} - \ln C_1 = -i\alpha \omega^2 \eta, \quad (23)$$

или

$$\tilde{\Psi} = C_1 \exp(-i\alpha \omega^2 \eta), \quad (24)$$

Постоянную интегрирования  $C_1$  найдем из начальных условий:

$$\eta = \eta_0, \quad \tilde{\Psi}(\eta, i\omega) = \tilde{\Psi}(\eta_0, i\omega), \quad (25)$$

$$\tilde{\Psi}(\eta_0, i\omega) = C_1 \exp(-i\alpha \omega^2 \eta_0), \quad (26)$$

$$C_1 = \tilde{\Psi}(\eta_0, i\omega) \exp(i\alpha \omega^2 \eta_0). \quad (27)$$

Подставим (27) в (24):

$$\tilde{\Psi}(\eta, i\omega) = \tilde{\Psi}(\eta_0, i\omega) \exp(-i\alpha\omega^2(\eta - \eta_0)) = \tilde{\Psi}(\eta_0, i\omega) \exp(-i\alpha\omega^2\Delta\eta). \quad (28)$$

Таким образом, комплексный коэффициент передачи линейного звена имеет вид:

$$G(i\omega) = \frac{\tilde{\Psi}(\eta, i\omega)}{\tilde{\Psi}(\eta_0, i\omega)} = \exp(-i\alpha\Delta\eta\omega^2). \quad (29)$$

Вычисляя обратное преобразование Фурье можно найти импульсную характеристику линейного звена:

$$g(\tau) = g_0 \exp\left(i\frac{a\tau^2}{2}\right), \quad (30)$$

где  $a$  и  $g_0$  – постоянные коэффициенты:

$$a = \frac{1}{2\alpha\Delta\eta}, \quad (31)$$

$$g_0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha\Delta\eta}} \exp\left(i\frac{3\pi}{4}\right). \quad (32)$$

Из (31) видно, что линейное звено реализует преобразование Френеля во временной области [1].

Таким образом, нелинейный оператор  $\mathbf{F}$  вида (3) можно приближенно представить через произведение нелинейных ( $\mathbf{H}_k$ ) и линейных ( $\mathbf{G}_k$ ) операторов с характеристиками вида (17) и (29):

$$\mathbf{F}(\Psi) = \prod_{k=1}^n \mathbf{G}_k \mathbf{H}_k(\Psi). \quad (33)$$

Все рассмотренные звенья имеют единичные коэффициенты передачи по амплитуде. Поэтому рассмотренные фильтры называются нелинейными фазовыми фильтрами (НФФ). НФФ состоит из последовательного соединения НЗ и ЛЗ:

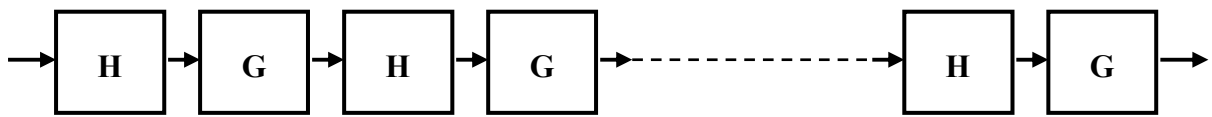


Рис. 2. Структурная схема нелинейного фазового фильтра (НФФ)

Обратный оператор  $\mathbf{F}^{-1}$  описывается уравнением, сопряженным с (3):

$$-i\frac{\partial\Psi}{\partial\eta} + \alpha\frac{\partial^2\Psi}{\partial\tau^2} + f(\Psi)\Psi = 0. \quad (34)$$

При его реализации также можно использовать аналогичные линейные и нелинейные звенья с характеристиками, сопряженными с (17), (29) и (30), расположив их в обратном порядке, т.е.

$$\mathbf{F}^{-1}(\Psi) = \mathbf{F}^*(\Psi) = \prod_{k=1}^n \mathbf{H}^*(\Psi) \mathbf{G}_k^*. \quad (35)$$

Выражению (34) будет соответствовать обратный нелинейный фазовый фильтр (ОНФФ), структурная схема которого имеет вид:

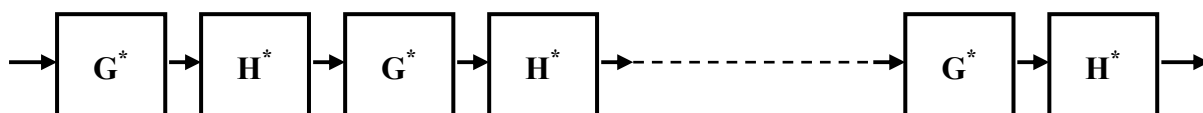


Рис. 3. Структурная схема обратного нелинейного фазового фильтра (ОНФФ)

НФФ с нелинейностью вида (4) можно рассматривать как модель оптического волокна, работающем в нелинейном режиме. Кроме того, его можно рассматривать и как самостоятельное радиотехническое устройство, не накладывая ограничений на нелинейную функцию  $f(Z)$  в (17).

Простейшим является двухзвенный НФФ, состоящий из одного нелинейного и одного линейного звеньев:

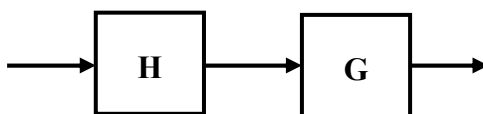


Рис. 4. Структурная схема двухзвенного НФФ

Наиболее просто его можно реализовать в цифровой форме путем обработки отсчетов комплексной огибающей входного сигнала. НЗ, независимо от вида функции  $f(Z)$ , входящей в (17), реализуется простым умножением этих отсчетов на комплексные числа, модуль которых равен единице, а аргумент зависит от модуля входного отсчета.

Линейное звено с импульсной характеристикой (30) физически не реализуемо. Для приближенного обеспечения его физической реализуемости в выражение (30) необходимо ввести функцию окна  $g_0(t)$  и задержку  $t_0$ , которую обычно выбирают равной половине длительности окна (кроме того, временную переменную  $\tau$  заменим на  $t$ ):

$$g(t) = g_0(t) \exp\left(\frac{ia(t-t_0)^2}{2}\right), \quad (36)$$

Постоянный комплексный множитель  $g_0$  (32), вносит в сигнал постоянный сдвиг фазы  $3\pi/4$ . Поэтому при реализации ЛЗ НФФ удобнее этот сдвиг исключить путем обнуления мнимой части  $g_0$ :

$$g_0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha\Delta\eta}} = \sqrt{\frac{a}{2\pi}}. \quad (37)$$

Для примера на рис. 5 изображены действительная и мнимая части импульсной

характеристики ЛЗ с модифицированным окном Ханна [1].

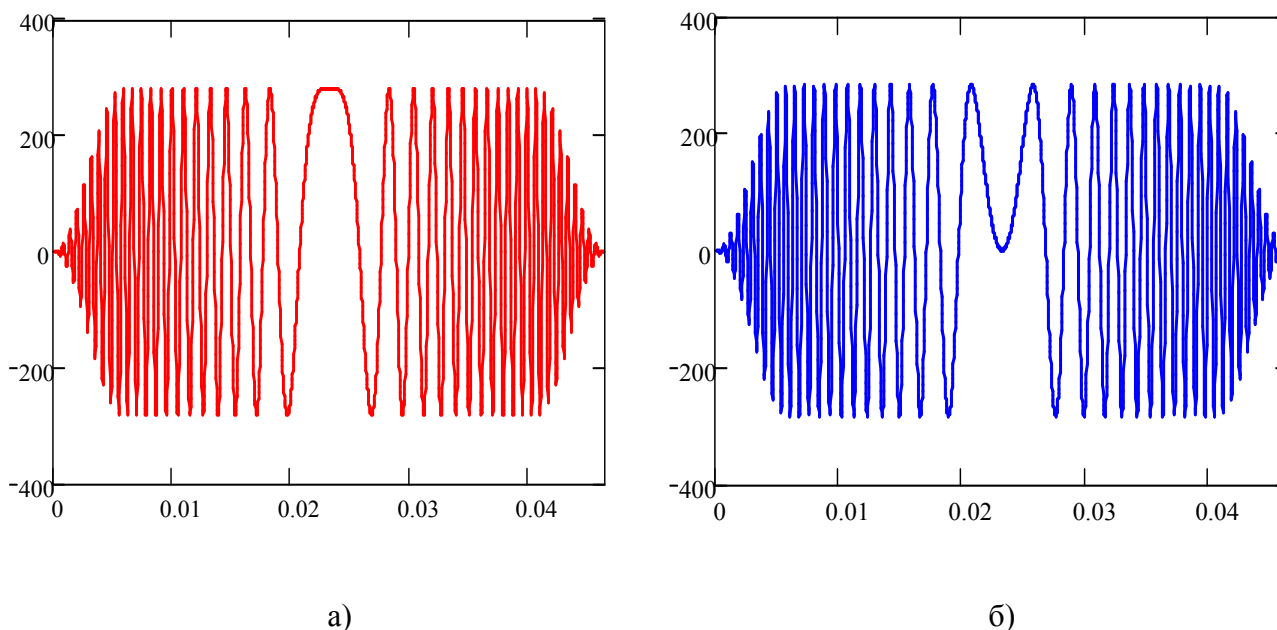


Рис. 5. Действительная (а) и мнимая (б) части импульсной характеристики линейного звена НФФ с модифицированным окном Ханна.

Обработку отсчетов сигнала с помощью ЛЗ проще реализовать в частотной области, используя алгоритмы прямого и обратного БПФ.

### 3. Свойства нелинейных фазовых фильтров

В оптических волокнах, работающих в нелинейном режиме, наблюдаются различные нелинейные эффекты – фазовая самомодуляция, фазовая кроссмодуляция, четырехволновое смешение, формирование солитонов и т.д [7]. Поскольку НФФ является приближенным аналогом нелинейного оптического волокна, аналогичные явления можно получить и с помощью НФФ. Рассмотрим один из этих эффектов – аномальную дисперсию, вызванную фазовой самомодуляцией. Он заключается во временном сжатии импульса и одновременном увеличении его амплитуды. Решим задачу оптимизации параметров НФФ с целью минимизации длительности импульсного сигнала на его выходе.

Пусть на вход НЗ НФФ поступает узкополосный импульсный сигнал, представленный в квазигармонической форме

$$z(t) = Z(t) \cos(\omega_0 t + \varphi(t)), \quad (38)$$

где  $Z(t)$  – действительная огибающая импульса,  $\omega_0$  – центральная частота его спектра,  $\varphi(t)$  – мгновенная начальная фаза. Его комплексная огибающая будет иметь вид:

$$\dot{Z}(t) = Z(t) \exp(i \varphi(t)). \quad (39)$$

Запишем комплексную огибающую отклика НЗ на воздействие (38), учитывая (17):

$$\dot{Y}(t) = \dot{Z}(t) H(Z) = Z(t) \exp\{i(f(Z) + \varphi(t))\}. \quad (40)$$

Комплексную огибающую отклика ЛЗ на воздействие с огибающей (40) найдем через свертку

$$\dot{V}(t) = \int_0^t \dot{Y}(\tau) g(t-\tau) d\tau. \quad (41)$$

Для упрощения аналитического решения задачи рассмотрим НФФ с прямоугольным окном

$$g_0(t) = g_0, \quad 0 \leq t \leq 2t_0. \quad (42)$$

Огибающая отклика ЛЗ будет иметь вид

$$\dot{V}(t) = g_0 \int_0^t Z(\tau) \exp \left\{ i \left( f(Z(\tau)) + \varphi(\tau) + \frac{a(t-\tau-t_0)^2}{2} \right) \right\} d\tau. \quad (43)$$

Звенья НФФ имеют единичный коэффициент передачи по амплитуде. Поэтому задачу минимизации длительности импульса на выходе НФФ можно свести к задаче максимизации его пиковой мощности. Ей будет соответствовать максимум модуля отклика (11) в момент  $t = t_0$

$$\dot{V}(t_0) = g_0 \int_0^{t_0} Z(\tau) \exp \left\{ i \left( f(Z(\tau)) + \varphi(\tau) + \frac{a\tau^2}{2} \right) \right\} d\tau. \quad (44)$$

Найдем максимум функционала (44) на множестве функций  $f(Z)$ :

$$V_{\max} = \max_f |\dot{V}(t_0)| = g_0 \left| \int_0^{t_0} Z(\tau) \exp \left\{ i \left( f(Z(\tau)) + \varphi(\tau) + \frac{a\tau^2}{2} \right) \right\} d\tau \right|. \quad (45)$$

Для любой комплексной функции справедливо неравенство

$$\left| \int_T \dot{Q}(t) dt \right| \leq \int_T |\dot{Q}(t)| dt, \quad (46)$$

которое переходит в равенство при условии

$$\dot{Q}(t) = |\dot{Q}(t)|. \quad (47)$$

Поэтому

$$V_{\max} = g_0 \int_0^{t_0} |Z(\tau)| d\tau. \quad (48)$$

Этот максимум достигается при условии

$$f(Z(\tau)) + \varphi(\tau) + \frac{a\tau^2}{2} = 2\pi n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (49)$$

Предположим, что на входе НФФ импульс  $z(t)$  не имеет внутриимпульсной частотной модуляции (ЧМ), т.е.  $\varphi(t) = \varphi_0$  и пусть, для простоты,  $\varphi_0 = 2\pi n$ . При этом условие (49) можно записать в виде

$$f(Z(t)) = -\frac{at^2}{2} = -\frac{at^2(Z)}{2}, \quad (50)$$

где

$$t(Z) = Z^{-1}(t) \quad (51)$$

– функция, обратная функции  $Z(t)$ .

Таким образом, выражение (50) определяет искомую оптимальную функцию

$$f_{\text{opt}}(Z) = -\frac{at^2(Z)}{2}. \quad (52)$$



Ее можно найти для любого импульсного сигнала с огибающей  $Z(t)$ , для которой существует обратная функция (51) (или несколько таких функций).

Выражение (49) описывает механизм сжатия сигналов во временной области с помощью НФФ: НЗ развивает внутриимпульсную ЧМ без изменения формы огибающей, а ЛЗ выступает в качестве фильтра, согласованного по фазе по отношению к сигналу на выходе НЗ.

Найдем для примера оптимальную нелинейную функцию (52) для импульса с гауссовской огибающей

$$Z(t) = U \exp\left(-\frac{t^2}{2\tau_u^2}\right), \quad (53)$$

где  $U$  – амплитуда импульса,  $\tau_u$  – его среднеквадратическая полуширина. Функция (52) имеет две обратные

$$t_{1,2}(Z) = \pm \sqrt{2\tau_u^2 \ln\left(\frac{U}{|Z|}\right)}, \quad (54)$$

а искомая оптимальная функция имеет вид

$$f_{\text{opt}}(Z) = a\tau_u^2 \ln\left(\frac{|Z|}{U}\right). \quad (55)$$

Нетрудно показать, что величина (48) при этом будет иметь значение

$$V_{\text{max}} = U\tau_u \sqrt{a}. \quad (56)$$

Рассмотрим подробнее механизм сжатия импульсных сигналов в НФФ на примере гауссовского импульса с огибающей вида (53). Найдем комплексную огибающую сигнала на выходе НЗ с оптимальной нелинейностью (55):

$$\begin{aligned} \dot{Y}(t) &= \dot{Z}(t)H(Z) = Z(t) \exp\{i f(Z(t))\} = U \exp\left(-\frac{t^2}{2\tau_u^2}\right) \times \\ &\times \exp\left\{i a \tau_u^2 \ln\left(\frac{U \exp\left(-t^2/2\tau_u^2\right)}{U}\right)\right\} = U \exp\left(-\frac{t^2}{2\tau_u^2}\right) \exp\left\{-i \frac{a t^2}{2}\right\} = \\ &= Y(t) \exp\{i \Theta_y(t)\}. \end{aligned} \quad (57)$$

Таким образом, огибающая сигнала на выходе нелинейного звена НФФ не изменяется по отношению к огибающей входного сигнала

$$Z(t) = Y(t), \quad (58)$$

а изменяется его мгновенная начальная фаза

$$\Theta_y(t) = -\frac{at^2}{2} \quad (59)$$

и переменная составляющая его мгновенной частоты

$$\Omega_y(t) = \frac{d}{dt}(\Theta_y(t)) = -at. \quad (60)$$

Таким образом, нелинейное звено развивает у гауссовского импульса идеальную внутриимпульсную линейную частотную модуляцию (ЛЧМ) с сохранением формы его

оггибающей, при этом параметр ЛЗ  $a$  (вида (31)) равен коэффициенту ЛЧМ, взятому с обратным знаком.

Можно показать, что для импульсов других форм, как финитных, так и не финитных, НЗ с оптимальной нелинейностью (52) также развивает идеальную ЛЧМ

$$\Omega_y(t) = \frac{d}{dt} \{f_{opt}(Z(t))\} = -at \quad (61)$$

с сохранением формы оггибающей. Для не финитных по длительности сигналов зависимость (61) не ограничена во времени, а для финитных – она имеет локальный характер в пределах длительности импульса.

Очевидно, что закон изменения мгновенной частоты импульсной характеристики ЛЗ вида (2) также является линейным

$$\Omega_g(t) = \frac{d}{dt} \left( \frac{at^2}{2} \right) = at, \quad (62)$$

и отличается от (41) только знаком. Это означает, что ЛЗ по отношению к выходному сигналу НЗ, является фильтром, согласованным с ним по фазе. В отличие от обычного согласованного фильтра ЛЗ имеет в простейшем случае прямоугольного окна (49) единичный коэффициент передачи

$$G(\omega) = | \dot{G}(i\omega) | = 1. \quad (63)$$

Следует отметить, что выбором другого окна  $g_0(t)$ , можно изменять и вид функций  $\dot{G}(i\omega)$  и  $G(\omega)$ . Передаточная функция при этом будет определяться как свертка

$$\dot{G}(i\omega) \otimes F[g_0(t)], \quad (64)$$

где  $F[...]$  – знак преобразования Фурье. В этом случае ЛЗ не будет иметь постоянную АЧХ, т.е. не будет фазовым. Например, если выбрать гауссовское окно, совпадающее по форме с оггибающей (53)

$$g_0(t) = U \exp\left(-\frac{t^2}{2\tau_u^2}\right), \quad (65)$$

то ЛЗ с импульсной характеристикой вида

$$g(t) = U \exp\left(-\frac{t^2}{2\tau_u^2}\right) \exp\left(\frac{ia(t-t_0)^2}{2}\right) \quad (66)$$

будет представлять собой обычный фильтр, согласованный с выходным сигналом НЗ. Это свойство звеньев НФФ может оказаться полезным при компенсации дисперсионных искажений сигналов на фоне помех. Но очевидно, что при наличии пренебрежимо малых помех эффективность сжатия сигнала НФФ с таким ЛЗ будет меньшей.

Методы сжатия широкополосных импульсных сигналов с внутриимпульсной частотной модуляцией, в частности с ЛЧМ-сигналов, в согласованных фильтрах известны давно, и используются, в частности, для повышения разрешающей способности радиолокаторов [8]. В отличие от них, в описываемом здесь методе ЛЧМ-сигнал формируется с помощью НЗ НФФ из относительно узкополосного сигнала, прошедшего канал связи.

Аналитический расчет отклика НФФ с произвольной нелинейностью на сигнал произвольной формы затруднителен, поскольку фильтр является нелинейным. Но для некоторых частных случаев эту задачу можно решить точно, в частности для оптимальной нелинейности (52). Пусть на вход НФФ поступает произвольный импульсный сигнал с комплексной оггибающей (39). При этом оггибающая отклика НЗ будет иметь вид:

$$\dot{Y}(t) = \dot{Z}(t)H(Z) = \dot{Z}(t)\exp\{i f(Z(t))\}. \quad (67)$$

Если нелинейность НЗ соответствует выражению (52), то

$$\dot{Y}(t) = \dot{Z}(t)\exp\left(-i \frac{a}{2} [t(Z(t))]^2\right) = \dot{Z}(t)\exp\left(-i \frac{at^2}{2}\right) \quad (68)$$

Сигнал на выходе ЛЗ найдем через свертку, полагая для простоты, что условие физической реализуемости на ЛЗ не накладывается, т.е. его импульсная характеристика описывается выражением (30):

$$\begin{aligned} \dot{Y}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \dot{Y}(\tau)g(t-\tau)d\tau = g_0 \int_{-\infty}^{\infty} \dot{Z}(\tau)\exp\left(-\frac{i a \tau^2}{2}\right)\exp\left(\frac{i a (t-\tau)^2}{2}\right)d\tau = \\ &= g_0 \exp\left(\frac{i a t^2}{2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \dot{Z}(\tau)\exp(-i a t \tau)d\tau = g_0 \exp\left(i \frac{at^2}{2}\right) \dot{S}_z(iat), \end{aligned} \quad (69)$$

где  $\dot{S}_z(iat)$  – преобразование Фурье комплексной огибающей (39).

Найдем действительную огибающую, мгновенную начальную фазу и переменную составляющую мгновенной частоты сигнала (69):

$$V(t) = g_0 S_z(at), \quad (70)$$

$$\varphi_v(t) = \arg \dot{S}_z(iat) + \frac{at^2}{2}, \quad (71)$$

$$\Omega_v(t) = \frac{d\varphi_v(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ \arg \dot{S}_z(iat) \right] + at. \quad (72)$$

Таким образом, сигнал на выходе НФФ с оптимальной нелинейностью (52) имеет огибающую, совпадающую по форме с амплитудным спектром входного сигнала; его мгновенная начальная фаза содержит две составляющие – первая совпадает с фазовым спектром входного сигнала, а вторая – квадратичная; переменная составляющая мгновенной частоты также имеет две составляющие – первая совпадает с производной фазового спектра входного сигнала, а вторая – линейная с положительным коэффициентом ЛЧМ.

Для сравнительного анализа эффективности временного сжатия сигнала с помощью НФФ найдем отклик линейного звена на тот же сигнал с огибающей (39). Вычисляя свертку, аналогичную выражению (69) получим:

$$\dot{Y}_l(t) = g_0 \dot{S}'_z(iat) \exp\left(i \frac{at^2}{2}\right), \quad (73)$$

где  $\dot{S}'_z(iat)$  – преобразование Фурье комплексной огибающей вида:

$$\dot{Z}'(t) = \dot{Z}(t)\exp\left(i \frac{at^2}{2}\right) = Z(t)\exp\left(i \left( \varphi_z(t) + \frac{at^2}{2} \right)\right). \quad (74)$$

Как было сказано выше, ЛЗ реализует преобразование Френеля. Его, в свою очередь, можно трактовать как преобразование Фурье на временной оси комплексного сигнала вида (39), у которого «до» и «после» преобразования Фурье развивается ЛЧМ. Если перед ЛЗ располагается НЗ с оптимальной нелинейностью (52), то ЛЧМ «до» преобразования Фурье устраняется. При необходимости ЛЧМ «после» преобразования

Фурье также можно устранить, включив на выходе ЛЗ второе НЗ, т.е. используя трехзвенный НФФ:

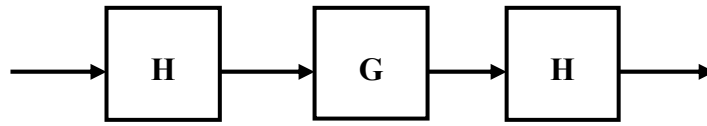


Рис.6. Структурная схема трехзвенного нелинейного фазового фильтра.

Иными словами, трехзвенный НФФ в чистом виде реализует «временное» преобразование Фурье комплексного сигнала (39):

$$\dot{V}(t) = g_0 \dot{S}_z(iat). \quad (75)$$

Следует отметить, что указанная связь преобразований Френеля и Фурье известна в оптике и используется при описании преобразований изображений тонкими линзами [9].

Рассмотрим снова преобразование импульса с гауссовской огибающей (53) в двух- и трехзвенном НФФ. Спектр такого импульса также будет гауссовским:

$$\dot{S}_z(i\omega) = \sqrt{2\pi} U \tau_u \exp\left(-0,5\omega^2\tau_u^2\right). \quad (76)$$

Отклик двухзвенного НФФ будет иметь гауссовскую комплексную огибающую и внутримпульсную ЛЧМ:

$$\dot{V}(t) = U_v \exp\left(-\frac{t^2}{2\tau_v^2}\right) \exp\left(i\frac{at^2}{2}\right), \quad (77)$$

где

$$U_v = \sqrt{a} U \tau_u, \quad (78)$$

$$\tau_v = \frac{1}{a\tau_u}. \quad (79)$$

Отклик трехзвенного НФФ будет отличаться от (77) отсутствием последнего множителя:

$$\dot{V}(t) = U_v \exp\left(-\frac{t^2}{2\tau_v^2}\right). \quad (80)$$

Из (78) и (79) видно, что если выбрать коэффициент ЛЧМ

$$a > 1/\tau_u^2, \quad (81)$$

то импульс после НФФ будет расти по амплитуде и сжиматься по длительности, т.е.

$$U_v > U \quad \text{и} \quad \tau_v < \tau_u.$$

Количественно степень сжатия импульса в НФФ можно оценить коэффициентом сжатия на уровне его среднеквадратической полуширины. Если НФФ имеет оптимальную нелинейность (6), то его можно найти следующим образом

$$k_c = \frac{\tau_v}{\tau_u} = \frac{g_0}{U} \int_{-\infty}^{\infty} |Z(\tau)| d\tau. \quad (82)$$

В частности, для гауссовского импульса этот коэффициент имеет значение

$$k_c = \tau_u \sqrt{a}. \quad (83)$$

Таким образом, степень сжатия импульса определяется только дисперсионным параметром линейного звена  $a$ . Он, в свою очередь, определяет скорость и диапазон изменения мгновенной частоты сигнала на выходе НЗ и мгновенной частоты импульсной характеристики ЛЗ, т.е. частотой дискретизации сигнала на входе НФФ и длительностью входного сигнала. Для примера на рисунке 7, изображены гауссовские импульсы на входе и выходе НФФ с логарифмической нелинейностью (55) и импульсной характеристикой, изображенной на рис.5. Коэффициент  $k_c$  при этом имеет значение приблизительно 5,5 и может быть существенно увеличен путем увеличения коэффициента ЛЧМ  $a$ .

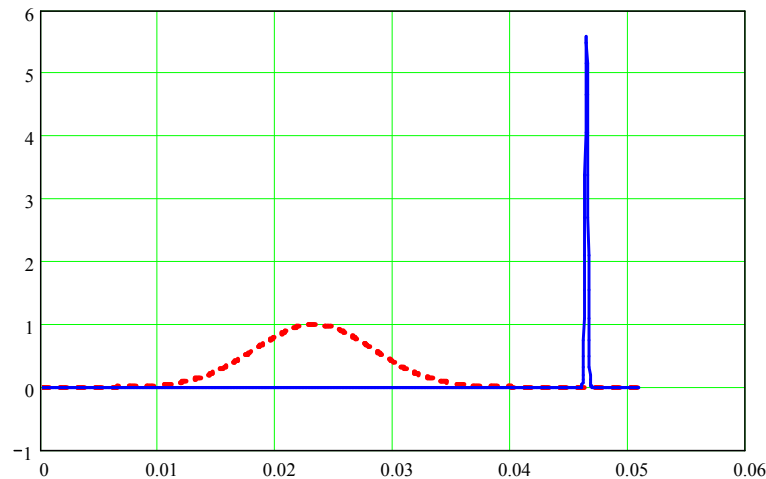


Рис. 7. Сигналы на входе (штриховая линия) и выходе НФФ с логарифмической нелинейностью

К сожалению, амплитуда реальных сигналов и их длительность изменяются во времени. Как показывает моделирование, при больших значениях коэффициента ЛЧМ  $a$  небольшие изменения параметров входного импульса приводят к существенному изменению  $k_c$ . Этот факт не позволяет получить очень большие значения коэффициента сжатия. Для количественной оценки степени влияния флуктуаций параметров импульса на  $k_c$  нужно решать более сложную задачу статистической оптимизации НФФ, но ее решение выходит за рамки данной работы.

Кроме того, в процессе передачи реальных сигналов по каналу может изменяться их форма. В этом случае необходимо адаптировать НФФ путем изменения вида нелинейности (52), что существенно усложнит работу устройства за счет введения в схему дополнительных элементов. При этом выгоднее использовать НФФ с такой нелинейностью, которая была бы в наименьшей степени чувствительной к изменению формы и параметров входных сигналов, но при этом обеспечивала достаточно эффективное сжатие сигнала. Как показано в [10], таким свойством обладает НФФ с квадратичной нелинейностью вида (4). Например, при прохождении импульса с гауссовской огибающей через такой НФФ, закон изменения переменной составляющей мгновенной частоты сигнала на выходе НЗ будет следующим:

$$\begin{aligned} \Omega_y(t) &= \frac{d}{dt} \{f(|Z(t)|)\} = \frac{d}{dt} \left\{ \chi |Z(t)|^2 \right\} = \\ &= -\frac{2\chi U^2}{\tau_u^2} t \exp\left(-\frac{t^2}{\tau_u^2}\right). \end{aligned} \quad (84)$$

График зависимости (84) изображен сплошной линией на рисунке 8. Здесь же для сравнения приведен график зависимости (61) для НЗ с логарифмической нелинейностью

(55).

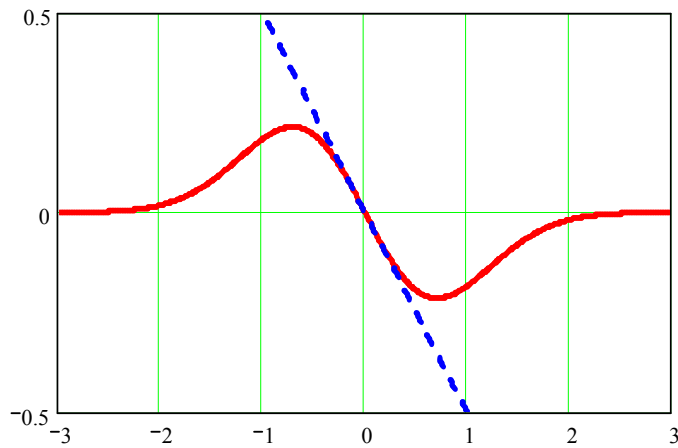


Рис. 8. Зависимости частоты сигнала на выходе НЗ с квадратичной (сплошная линия) и логарифмической (штриховая линия) нелинейностью.

Как видно из рисунка, квадратичная нелинейность НЗ, в отличие от логарифмической, обеспечивает локальную ЛЧМ в центре импульса. Можно показать, что для обеспечения равенства коэффициента наклона касательной к функции (84) в центре импульса и коэффициента ЛЧМ  $a$ , необходимо выбрать параметр нелинейности

$$\chi = \frac{a\tau_u^2}{2U^2}. \quad (85)$$

При этом ЛЗ сжимает импульс в пределах интервала

$$t = \pm \frac{\tau_u}{\sqrt{2}}. \quad (86)$$

На рисунке 9 показаны диаграммы гауссовского импульса на входе (штриховая линия) и выходе НФФ с квадратичной нелинейностью.

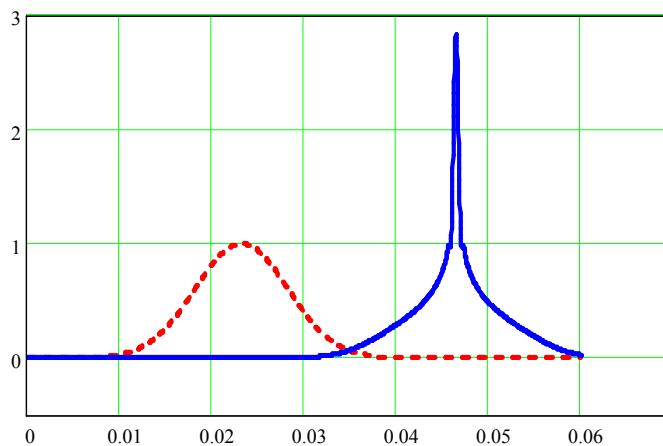


Рис. 9. Сигналы на входе (штриховая линия) и выходе НФФ с квадратичной нелинейностью.

Очевидно, что такой НФФ обеспечивает меньший коэффициент сжатия импульса на

уровне среднеквадратической полуширины, чем НФФ с логарифмической нелинейностью – на рисунке он имеет значение  $k_c \approx 2$ . Несмотря на это, такая нелинейность является более предпочтительной, т.к. из-за своего локального характера НФФ оказывается менее чувствительным к изменениям параметров и формы входных импульсов.

#### 4. Заключение

Следует отметить, что НФФ с квадратичной нелинейностью вида (4) можно реализовать не только в цифровой, но и в аналоговой форме, например, для оптических сигналов. Этот способ использовался, в частности, для получения оптических лазерных импульсов фемтосекундного диапазона и подробно описан в [6]. В качестве НЗ при этом использовался короткий, порядка 3 метров, отрезок оптического волокна (ОВ), работающего в нелинейном режиме. В ОВ проявляется эффект фазовой самомодуляции, т.е. развивается локальная ЛЧМ, с зависимостью частоты от времени, аналогичной (84). В качестве ЛЗ использовалась дифракционная решетка, также реализующая преобразование Френеля. Трудность такого способа реализации НФФ состоит в том, что нелинейные эффекты в обычных оптических волокнах, в частности фазовая самомодуляция, начинают проявляться при достаточно больших мощностях сигналов – единицы ватт и выше. Сигналы, передаваемые по реальным волоконно-оптическим линиям связи имеют значительно меньшие мощности. Поэтому при такой реализации НФФ необходимо иметь специальные волокна с повышенными нелинейными свойствами или другие аналогичные им устройства.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Залманзон Л.А. Преобразования Фурье, Уолша, Хаара и их применения в управлении, связи и других областях. – М.: Наука, 1989. – 496 с.
2. Ахмед Н., Рао К.Р. Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов. – М.: Связь, 1980. – 248 с.
3. Широков С.М., Григоров И.В. Метод подавления импульсных помех при обработке сигналов и изображений // Компьютерная оптика. - 1996. Вып.16. - С.97-102.
4. Григоров И.В. Использование нелинейных ортогональных преобразований для сжатия сигналов звукового диапазона. // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. – 2005. – Т. 8, – №3. – С. 58–62.
5. Скотт Э. Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике. - М.: Сов.радио, 1977. – 424 с.
6. Ахманов С.А., Выслоух В.А., Чиркин А.С. Оптика фемтосекундных лазерных импульсов. – М.: Наука, 1988. – 312 с.
7. Агравал Г. Нелинейная волоконная оптика. – М.: Мир, 1996. 328 с.
8. Ширман Я.Д. Разрешение и сжатие сигналов. - М.: Советское радио, 1974. - 360 с.
9. Папулис А. Теория систем и преобразований в оптике. М.: Мир, 1971, 495 с.
10. Shirokov S.M., Grigorov I.V. Suppression of impulsive noise at space-time signals and images processing with use of nonlinear phase filters. Proceedings of World Multiconference on Systemics, Cybernetics and Informatics, vol. XII. – Orlando, Florida, USA, 2001, pp. 401-404.