

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ДВУМЕРНЫЕ WA-СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ
КРАВЧЕНКО–РВАЧЕВА И ИХ ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА

© 2011 г. В. Ф. Кравченко, академик В. И. Пустовойт, Д. В. Чуриков

Поступило 06.04.2011 г.

В работе впервые на основе теории атомарных и R -функций построен новый класс аналитических двумерных вейвлет-функций (2DWA) Кравченко–Рвачева (КР) с опорными областями нестандартной формы [1–5]. Известно [6], что такие опорные области имеют место в задачах пространственно-временной обработки, многомерной цифровой фильтрации и спектрального анализа сигналов различной физической природы. Данное сообщение состоит из трех частей. В первой с использованием теории R -функций (функций Рвачева) [1–3] обосновывается методика описания локусов сложной формы. Во второй предложены и обоснованы новые соотношения, с помощью которых возможно построение аналитических 2DWA КР. В третьей с учетом [7–10] проведен численный эксперимент и дан физический анализ полученным результатам.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ
ЛОКУСОВ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ
ФУНКЦИЯМИ РВАЧЕВА

Решение обратной задачи аналитической геометрии. Пусть в R_2 задана область Ω с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$. Необходимо построить функцию $\omega(x_1, x_2)$, которая положительна внутри Ω , отрицательна вне ее и равна нулю на $\partial\Omega$. Уравнение $\omega(x_1, x_2) = 0$ определяет геометрическое место точек, представляющих границу области [1, 2]. Если обозначить характеристическую функцию, соответствующую области Ω , через $\chi = (\omega(x_1, x_2) \geq 0)$, то тогда располагая некоторой системой $\chi_i = (\omega_i(x_1, x_2) \geq 0)$, $i = 1, 2, \dots, N$, характеристических функций и булевой функцией $F(X_1, X_2, \dots, X_N)$, можно построить предикат

$\chi = F(\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_N) = F((\omega_1 \geq 0), \dots, (\omega_N \geq 0))$. Область Ω построена из вспомогательных областей $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N$ по правилам алгебры логики. Отсюда следуют определения [1, 2].

Определение 1. R -функцией, соответствующей разбиению числовой оси на интервале $(-\infty, 0)$ и $[0, \infty)$, называется такая функция, знак которой вполне определяется знаками ее аргументов.

Определение 2. Система функций H , составленная из R -функций, называется достаточно полной, если множество всех суперпозиций элементов H (множество H -реализуемых функций) имеет непустое пересечение с каждой ветвью множества R -функций.

Определение 3. Согласно [2] локусом, описываемым уравнением $f(x) = 0$, является множество всех точек пространства E^n , в которых функция $y = f(x)$, $x = x(x_1, x_2, \dots, x_n)$, принимает значения, равные нулю.

Следовательно, теория R -функций позволяет на аналитическом уровне описывать локусы сложной формы. Сложные геометрические структуры можно рассматривать как системы более простых. Они образуют систему опорных геометрических объектов, для которых имеются уравнения $f = 0$ (или неравенства $f \geq 0$) их определяющие. Справедлива теорема [2].

Теорема 1. Если f – непрерывная функция, определенная в пространстве E^n , то локус $f = 0$ и область $f \geq 0$ представляют собой замкнутые множества (пустое множество и все пространство считаются открытыми и замкнутыми одновременно).

Таким образом, имеется некоторая конечная система опорных объектов $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n$, а $F(X_1, X_2, \dots, X_n)$ – произвольная булева функция, которую можно представить в виде суперпозиции следующих операций: конъюнкции, дизъюнкции и отрицания. Полученный объект $\Sigma(x)$ можно рассматривать как результат применения к опорным

Институт радиотехники и электроники
им. В.А. Котельникова
Российской Академии наук, Москва
Научно-технический центр
уникального приборостроения
Российской Академии наук, Москва

Таблица 1. Основные системы R-функций

Система	Сопровождающая булева функция		
	$F_1(a, b) = a \wedge b$	$F_2(a, b) = a \vee b$	$F_3(b) = \bar{b}$
R_α	$\frac{x_1 + x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2\alpha x_1 x_2}}{1 + \alpha}$	$\frac{x_1 + x_2 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2\alpha x_1 x_2}}{1 + \alpha}$	$\bar{x} = -x$
R_0^m	$(x_1 + x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}) \cdot (x_1^2 + x_2^2)^{m/2}$	$(x_1 + x_2 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2}) \cdot (x_1^2 + x_2^2)^{m/2}$	$\bar{x} = -x$
R_1	$\frac{1}{2}(x + y - x - y)$	$\frac{1}{2}(x + y + x - y)$	$\bar{x} = -x$

$\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n$ некоторого набора операций $X_1 \cap X_2, X_1 \cup X_2$ и \bar{X} (табл. 1).

Рассмотрим примеры описания областей сложной формы.

Пример 1. Звездообразная опорная область (ОП: рис. 1а). Логическая формула для ее описания имеет следующий вид:

$$\omega_1(x_1, x_2) = [\omega_{11} \wedge \omega_{12} \wedge \omega_{13}] \vee [\omega_{14} \wedge \omega_{15} \wedge \omega_{16}], \quad (1)$$

где

$$\omega_{11} = \frac{-1}{\sqrt{3}}(x_1 - \sqrt{3}), \quad \omega_{12} = 1 + \frac{1}{3}(x_1 + x_2\sqrt{3}),$$

$$\omega_{13} = 1 + \frac{1}{3}(x_1 - x_2\sqrt{3}), \quad \omega_{14} = \frac{1}{\sqrt{3}}(x_1 + \sqrt{3}),$$

$$\omega_{15} = 1 + \frac{-1}{3}(x_1 - x_2\sqrt{3}), \quad \omega_{16} = 1 + \frac{-1}{3}(x_1 + x_2\sqrt{3}).$$

Поведение функции $\omega_1(x_1, x_2)$ приведено на рис. 1б.

Пример 2. Сложная опорная область, полученная объединением окружности и креста (рис. 1в). Логическая формула описания ОП запишется так:

$$\omega_2(x_1, x_2) = [\omega_{21} \wedge \omega_{22} \wedge \omega_{23} \wedge \omega_{24}] \vee [\omega_{25} \wedge \omega_{26} \wedge \omega_{27} \wedge \omega_{28}] \vee \omega_{29}, \quad (2)$$

где

$$\omega_{21} = -2x_1 + 1, \quad \omega_{22} = 2x_1 + 1, \quad \omega_{23} = 0.4x_2 + 1, \quad \omega_{24} = -0.4x_2 + 1,$$

$$\omega_{25} = -2x_2 + 1, \quad \omega_{26} = 2x_2 + 1, \quad \omega_{27} = 0.4x_1 + 1, \quad \omega_{28} = -0.4x_1 + 1,$$

$$\omega_{29} = 1 - \sqrt{\frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{4}}.$$

Вид функции $\omega_2(x_1, x_2)$ показан на рис. 1г.

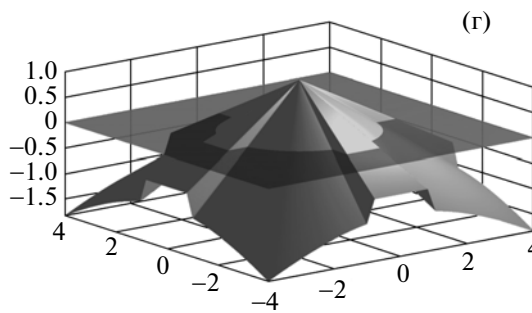
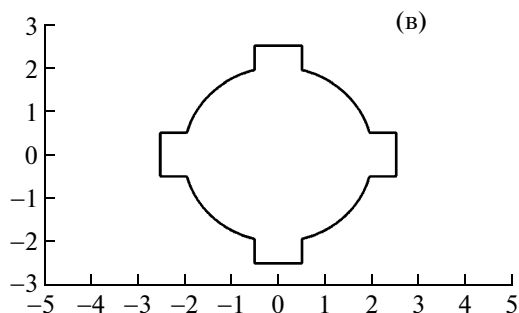
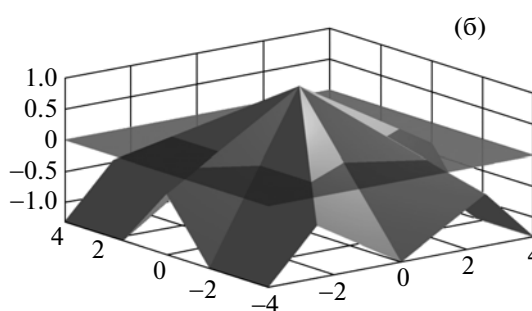
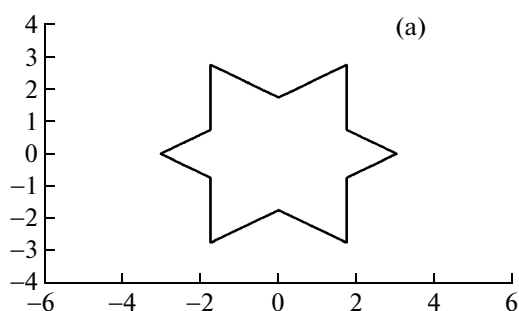


Рис. 1. Опорные области со сложной геометрией (а, в), соответствующие им R-функции и плоскости $y = 0$ (б, г).

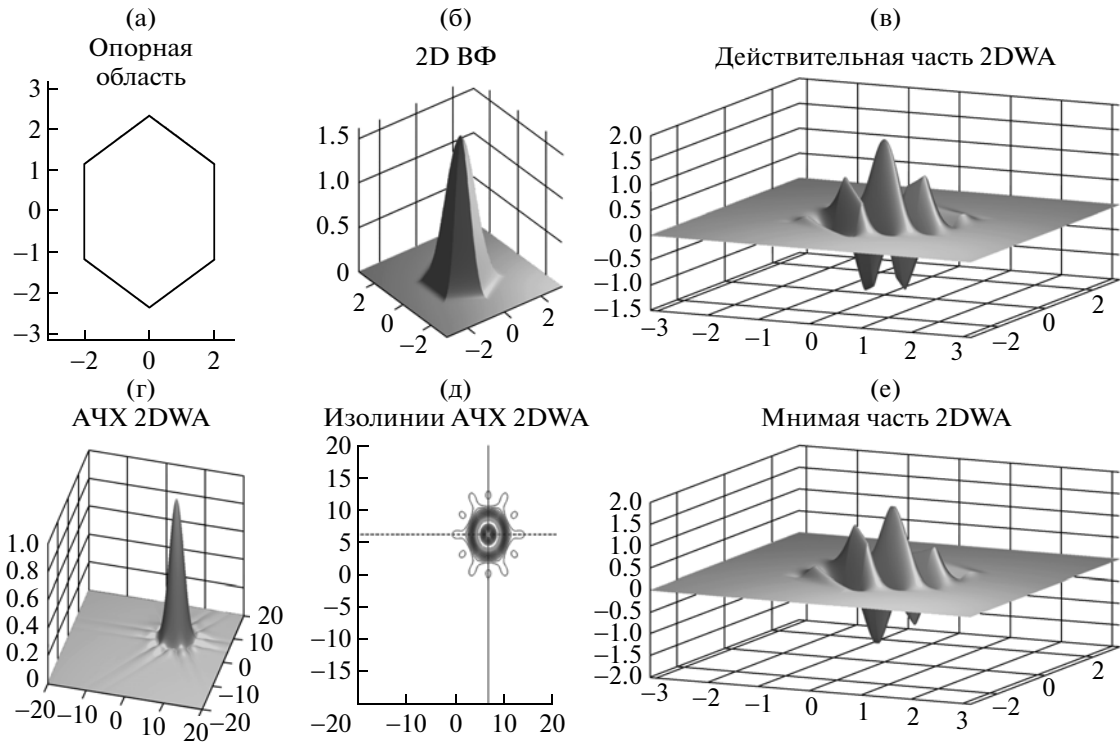


Рис. 2. Опорная область 1 (а), 2D ВФ $s(x, y)$ (б), действительная (в) и мнимая (е) части построенного вейвлета, спектр вейвлета (г) и его изолинии (д), $\eta_1 = \eta_2 = 2\pi$.

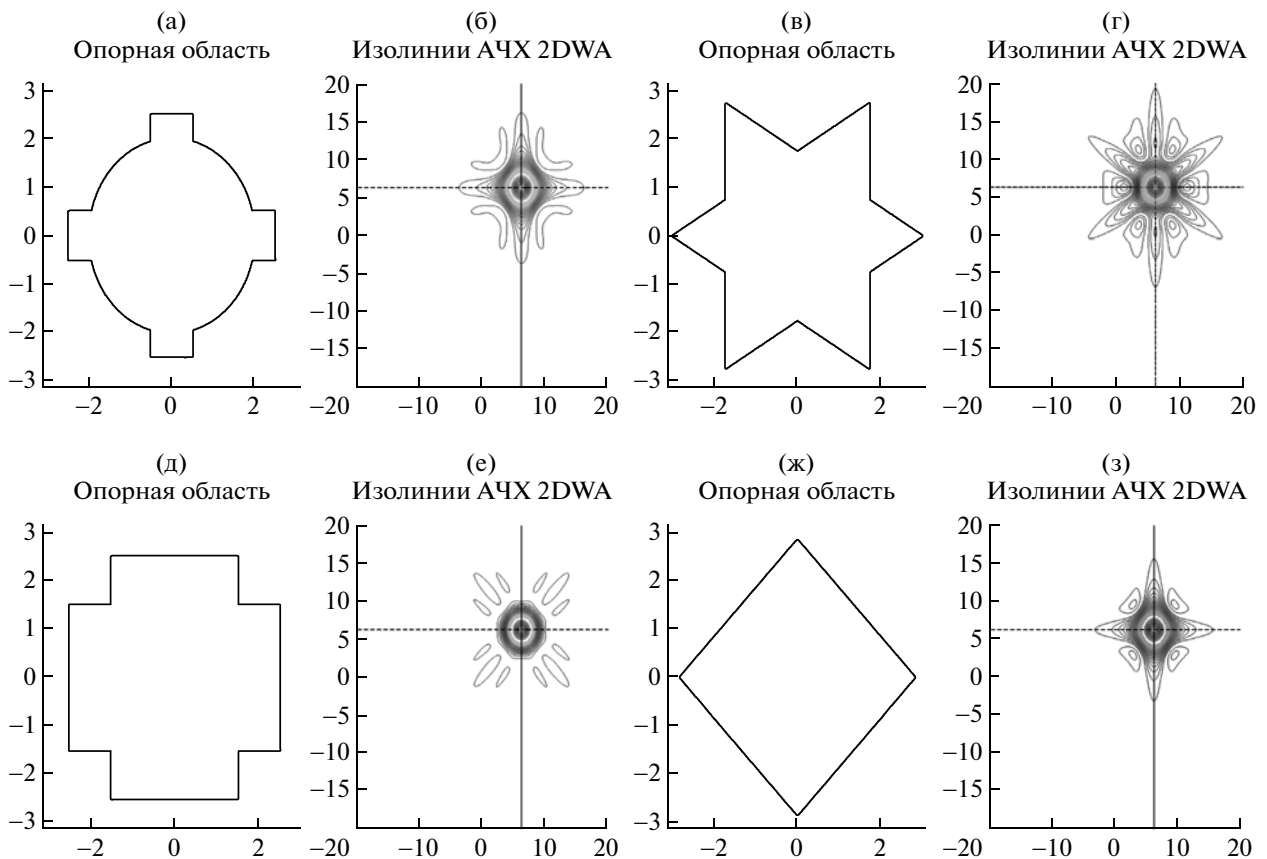


Рис. 3. Опорные области 2–5 (а, в, д, ж) и изолинии спектров соответствующих вейвлетов (б, г, е, з); $\eta_1 = \eta_2 = 2\pi$.

Таблица 2. Физические характеристики построенных вейвлетов ($\eta_1 = \eta_2 = 2\pi$)

Номер опорной области	$\frac{\gamma_4}{\gamma_3}$	$\frac{\gamma_2}{\gamma_3}$	γ_7	γ_8	γ_9	Δ	J
Атомарная функция $\text{fup}_3(x)$							
1	1.375	2.875	0.326	0.312	-33.436	0.204	1.855
2	1.429	2.286	0.308	0.295	-30.503	0.268	1.922
3	1.429	2.857	0.261	0.250	-21.543	0.310	2.309
4	1.500	2.667	0.215	0.206	-30.542	0.187	2.224
5	1.429	2.143	0.282	0.270	-27.838	0.202	1.919
Атомарная функция $\Xi_3(x)$							
1	1.429	3.000	0.634	0.271	-32.059	0.175	1.780
2	1.286	2.000	0.600	0.256	-29.046	0.236	1.660
3	1.500	3.000	0.507	0.217	-20.995	0.267	2.202
4	1.333	2.333	0.418	0.179	-29.911	0.161	1.915
5	1.500	2.167	0.549	0.235	-26.663	0.174	1.829
Атомарная функция $h_3(x)$							
1	1.200	2.000	0.215	0.121	-20.365	0.092	2.344
2	1.500	2.000	0.203	0.114	-17.362	0.150	2.728
3	1.500	2.750	0.172	0.097	-15.036	0.144	3.197
4	1.250	2.000	0.142	0.080	-21.662	0.087	3.011
5	1.500	2.000	0.186	0.104	-16.463	0.092	2.827

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ДВУМЕРНЫЕ ВЕЙВЛЕТЫ КРАВЧЕНКО-РВАЧЕВА

Построение 2DWA КР состоит из нескольких этапов. На первом задается locus ОП во временном или частотном пространстве. С помощью полной системы R-функций составляется уравнение ОП $\omega(x, y) \geq 0$, такое что $\max \omega(x, y) = \omega(0, 0) = 1$. На втором определяется функция

$$s(x, y) \equiv bw(c[1 - \omega(x, y)]),$$

где $w(*)$ – одномерная весовая функция, а величины b, c служат для нормировки атомарной функции: $\max bw(cx) = bw(0) = 1, bw(c) = 0.5$. Функция $s(x, y)$ модулируется комплексной экспонентой

$$\varphi(x, y) = s(x, y)e^{i(x\eta_1 + y\eta_2)}.$$

Параметры η_1, η_2 выбираются в соответствии с требуемыми частотными свойствами определяемого вейвлета. Спектр вейвлета вычисляется так:

$$\hat{\varphi}(f_1, f_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x, y) e^{-i(f_1x + f_2y)} dx dy. \quad (3)$$

Таким образом, получены аналитические 2DWA КР с ОП сложной геометрии. Построение 2DWA КР с ОП 1 представлено на рис. 2. На рисунке 3 приведены ОП 2–5, а также изолинии спектров соответствующих вейвлетов.

ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА АНАЛИТИЧЕСКИХ ДВУМЕРНЫХ ВЕЙВЛЕТОВ КРАВЧЕНКО–РВАЧЕВА

Для исследования двумерных функций будем использовать модифицированные физические характеристики [1, 2]. Относительная ширина функции спектральной плотности (ФСП) по уровню -6 дБ $\left(\gamma_{4/3} = \frac{\gamma_4}{\gamma_3}\right)$, где γ_3 – ширина ФСП по уровню -3 дБ. Относительное положение первого нуля ФСП $\left(\gamma_{2/3} = \frac{\gamma_2}{\gamma_3}\right)$. Когерентное усиление задается соотношением

$$\gamma_7 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x, y)| dx dy \right)^{-1}.$$

Эквивалентная шумовая полоса:

$$\gamma_8 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x, y)|^2 dx dy}{\left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x, y)| dx dy \right)^2} = \gamma_7^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x, y)|^2 dx dy.$$

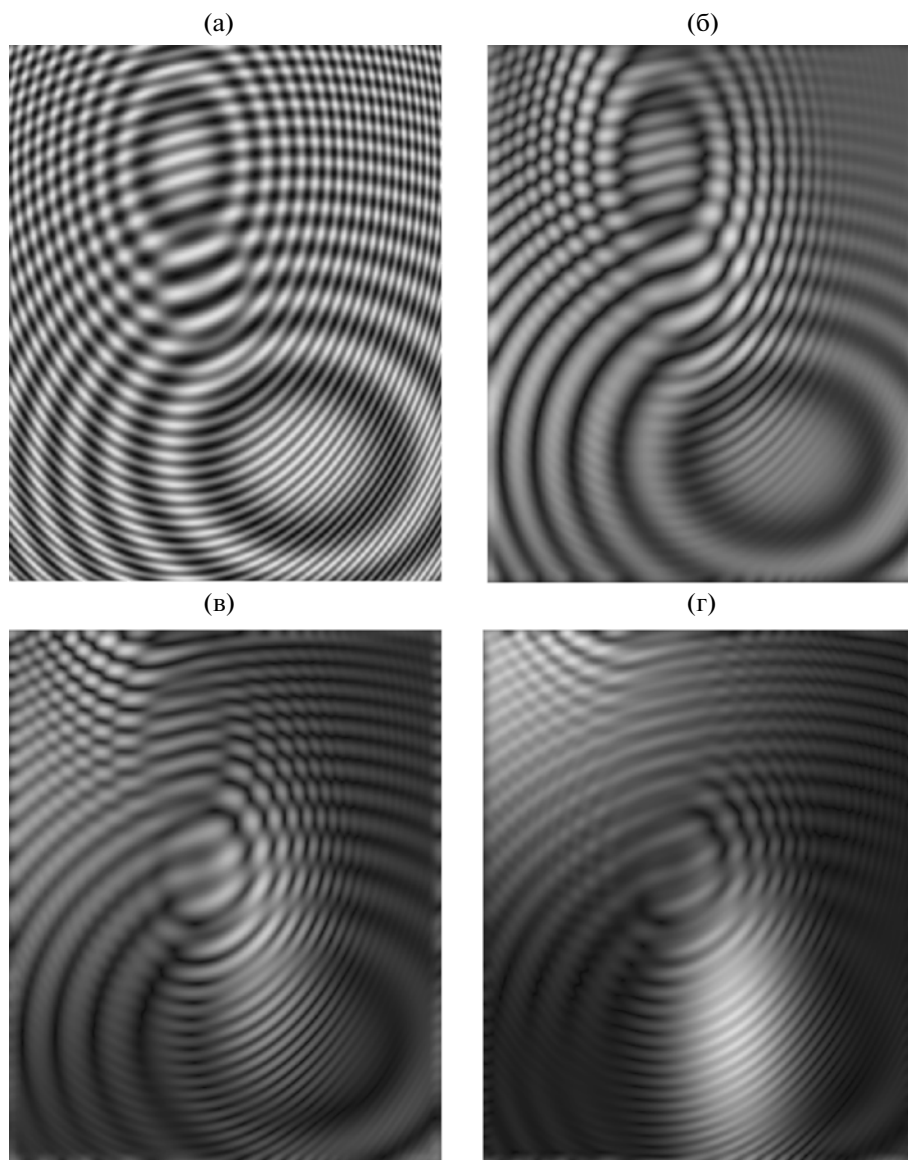


Рис. 4. Сумма двух пространственных линейно частотно-модулированных сигналов (а), результаты вейвлет-преобразования для $\eta_1 = \pi$, $\eta_2 = 0.5\pi$ (б), $\eta_1 = \pi$, $\eta_2 = \pi$ (в), $\eta_1 = \pi$, $\eta_2 = 1.5\pi$ (г).

Максимальный уровень боковых лепестков (в дБ) вычисляется с помощью выражения

$$\gamma_9 = 10 \lg \max_k \left| \frac{\hat{\varphi}(f_{1m,k}, f_{2m,k})}{\hat{\varphi}(f_{1\max}, f_{2\max})} \right|^2,$$

где $(f_{1m,k}, f_{2m,k})$ — координаты локальных максимумов ФСП, отличные от главного максимума $(f_{1\max}, f_{2\max})$. Константы неопределенности по времени и частоте рассчитываются так:

$$x^* = \frac{1}{\|\varphi(x, y)\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x |\varphi(x, y)|^2 dx dy,$$

$$\Delta_x = \frac{1}{\|\varphi(x, y)\|} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - x^*)^2 |\varphi(x, y)|^2 dx dy \right)^{1/2},$$

$$f_1^* = \frac{1}{\|\hat{\varphi}(f_1, f_2)\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_1 |\hat{\varphi}(f_1, f_2)|^2 df_1 df_2,$$

$$\Delta_{f_1} = \frac{1}{\|\hat{\varphi}(f_1, f_2)\|} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (f_1 - f_1^*)^2 |\hat{\varphi}(f_1, f_2)|^2 df_1 df_2 \right)^{1/2}.$$

Аналогично вычисляются Δ_y и Δ_{f_2} . Время-частотная локализация характеризуется произведе-

ниями $\Delta = \Delta_x \Delta_{f_2} = \Delta_y \Delta_{f_1}$. Значения эталонных характеристик:

$$\gamma_{4/3}^* = 1, \quad \gamma_{2/3}^* = 1, \quad \gamma_7 = 1, \quad \gamma_8 = 1. \quad (4)$$

Функционал близости фильтра к идеальному. Используя [7–10], построим функционал качества выбора аналитических 2DWA КР и анализ изменения физических характеристик двумерных функций по отношению к эталонным (4). Функционал близости фильтра к идеальному запишется так:

$$J = \left| \frac{\gamma_{4/3}^* - \gamma_{4/3}}{\gamma_{4/3}^*} \right| + \left| \frac{\gamma_{2/3}^* - \gamma_{2/3}}{\gamma_{2/3}^*} \right| + \left| \frac{\gamma_7^* - \gamma_7}{10\gamma_7^*} \right| + \left| \frac{\gamma_8^* - \gamma_8}{10\gamma_8^*} \right| + \left| \frac{10}{\gamma_9} \right| + \Delta, \quad (5)$$

где γ^* – эталонная характеристика. В табл. 2 приведены физические характеристики и значения функционала близости фильтра к идеальному для 2DWA КР с опорными областями 1–5 и синтезированными для атомарных функций: $\text{fur}_3(x)$, $\Xi_3(x)$, $h_3(x)$.

Численный эксперимент. Для иллюстрации применения 2DWA КР рассмотрим задачу анализа суммы двух пространственных сигналов с линейной частотной модуляцией (рис. 4а). Результаты двумерного вейвлет-преобразования для разных комбинаций (η_1, η_2) представлены на рис. 4б, в, г.

Таким образом, построенные на теории атомарных и R-функций новые аналитические двумерные вейвлеты (как показал численный эксперимент) могут найти широкое применение в зада-

чах анализа интерференционных эффектов со сложной формой геометрии, фильтрации сигналов и распознавания образов.

Результаты работы частично были доложены на Международной конференции “Дни дифракции” [11].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кравченко В.Ф. Лекции по теории атомарных функций и некоторым их приложениям. М.: Радиотехника, 2003.
2. Кравченко В.Ф., Рвачев В.Л. Алгебра логики, атомарные функции и вейвлеты физических приложениях. М.: Физматлит, 2006.
3. Кравченко В.Ф., Лабунько О.С., Лерер А.М., Синяевский Г.П. Вычислительные методы в современной радиофизике. М.: Физматлит, 2009.
4. Цифровая обработка сигналов и изображений в радиофизических приложениях / Под ред. В.Ф. Кравченко. М.: Физматлит, 2007.
5. Kravchenko V.F., Perez-Meana H.M., Ponomaryov V.I. Adaptive Digital Processing of Multidimensional Signals with Applications. Moscow: Fizmatlit, 2009.
6. Dudgeon D.E., Mersereau R.M. Multidimensional Digital Signal Processing. Prentice-Hall, 1984.
7. Гуляев Ю.В., Кравченко В.Ф., Пустовойт В.И. // ДАН. 2007. Т. 413. № 3. С. 320–328.
8. Гуляев Ю.В., Кравченко В.Ф., Пустовойт В.И. // ДАН. 2007. Т. 417. № 4. С. 476–482.
9. Кравченко В.Ф., Пустовойт В.И. // ДАН. 2009. Т. 428. № 5. С. 601–607.
10. Кравченко В.Ф., Пустовойт В.И., Чуриков Д.В. // ДАН. 2011. Т. 436. № 5. С. 615–622.
11. Kravchenko V.F., Churikov D.V. In: Program Intern. Conf. “Days of Diffraction”. St. Petersburg, 2011. P. 63–64.