

УДК 517.5

НОВЫЕ ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ВЕЙВЛЕТЫ КРАВЧЕНКО $\{\widetilde{\text{up}}(t)\}$

© 2009 г. В. Ф. Кравченко, академик В. И. Пустовойт

Поступило 26.03.2009 г.

В работе предложена и обоснована новая конструкция ортогональных вейвлетов Кравченко $\{\widetilde{\text{up}}(t)\}$, построенных на основе атомарных функций (АФ) [1–6] с использованием идей и результатов, полученных в [1–8].

1. Требуется построить такую конструкцию вейвлетов на основе АФ, чтобы масштабирующая функция $\varphi(x)$ образовывала совокупность замкнутых вложенных друг в друга подпространств $V_j \subset L^2(\mathbb{R})$, $j \in \mathbb{Z}$, порождающих кратномасштабный анализ (КМА) [1–4, 6–8], который обладает такими свойствами:

$$1) \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \overline{V_j} = L^2(\mathbb{R});$$

$$2) \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\};$$

$$3) f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1};$$

4) существует масштабирующая функция $\varphi(x) \in V_0$, сдвиги которой образуют базис Рисса пространства V_0 .

Основополагающим является свойство 4). Согласно [1, 6], в качестве масштабирующей функции $\varphi(x)$ можно взять функцию, преобразование Фурье $\hat{\varphi}(\omega)$ которой является четной и финитной функцией. Процесс построения вейвлетов рассмотрим с использованием АФ $\text{up}(t)$, так как основные элементы алгоритма переносятся на другие [6] семейства АФ.

2. Пусть V_0 – подпространство в $L^2(\mathbb{R})$, порожденное сдвигами функции $\varphi(x)$. Чтобы функции $\varphi_n(x) = \varphi(x - n)$ образовывали базис Рисса [6–8] подпространства V_0 , необходимо выполнение следующих утверждений.

Теорема 1. Система $\{\varphi(x - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$, полученная сдвигами некоторой функции $\varphi(x) \in L^2(\mathbb{R})$, образует базис Рисса подпространства $V_0 \subset L^2(\mathbb{R})$

тогда и только тогда, когда существуют положительные постоянные A и B , такие что

$$A \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\omega + 2\pi n)|^2 \leq B. \quad (1)$$

Более того, для ортонормированных функций $\varphi_n(x) = \varphi(x - n)$ справедлива следующая

Теорема 2. Функции $\varphi_n(x) = \varphi(x - n)$ образуют ортонормированный базис подпространства $V_0 \subset L^2(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\omega + 2\pi n)|^2 = 1. \quad (2)$$

Будем искать сначала функцию $\chi(\omega) = |\hat{\varphi}(\omega)|^2$, сдвиги которой $\chi_n(\omega) = \chi(\omega + 2\pi n)$ образуют “разложение единицы”

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \chi(\omega + 2\pi n) = 1 \quad (3)$$

и удовлетворяет условиям

$$\text{supp}(\hat{f}(\omega)) = \left[-\frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right],$$

$$\hat{f}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{при } \omega \in \left[-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right], \\ 0.5 & \text{при } \omega = \pi. \end{cases}$$

Согласно свойствам АФ [3] $\text{up}(t)$:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \text{up}(t + n) = 1. \quad (4)$$

3. Чтобы ширина плоской вершины была больше или равна половине носителя функции, рассмотрим частичную сумму (рис. 1а)

$$\text{up}_1^{\text{sum}}(t) = \text{up}(t + 1) + \text{up}(t) + \text{up}(t - 1). \quad (5)$$

Далее перейдем от носителя $\text{supp}(\text{up}_1^{\text{sum}}(t)) = [-2, 2]$

к носителю $\text{supp}(\text{up}_1^{\text{sum}}(t)) \left[-\frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$:

$$\text{up}_2^{\text{sum}}(t) = \text{up}\left(\frac{3}{2\pi}t + 1\right) + \text{up}\left(\frac{3}{2\pi}t\right) + \text{up}\left(\frac{3}{2\pi}t - 1\right). \quad (6)$$

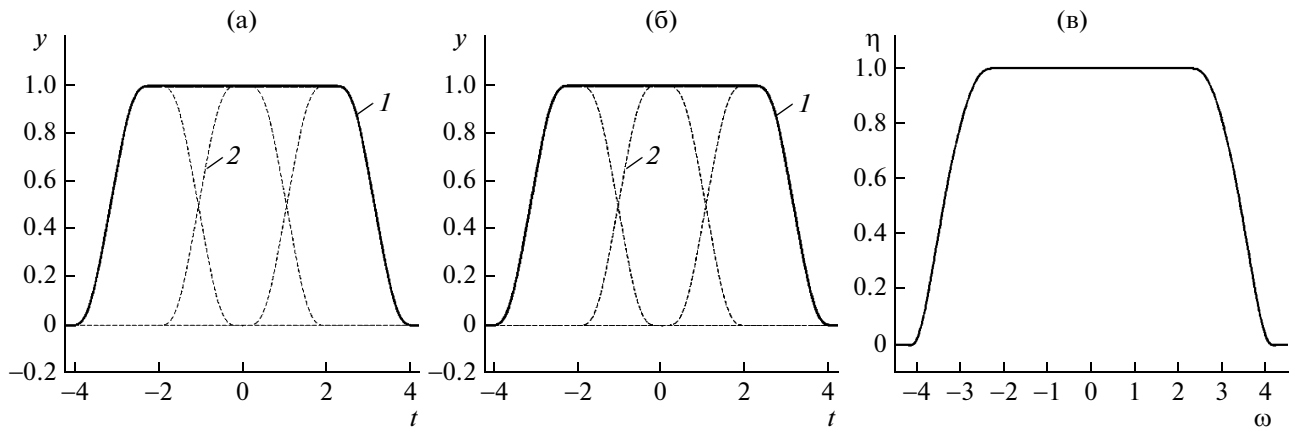


Рис. 1. Графики функций: а – $\text{up}_1^{\text{sum}}(t)$ (1) и $\text{up}(t+k)$, $k = -1, 0, 1$ (2); б – $\text{up}_2^{\text{sum}}(\omega)$: 1 – $\text{up}_2^{\text{sum}}(t)$; 2 – $\text{up}\left(\frac{3}{2\pi}t + n\right)$, $k = -1, 0, 1$; в – $\hat{\phi}(\omega)$ для вейвлета Кравченко $\{\tilde{\text{up}}(\omega)\}$.

Получим модифицированную АФ $\text{up}_2^{\text{sum}}(t)$, удовлетворяющую всем условиям, которыми должна обладать функция $\chi(\omega)$ (рис. 1б).

Осуществим формальную замену аргумента $t \rightarrow \omega$: $\chi(\omega) = \text{up}_2^{\text{sum}}(\omega)$. Для определения преобразования Фурье масштабирующей функции $\hat{\phi}(\omega)$ необходимо извлечь квадратный корень из $\chi(\omega)$:

$$\hat{\phi}(\omega) = \tilde{\text{up}}(\omega) = \sqrt{\text{up}\left(\frac{3}{2\pi}\omega + 1\right) + \text{up}\left(\frac{3}{2\pi}\omega\right) + \text{up}\left(\frac{3}{2\pi}\omega - 1\right)}. \quad (7)$$

График функции $\hat{\phi}(\omega)$ для нового вейвлета $\{\tilde{\text{up}}(\omega)\}$ представлен на рис. 1в. Следовательно, условие теоремы 2 выполняется по построению. Для доказательства достаточно проверить равенство (2), которое справедливо, если

$$|\tilde{\text{up}}(\omega)|^2 + |\tilde{\text{up}}(\omega - 2\pi)|^2 = 1 \quad (8)$$

на промежутке $\omega \in \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$.

Докажем теорему 2 для случая вейвлета Кравченко $\{\tilde{\text{up}}(\omega)\}$. Разложим левую часть (8) в сумму $\text{up}(\bullet)$:

$$\begin{aligned} |\tilde{\text{up}}(\omega)|^2 + |\tilde{\text{up}}(\omega - 2\pi)|^2 &= \text{up}\left(\frac{3}{2\pi}\omega\right) + \\ &+ \text{up}\left(\frac{3}{2\pi}\omega + 1\right) + \text{up}\left(\frac{3}{2\pi}\omega - 1\right) + \\ &+ \text{up}\left(\frac{3}{2\pi}(\omega - 2\pi)\right) + \text{up}\left(\frac{3}{2\pi}(\omega - 2\pi) + 1\right) + \\ &+ \text{up}\left(\frac{3}{2\pi}(\omega - 2\pi) - 1\right). \end{aligned} \quad (9)$$

Раскрывая скобки в аргументе $\text{up}(\bullet)$, получим

$$\begin{aligned} |\tilde{\text{up}}(\omega)|^2 + |\tilde{\text{up}}(\omega - 2\pi)|^2 &= \text{up}\left(\frac{3}{2\pi}\omega\right) + \text{up}\left(\frac{3}{2\pi}\omega + 1\right) + \\ &+ \text{up}\left(\frac{3}{2\pi}\omega - 1\right) + \text{up}\left(\frac{3}{2\pi}\omega - 3\right) + \\ &+ \text{up}\left(\frac{3}{2\pi}\omega - 2\right) + \text{up}\left(\frac{3}{2\pi}\omega - 4\right). \end{aligned} \quad (10)$$

Формулу (10) запишем так:

$$|\tilde{\text{up}}(\omega)|^2 + |\tilde{\text{up}}(\omega - 2\pi)|^2 = \sum_{n=-1}^4 \text{up}\left(\frac{3}{2\pi}\omega - n\right). \quad (11)$$

Согласно свойству АФ $\text{up}(\bullet)$ (5),

$$\begin{aligned} |\tilde{\text{up}}(\omega)|^2 + |\tilde{\text{up}}(\omega - 2\pi)|^2 &= \\ &= \sum_{n=-1}^4 \text{up}\left(\frac{3}{2\pi}\omega - n\right) \Big|_{\omega \in \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]} = 1. \end{aligned} \quad (12)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\omega + 2\pi n)|^2 \Big|_{\omega \in \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]} &= \\ &= \sum_{n=-1}^4 \text{up}\left(\frac{3}{2\pi}\omega - n\right) \Big|_{\omega \in \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]} = 1, \end{aligned} \quad (13)$$

что и требовалось доказать.

На рис. 2а показан график суммы полученных функций (13).

4. Для выполнения третьего свойства КМА необходимо, чтобы выполнялось масштабирующее уравнение

$$\hat{\phi}(\omega) = H_0\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \Leftrightarrow \hat{\phi}(\omega) = \prod_{k=1}^{\infty} H_0\left(\frac{\omega}{2^k}\right). \quad (14)$$

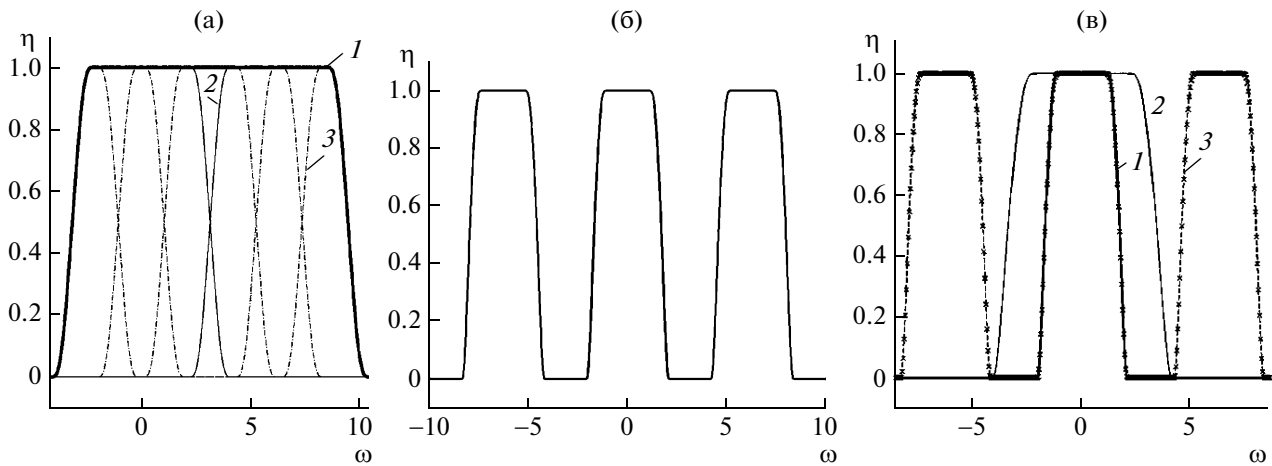


Рис. 2. Графики функций: а – $|\hat{\psi}(\omega)|^2 + |\hat{\psi}(\omega - 2\pi)|^2$; $|\hat{\psi}(\omega)|^2 + |\hat{\psi}(\omega - 2\pi)|^2$ (1); $|\hat{\psi}(\omega)|^2 + |\hat{\psi}(\omega - 2\pi)|^2$ (2); $\sum_{n=1}^a \text{up}\left(\frac{3}{2\pi}\omega - n\right)$, $\alpha = -1, 0, \dots, 4$ (3); б – функции $H_0(\omega)$ для вейвлета Кравченко $\{\hat{\psi}(\omega)\}$, проверка масштабирующего уравнения: $H_0(\omega/2)\hat{\phi}(\omega/2)$ (1); $\hat{\phi}(\omega/2)$ (2); $H_0(\omega/2)$ (3).

Из (14) определим частотную функцию отклика масштабирующей функции $H_0(\omega)$. Поскольку $\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) = 1$ на промежутке $\left[-\frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$, а $\hat{\phi}(\omega)$ обращается в нуль вне промежутка $\left[-\frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$, то $H_0(\omega) = \hat{\phi}(2\omega)$ при $\omega \in \left[-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$ и $H_0(\omega) = 0$, если $\omega \in \left[-\pi, -\frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$. Далее $H_0(\omega)$ продолжаем периодически с периодом 2π (рис. 2б):

$$H_0(\omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\phi}(2(\omega + 2\pi n)). \quad (15)$$

При подстановке (15) в (14) убеждаемся, что масштабирующее уравнение выполняется (рис. 2в):

$$H_0\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\phi}(\omega + 2\pi n)\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \hat{\phi}(\omega). \quad (16)$$

Тогда для функции $H_0(\omega)$ справедлива следующая [6, 7]

Теорема 3. Если сдвиги $\varphi_n(x) = \varphi(x - n)$ масштабирующей функции $\varphi(x)$ образуют ортонормированный базис подпространства V_0 , то частотная функция $H_0(\omega)$ обладает следующим свойством:

$$|H_0(\omega)|^2 + |H_0(\omega + \pi)|^2 = 1. \quad (17)$$

Доказательство теоремы 3 следует из (13) и (15). Геометрическое построение равенства (17) представлено на рис. 3а. Согласно [6], первые два

свойства КМА, которые сформулированы ниже в виде теорем, также выполняются.

Теорема 4. Если сдвиги $\varphi_n(x) = \varphi(x - n)$ масштабирующей функции $\varphi(x)$ образуют базис Рисса пространства V_0 , то $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$.

Теорема 5. Пусть масштабирующая функция $\varphi(x) \in L^2(\mathbb{R})$ удовлетворяет условию (1), а $\hat{\phi}(\omega)$ ограничена для всех ω и непрерывна в окрестности $\omega = 0$. Тогда $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$.

Таким образом, построено преобразование Фурье $\hat{\phi}(\omega)$ функции $\varphi(x)$ (рис. 3б), порождающей КМА:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(\omega) e^{i\omega x} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{-4\pi/3} \hat{\phi}(\omega) \cos \omega x d\omega. \quad (18)$$

Следовательно, можно определить ортогональный базис, полученный посредством сжатий и сдвигов вейвлета $\psi(x) \in W_0$ ($V_{j+1} = V_j \oplus W_j$, $W_j \perp V_j$, $W_j \perp W_k$ для всех $j, k \in \mathbb{Z}$, $k \neq j$), который обладает многими свойствами $\varphi(x)$. Согласно [6, 7], преобразование Фурье функции $\hat{\psi}(\omega)$ (рис. 3в) определяется так:

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(\omega) &= e^{i\omega/2} \overline{H_0\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)} \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \\ &= e^{i\omega/2} (\hat{\phi}(\omega - 2\pi) + \hat{\phi}(\omega + 2\pi)) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right). \end{aligned} \quad (19)$$

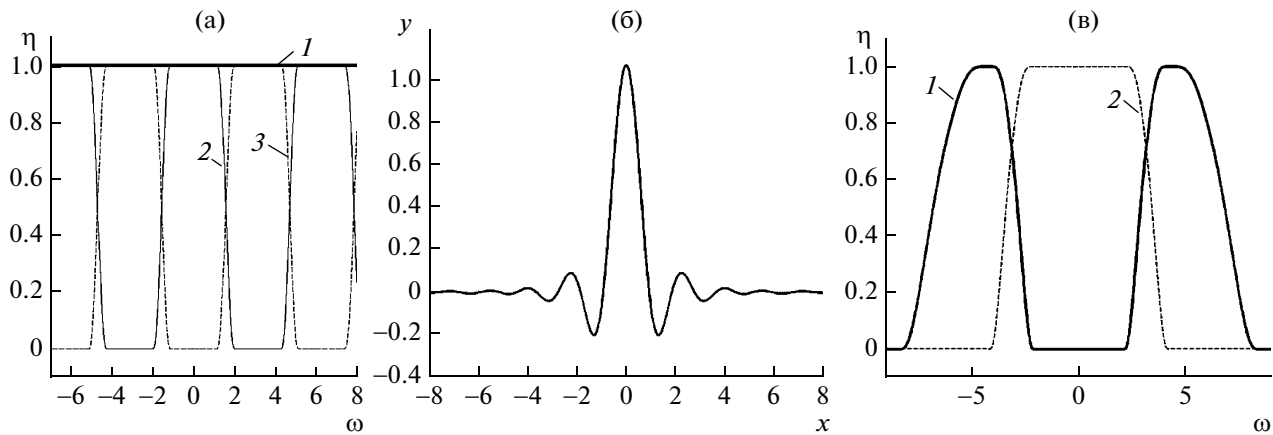


Рис. 3. Проверка: а – условия $|H_0(\omega)|^2 + |H_0(\omega + \pi)|^2 = 1$: $|H_0(\omega)|^2 + |H_0(\omega + \pi)|^2$ (1); $|H_0(\omega)|^2$ (2); $|H_0(\omega + \pi)|^2$ (3); б – масштабирующей функции $\varphi(x)$ Кравченко $\{\hat{\psi}(\omega)\}$; в – $\hat{\psi}(\omega)$ для вейвлета Кравченко $\{\hat{\psi}(\omega)\}$: $\hat{\psi}(\omega)$ (1); $\hat{\phi}(\omega)$ (2).

5. Покажем, что сдвиги $\psi_n(x) = \psi(x - n)$ образуют ортонормированный базис [8]:

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(\omega + 2\pi n)|^2 &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(\omega + 4\pi n)|^2 + \\ &+ \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(\omega + 2\pi + 4\pi n)|^2 = \\ &= \left| H_0\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) \right|^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2} + 2\pi n\right) \right|^2 + \\ &+ \left| H_0\left(\frac{\omega}{2}\right) \right|^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2} + \pi + 2\pi n\right) \right|^2 = \\ &= \left| H_0\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) \right|^2 + \left| H_0\left(\frac{\omega}{2}\right) \right|^2 = 1. \end{aligned} \quad (20)$$

Из (14), (17) и (19) следует свойство квадратов преобразования Фурье вейвлетов и масштабирующей функции

$$\begin{aligned} |\hat{\psi}(2\omega)|^2 &= |H_0(\omega + \pi)|^2 |\hat{\phi}(\omega)|^2 = \\ &= (1 + |H_0(\omega)|^2) |\hat{\phi}(\omega)|^2 = |\hat{\phi}(\omega)|^2 - |\hat{\phi}(2\omega)|^2 \end{aligned}$$

вида

$$|\hat{\phi}(\omega)|^2 + |\hat{\psi}(\omega)|^2 = \left| \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \right|^2. \quad (21)$$

Подставив в (21) преобразование Фурье масштабирующей функции $\hat{\phi}(\omega)$ и вейвлета $\hat{\psi}(\omega)$, убедимся в том, что оно выполняется (рис. 4а). Это обстоятельство позволяет сделать вывод о том, что с помощью вейвлетов Кравченко $\{\hat{\psi}(\omega)\}$ и масштабирующей функции уровня j можно получить масштабирующую функцию уровня $j + 1$ (принцип вложенности подпространств соблюдается). Выполнив обратное преобразование Фу-

рье для $\hat{\psi}(\omega)$, получим вейвлет в пространственной области $\psi(x)$ (рис. 4б):

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega/2} \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) (\hat{\phi}(\omega - 2\pi) + \hat{\phi}(\omega + 2\pi)) e^{i\omega x} d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-8\pi/3}^{2\pi/3} \hat{\phi}(\omega/2) \hat{\phi}(\omega - 2\pi) \cos \omega(x + 0.5) d\omega. \end{aligned} \quad (22)$$

Функция Кравченко $\psi(x)$ обладает всеми свойствами, которыми должен обладать вейвлет-базис. Они состоят в следующем:

$$1) \psi_{jn}(x) \in L^2(\mathbb{R}), \|\psi_{jn}(x)\| = 1;$$

$$2) \text{ нулевое среднее: } \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{jn}(x) dx = 0 \text{ или, что эквивалентно, } \hat{\psi}(0) = 0;$$

3) сдвиги $\psi_{jn}(x) = \psi_j(x - n)$ при любом масштабе j образуют ортонормированный базис.

Функции $\phi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют следующим масштабирующим уравнениям:

$$\phi(x) = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \phi(2x - n), \quad (23)$$

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n \psi(2x - n), \quad g_n = (-1)^{n+1} \bar{h}_{-n-1},$$

где $\{h_n\}$ – элементы фильтра $H(\omega) = \sqrt{2} H_0(\omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n e^{-in\omega}$ (низкочастотный фильтр разложения), которые находятся разложением в ряд Фурье функции $H_0(\omega)$:

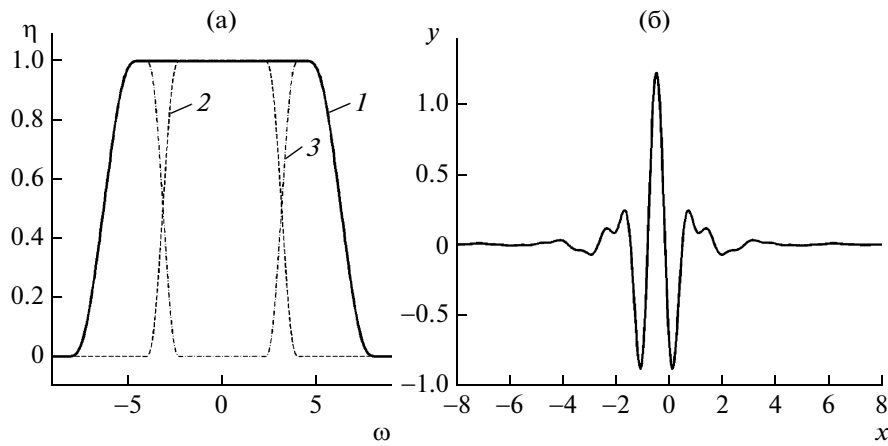


Рис. 4. а – Проверка условия $|\hat{\phi}(\omega)|^2 + |\hat{\psi}(\omega)|^2 = |\hat{\phi}(\omega/2)|^2$: $|\hat{\phi}(\omega)|^2 + |\hat{\psi}(\omega)|^2$ (1); $|\hat{\phi}(\omega)|^2$ (2); $|\hat{\psi}(\omega)|^2$ (3); б – график вейвлета $\psi(x)$ Кравченко $\{\tilde{\psi}(\omega)\}$.

$$h_n = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_0(\omega) e^{in\omega} d\omega. \quad (24)$$

Для коэффициентов фильтра $\{h_n\}$ (табл. 1) выполняется условие

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n = H_0(0) = 1. \quad (25)$$

Через $H(\omega)$ другие фильтры определяются следующим образом. Высокочастотный фильтр разложения:

$$G(\omega) = e^{i\omega} \overline{H(\omega + \pi)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n e^{-in\omega} =$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^{n+1} \bar{h}_{-n-1} e^{-in\omega};$$

низкочастотный фильтр восстановления:

$$\tilde{H}(\omega) = \overline{H(\omega)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{h}_n e^{-in\omega} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{h}_{-n} e^{-in\omega};$$

высокочастотный фильтр восстановления:

$$\tilde{G}(\omega) = e^{-i\omega} H(\omega + \pi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{g}_n e^{-in\omega} =$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^{n-1} h_{n-1} e^{-in\omega}.$$

Функции Кравченко $\{\tilde{\psi}(\omega)\}$ $\phi(x)$ и $\psi(x)$ не являются финитными. Однако они быстро убывают (в силу бесконечной дифференцируемости), поэтому можно выделить эффективный носитель $\text{supp}(\phi_3(x))$ и $\text{supp}(\psi_3(x))$ из следующих условий:

$$\begin{aligned} \|\phi - \phi_3\| \cdot 100 &\leq 0.0001\%, \\ \|\psi - \psi_3\| \cdot 100 &\leq 0.001\%. \end{aligned} \quad (26)$$

6. Носители новых функций Кравченко $\{\tilde{\psi}(\omega)\}$ имеют вид $\text{supp}(\phi_3(x)) = [-8, 8]$, $\text{supp}(\psi_3(x)) = [-8, 8]$. Тогда количество коэффициентов фильтра $\{h_n\}$ ограничивается ($n = -16, \dots, 16$). Вейвлеты Кравченко $\{\tilde{\psi}(\omega)\}$ своими свойствами напоминают вейвлеты Мейера и Котельникова–Шеннона, так как их алгоритмы построения аналогичны. В связи с этим они обладают следующими до-

Таблица 1. Коэффициенты фильтра h_n (24), (25) новой масштабирующей функции $\phi(x)$ Кравченко $\{\tilde{\psi}(\omega)\}$

n	$h_n = h_{-n}$	n	$h_n = h_{-n}$
0	0.757698251288	17	0.000384982816
1	0.438708321041	18	0.000499860951
2	-0.047099287129	19	-0.000700388155
3	-0.118027008279	20	0.000468702885
4	0.037706980974	21	0.000255769244
5	0.043603935723	22	-0.000649033581
6	-0.025214528289	23	0.000266223602
7	-0.011459893503	24	0.000307507863
8	0.013002207742	25	-0.000463771747
9	-0.001878954975	26	0.000104807634
10	-0.003758906625	27	0.000324973138
11	0.005085949920	28	-0.000288500372
12	-0.001349824585	29	-0.000066833177
13	-0.003639380570	30	0.000021430184
14	0.002763059895	31	-0.000018524173
15	0.001188712844	32	-0.000032851429
16	-0.001940226446		

Таблица 2. Физические характеристики различных систем вейвлетов

Вейвлеты	$(\hat{\phi})(\omega)$	$\text{supp}(\varphi_3(x)),$ $\text{supp}(\psi_3(x))$	Константы неопределенности	
			$\Delta_\phi \Delta_{\hat{\phi}}$	$\Delta_\psi \Delta_{\hat{\psi}}$
Кравченко $\{\widetilde{\text{up}}(\omega)\}$	$\sqrt{\sum_{n=-1}^1 \text{up}\left(\frac{3}{2\pi}t+n\right)}$	$[-8, 8]$	0.87264	2.83008
Мейера	$\begin{cases} 1, -\frac{2\pi}{3} \leq \omega \leq \frac{2\pi}{3}, \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}v\left(\frac{3}{2\pi} \omega - 1\right)\right), \frac{2\pi}{3} \leq \omega \leq \frac{4\pi}{3}, \\ 0 \text{ для остальных } \omega \end{cases}$ $v(x) = x^4(35 - 84x + 70x^2 - 20x^3),$ $x \in [0, 1], v(x) + v(1-x) = 1$	$[-8, 8]$	1.01148	3.27802
Котельникова—Шеннона	$\begin{cases} 1, -\pi \leq \omega \leq \pi, \\ 0 \text{ для остальных } \omega \end{cases}$	$[-10^4, 10^4]$	∞	∞

стоинствами: симметрией, убывают значительно быстрее вейвлетов Мейера, но при этом имеют некомпактный носитель. Для системы вейвлетов Кравченко $\{\widetilde{\text{up}}(\omega)\}$ функции $\hat{\phi}(\omega)$ и $\hat{\psi}(\omega)$ в отличие от системы вейвлетов Мейера записываются в виде единого аналитического выражения и принадлежат к классу бесконечно дифференцируемых функций. Локализация вейвлетов Кравченко $\{\widetilde{\text{up}}(\omega)\}$ по времени и частоте значительно лучше вейвлетов Котельникова—Шеннона. Дальнейшее сравнение с известными вейвлетами необходимо осуществлять по величине эффективного носителя (26) и константам неопределенности $\Delta_\phi \Delta_{\hat{\phi}}$, $\Delta_\psi \Delta_{\hat{\psi}}$, которые, согласно [8], для функции $f(t)$ определяются так:

$$t_f^* = \frac{1}{\|f(t)\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} t |f(t)|^2 dt, \quad (27)$$

$$\Delta_f = \frac{1}{\|f(t)\|} \left(\int_{-\infty}^{\infty} (t - t_f^*)^2 |f(t)|^2 dt \right)^{1/2},$$

$$\omega_f^* = \frac{1}{\|\hat{f}(\omega)\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega, \quad (28)$$

$$\Delta_{\hat{f}} = \frac{1}{\|\hat{f}(\omega)\|} \left(\int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \omega_f^*)^2 |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \right)^{1/2}.$$

Константы неопределенности являются одной из главных физических характеристик вейвлетов, так как дают полную информацию о простран-

ственно-частотном разрешении функции и распределении ее энергии. Важным моментом является следующий: константа неопределенности инвариантна к сдвигам, сжатиям и масштабированию функции. Это делает такую оценку эффективной при анализе конкретных схем КМА. Пространственно-частотная локализация характеризуется произведением $\Delta_\phi \Delta_{\hat{\phi}}$, $\Delta_\psi \Delta_{\hat{\psi}}$. В табл. 2 приведены сравнительные физические характеристики для вейвлетов Кравченко $\{\widetilde{\text{up}}(\omega)\}$, Мейера, Котельникова—Шеннона.

7. Таким образом, предложенная и обоснованная новая конструкция вейвлетов Кравченко $\{\widetilde{\text{up}}(\omega)\}$ обладает всеми свойствами КМА. Проведено сравнение физических характеристик вейвлетов Кравченко с известными. Показано, что частотно-временная локализация новых вейвлетов лучше. Применение [6] вейвлетов Кравченко в цифровой обработке сигналов показало их эффективность в задачах удаления шума и сжатия сигналов и изображений. Теория новых вейвлетов будет развиваться для решения задач непрерывного анализа, вейвлет-пакетного анализа, многомерных вейвлет-преобразований, цифровой обработки сигналов и изображений, вейвлет-анализа кардиосигналов, радиолокации, акустооптики, краевых задач математической физики [6].

Работа выполнена в рамках гранта НШ—5708.2008.9 “Новые методы в некоторых задачах акустооптики, радиофизики и медицины на основе атомарных функций, вейвлетов и фракталов”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гуляев Ю.В., Кравченко В.Ф., Пустовойт В.И. // ДАН. 2007. Т. 413. № 3. С. 320–328.
2. Гуляев Ю.В., Кравченко В.Ф., Пустовойт В.И. // ДАН. 2007. Т. 417. № 4. С. 476–482.
3. Кравченко В.Ф. Лекции по теории атомарных функций и некоторым их приложениям. М.: Радиотехника, 2003.
4. Кравченко В.Ф., Рвачёв В.Л. Алгебра логики, атомарные функции и вейвлеты в физических приложениях. М.: Физматлит, 2006.
5. Цифровая обработка сигналов и изображений в радиофизических приложениях / Под ред. В.Ф. Кравченко. М.: Физматлит, 2007.
6. Кравченко В.Ф., Лабунько О.С., Лерер А.М., Синявский Г.П. Вычислительные методы в современной радиофизике. / Под ред. В.Ф. Кравченко. М.: Физматлит, 2009.
7. Mallat S.G.. A Wavelet Tour of Signal Processing. N.Y.: Acad. Press, 1998.
8. Новиков И.Я., Протасов В.Ю., Скопина М.А. Теория всплесков. М.: Физматлит, 2006.