

УДК621.372(075.8)

## ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЧОИ–ВИЛЬЯМСА И АТОМАРНЫЕ ФУНКЦИИ В ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКЕ СИГНАЛОВ

© 2007 г. В. Ф. Кравченко, О. В. Лазоренко, академик В. И. Пустовойт, Л. Ф. Черногор

Поступило 21.11.2006 г.

В последние годы новые виды сигналов находят все большее применение в различных областях науки и техники [1]. Для их анализа наряду с традиционным преобразованием Фурье целесообразно применение новых математических методов, основанных на вейвлет-преобразовании, теории атомарных функций (АФ), преобразовании Вигнера [2–5]. С другой стороны, прием и обработка реальных сигналов всегда сопровождается влиянием помех. Внешние помехи чаще всего представляют собой случайную последовательность импульсов со случайными параметрами, причем они не являются гауссовыми. Для таких помех разномасштабные компоненты в разложении являются скоррелированными, что приводит к неэффективности линейных методов анализа. Применение нелинейных преобразований может обеспечить повышение качественных показателей при нелинейной фильтрации помех. Поэтому актуальным является рассмотрение целесообразности применения преобразования Чои–Вильямса для анализа сигналов, а также его сравнение с преобразованием Вигнера, традиционным оконным преобразованием Фурье (ОПФ) и АФ.

### ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЧОИ–ВИЛЬЯМСА

Преобразование Чои–Вильямса [6, 7] сигнала  $f(t)$  имеет вид

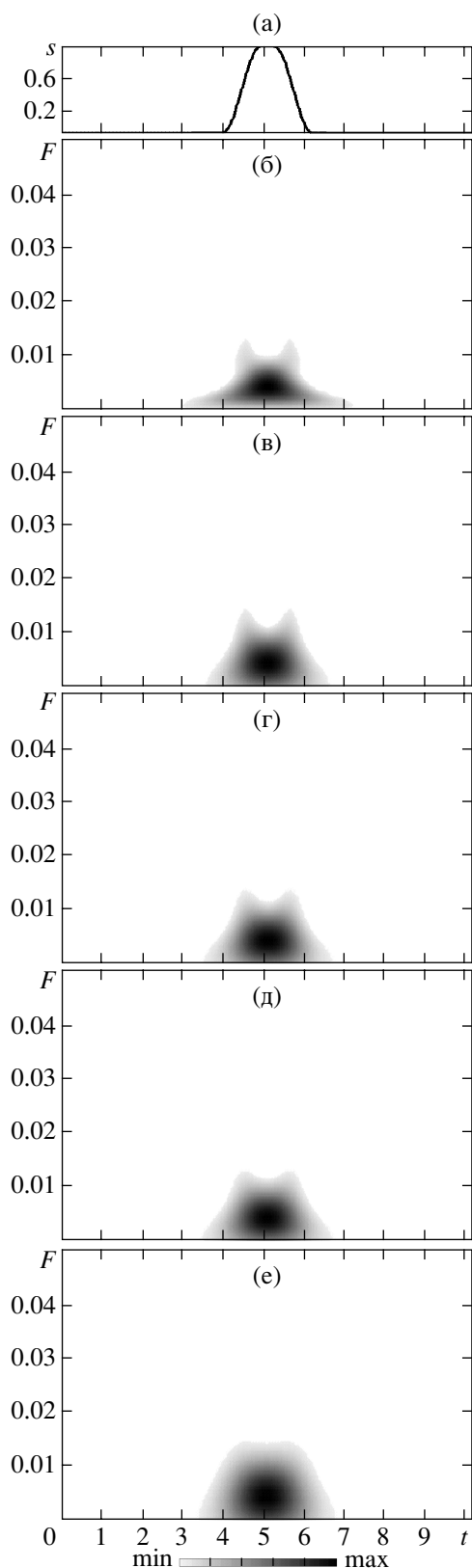
$$P_{CW}[f(t)] \equiv P_{CW}f(\tau, \omega) = \sqrt{\frac{\sigma}{4\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-i\omega t)}{|t|} \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-(u-\tau)^2\sigma}{4t^2}\right) f\left(u + \frac{t}{2}\right) f^*\left(u - \frac{t}{2}\right) du dt, \quad (1)$$

где звездочка обозначает операцию комплексного сопряжения,  $\sigma > 0$  – масштабный коэффициент. При  $\sigma \rightarrow \infty$  преобразование Чои–Вильямса переходит в преобразование Вигнера [6, 7]. К основным свойствам преобразования [6] Чои–Вильямса следует отнести: вещественность функции спектральной плотности (ФСП)  $P_{CW}f(\tau, \omega)$ , симметрию аргументов  $\tau$  и  $\omega$ , концентрацию энергии сигнала в окрестности точки  $(t_0, \omega_0)$  с протяженностью, равной частотной и временной протяженности самого сигнала, постоянство ФСП  $P_{CW}f(\tau, \omega)$  при сдвиге по фазе сигнала  $f(t)$  на величину  $\varphi_0$ , смещение  $P_{CW}f(\tau, \omega)$  по оси времени при сдвиге по времени сигнала  $f(t)$  на  $t_0$ , смещение  $P_{CW}f(\tau, \omega)$  по оси частот при сдвиге по частоте  $\hat{f}(\omega)$  на  $\omega_0$ . Масштабирование по времени аргумента сигнала  $f(t)$  на  $a$  приводит к масштабированию аргументов ФСП  $P_{CW}f(\tau, \omega)$  на  $a$  и  $1/\beta$ . Масштабирование по частоте аргумента ФСП сигнала  $\hat{f}(\omega)$  на  $\beta$  приводит к масштабированию аргументов ФСП  $P_{CW}f(\tau, \omega)$  на  $1/\beta$  и  $\beta$ , обращение по времени, комплексное сопряжение, сохранение энергии, наличие маргинальных распределений и интерференционного члена

$$I[f_1, f_2] = P_{CW}[f_1, f_2] + P_{CW}[f_2, f_1].$$

Следует заметить, что функцию  $P_{CW}f(\tau, \omega)$  в отличие от спектрограммы и скэйлограммы можно называть функцией спектральной плотности условно, поскольку она не обладает свойством положительности и, следовательно, не может являться совместной частотно-временной плотностью сигнала [6]. Практическое значение применения преобразования Чои–Вильямса при анализе сигналов заключается в следующем. Во-первых, дает возможность получить более полную информацию о сигнале, чем при использовании других средств, например, спектрограмм; во-вторых, позволяет проводить анализ частотно-временного содержания отдельных особенностей сигнала; в-третьих, провести анализ соответствующей ФСП сигнала.

Институт радиотехники и электроники  
Российской Академии наук, Москва  
Харьковский национальный университет  
им. В.Н. Каразина  
Научно-технологический центр уникального  
приборостроения  
Российской Академии наук, Москва



**Рис. 1.** Анализ функции  $ur(t)$ . Здесь и на рис. 2: *a* – сигнал, *b* – ФСП преобразования Вигнера, ФСП преобразования Чои–Вильямса:  $\nu - \sigma = 1000$ ,  $\tau - \sigma = 10$ , *d* –  $\sigma = 0.01$ ; *e* – спектрограмма Фурье.

## ИССЛЕДОВАНИЕ СИГНАЛОВ НА ОСНОВЕ АТОМАРНЫХ ФУНКЦИЙ

Вычисление аналитических выражений для ФСП-преобразования Чои–Вильямса  $P_{CW}f(\tau, \omega)$  оказывается сложным, а потому получить удовлетворительный результат возможно только в простейших случаях. На практике основным способом проведения преобразования Чои–Вильямса являются численные расчеты с помощью систем компьютерной математики (СКМ). Нами использовался пакет TimeFreq Toolbox для СКМ MATLAB 7.X [8]. В качестве анализируемых сигналов были выбраны АФ и окна, построенные на их основе [2, 3]. АФ свойственна хорошая локализация как в частотной, так и во временной областях. Преобразование Чои–Вильямса обладает хорошими частотно-временными свойствами. Представляет интерес проследить, насколько адекватно данное преобразование отражает локальные особенности АФ. Примеры результатов АФ приведены на рис. 1, 2. ФСП преобразования Чои–Вильямса материнской АФ  $ur(x)$  (типичного видеосигнала) имеет характерный вид с “провалом” посередине. С уменьшением  $\sigma$  он становится менее выраженным. На спектрограмме такого “провала” нет. У окна Кравченко–Рвачева [2, 3]  $w_2(x) = ur(x) + 0.01ur''(x)$  характерный “провал” заметен только в ФСП преобразования Вигнера  $P_Vf(\tau, \omega)$  (штрихами обозначены производные). Для  $ur'(x)$  (модельного СШП-сигнала) на ФСП преобразования Чои–Вильямса (рис. 2) хорошо видны два таких же характерных, как и для функции  $ur(x)$ , локализованных образования, входящих в состав более сложной структуры. Два максимума, расположенные между ними, носят интерференционный характер. Еще более сложную структуру имеет ФСП преобразования Чои–Вильямса для  $ur''(x)$ . Также был проанализирован и ряд других АФ:  $fur_1(x)$ ,  $fur_2(x)$ ,  $h_3(x)$ ,  $h_4(x)$ ,  $\Xi_2(x)$  и  $\Xi_3(x)$ .

## ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Преобразование Чои–Вильямса обладает рядом достоинств. К ним относятся хорошее частотно-временное разрешение, инвариантность относительно сдвигов по фазе, частоте и времени, а также наличие маргинальных распределений. Кроме того, будучи квадратичным по исследуемому сигналу, данное преобразование является одним из возможных методов нелинейной обработки сигналов. Последнее эффективно, например, при наличии помех с ненормальным законом распределения. Наличие параметра  $\sigma$ , позволяющего управлять уровнем интерференционных членов, позволяет в известной мере устранить проблему возникновения интерференции между сигналами, а также сигналом и помехой, характерную для преобразования Вигнера [5]. Недостатки преобразования Чои–Вильямса заключа-

ются в сложности интеграла (1). Это делает его практически бесполезным для аналитических расчетов, а также в том, что при снижении уровня интерференционных членов (уменьшении  $\sigma$ ) одновременно подавляются и локальные особенности исследуемого сигнала, что ухудшает частотно-временное разрешение. Поэтому целесообразно совместное использование преобразований Вигнера и Чои–Вильямса.

Представляет интерес сравнить возможности преобразования Чои–Вильямса с ОПФ, а также спектрограммой ОПФ. ОПФ является линейным преобразованием сигнала, но в отличие от преобразования Чои–Вильямса не обладает инвариантностью относительно сдвигов по фазе, частоте и времени. К тому же частотно-временное разрешение ОПФ определяется характеристиками спектрального окна и оказывается хуже, чем у преобразования Чои–Вильямса. Платой за последнее является наличие интерференции в ФСП преобразования Чои–Вильямса. Спектрограмма ОПФ, как и преобразование Чои–Вильямса, обладает инвариантностью относительно сдвигов по фазе, частоте и времени, но в отличие от последнего не имеет маргинальных распределений и обладает худшим частотно-временным разрешением. Важно, что спектрограмма не может быть получена из преобразования Чои–Вильямса предельным переходом при  $\sigma \rightarrow 0$ . Тем не менее, если  $\sigma \rightarrow 0$ , ФСП преобразования Чои–Вильямса по своему внешнему виду приближается к спектрограмме.

Таким образом, при совместном использовании преобразований Вигнера, спектрограммы ОПФ и преобразования Чои–Вильямса первое может позволить достаточно точно определить частотно-временную локализацию исследуемого сигнала, второе отсеять ложные “сигналы”, возникающие из-за интерференции в ФСП преобразования Вигнера, а третье наблюдать процесс подавления интерференции в динамике, а также отделить интерференционные члены от локальных особенностей сигнала, которые в спектрограмме могут быть потеряны из-за ее недостаточного частотно-временного разрешения. Преобразование Чои–Вильямса, обладающее хорошим частотно-временным разрешением, перспективно применять для анализа новых классов сигналов [2, 3], основанных на АФ, окнах Кравченко–Рвачева, R-функциях, вейвлетах, так как такие сигналы являются хорошо локализованными во временной области.

Результаты работы частично были доложены на The Third International Conference “Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals”. September 18-22. 2006. Sevastopol. Ukraine [9].

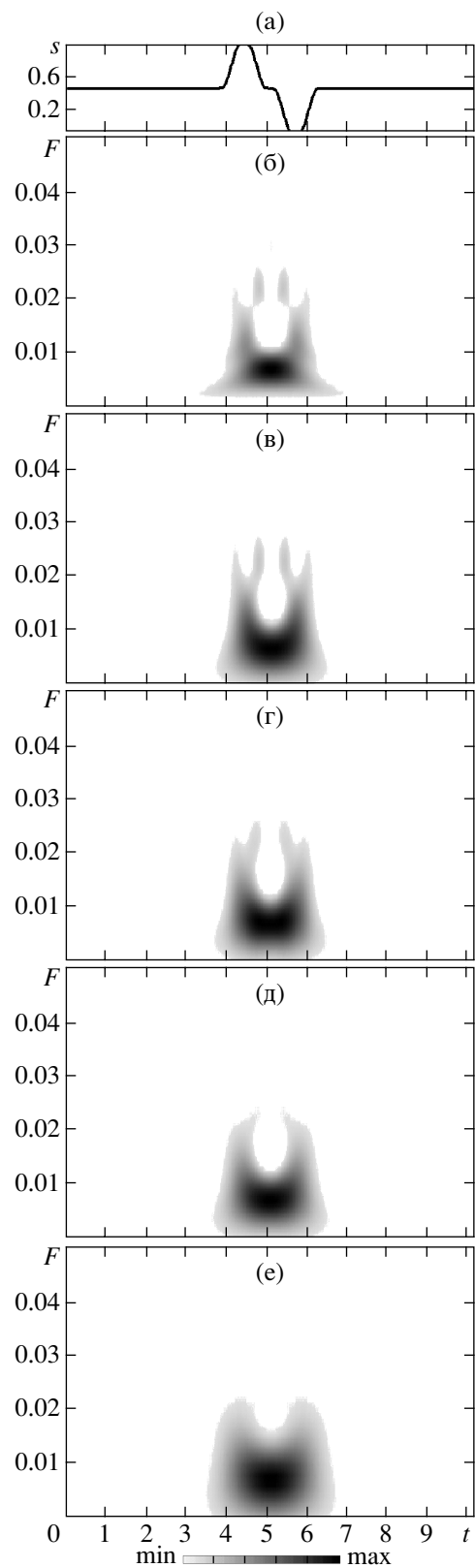


Рис. 2. Анализ функции  $up'(t)$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хармут Х. Ф. Несинусоидальные волны в радиолокации и радиосвязи. М.: Радио и связь, 1985.
2. Кравченко В. Ф., Рвачев В. Л. Алгебра логики, атомарные функции и вейвлеты в физических приложениях. М.: Физматлит, 2006.
3. Кравченко В. Ф. Лекции по теории атомарных функций и некоторым их приложениям. М.: Радио-техника, 2003.
4. Лазоренко О. В., Лазоренко С. В., Черногор Л. Ф. // Электромагн. волны и электрон. системы. 2004. Т. 9. № 9/10. С. 31–62.
5. Вишнинецкий О. В., Кравченко В. Ф., Лазоренко О. В., Черногор Л. Ф. // Электромагн. волны и электрон. системы. 2006. Т. 11. № 6. С. 26–38.
6. Коэн Л. // ТИИЭР. 1989. Т. 77. № 16. С. 72–120.
7. Choi H.-J., Williams W. J. // IEEE Transac. Acoustics, Speech and Signal Processing. 1989. V. 37. N 6. P. 862–871.
8. Дьяконов В. MATLAB 6: учебный курс. СПб.: Питерб 2001.
9. Chernogor L. F., Kravchenko V.F., Lazarenko O.V. // Proc. III Intern. Conf. on Ultrawideband and Ultrashort Impulse. Signals. 18–22 September. 2006. Sevastopol, 2006. P. 32–37.