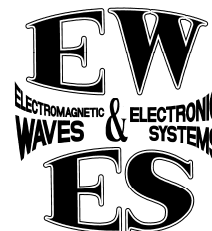


Выходит с 1996 г.

ЖУРНАЛ ВКЛЮЧЕН В ПЕРЕЧЕНЬ ВАК



ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ И ЭЛЕКТРОННЫЕ СИСТЕМЫ



9'2011

An International Journal
Electromagnetic Waves and Electronic

Т. 16

Главный редактор
докт. физ.-мат. наук, проф. В. Ф. Кравченко

Международный научно-технический журнал

International Scientific Journal

РЕДКОЛЛЕГИЯ:

акад. О.М.Белоцерковский,
д.ф.-м.н., проф. А.Н.Боголюбов
акад. А.С.Бугаев,
д.т.н., проф. В.П.Васильев,
д.ф.-м.н., проф. В.А.Буц (Украина),
д.т.н., проф. В.К.Волосюк (Украина),
акад. Ю.В.Гуляев,
д.ф.-м.н., проф. А.С.Дмитриев,
д.ф.-м.н., проф. Ф.Ф.Каменец,
д.т.н., проф. В.А.Каплун,
д.ф.-м.н., проф. В.Ф.Кравченко (гл. редактор),
И.А.Кузьмина,
д.ф.-м.н., проф. А.А.Кураев (Беларусь),
д.ф.-м.н., проф. Б.Г.Кутуза,
д.ф.-м.н., проф. Д.С.Лукин,
д.ф.-м.н., проф. В.В.Мериакри,
д.ф.-м.н., проф. А.И.Панас,
акад. В.И.Пустовойт,
акад. В.А.Садовничий,
д.ф.-м.н., проф. А.Б.Самохин,
д.ф.-м.н., проф. Г.П.Синявский,
д.ф.-м.н., проф. А.П.Сухоруков,
д.т.н., проф. К.В.Черевков,
д.ф.-м.н., проф. В.А.Черепенин,
д.ф.-м.н., проф. А.Д.Шатров,
д.т.н., проф. Б.И.Шахтарин,
д.т.н., проф. Я.С.Шифрин (Украина),
акад. НАН В.М.Яковенко (Украина),
д.ф.-м.н., проф. В.П. Яковлев (зам. гл. ред.)
проф. С.Батлер (США), проф. Е.Джал (Канада),
проф. А.Ишимару (США), проф. Р.Клемм (Германия),
проф. К.Кобаяши (Япония),
проф. Р.Миттра (США), проф. М.Невиере (Франция),
проф. Э.Перес-Меана (Мексика),
проф. Р.Пиерри (Италия),
проф. Д.Ра (Корея), проф. А.Сихвола (Финляндия),
проф. М.Хашимото (Япония),
проф. Е.Хейман (Израиль), проф. С.Чен (Тайвань).

EDITORIAL BOARD:

Academician RAS O.M.Belotserkovskii,
Dr.Sci. (Phys.-Math.), Prof. A.N. Bogolyubov,
Academician RAS A.S.Bugaev,
Dr.Sci. (Phys.-Math.), Prof. V.A.Buts (Ukraine),
Dr.Sci. (Techn.), Prof. K.V.Cherevko,
Dr.Sci. (Phys.-Math.), Prof. V.A.Cherepenin,
Dr.Sci. (Phys.-Math.), Prof. A.S.Dmitriev,
Academician RAS Yu.V.Gulyaev,
Dr.Sci. (Phys.-Math.), Prof. F.F.Kamenets,
Dr.Sci. (Techn.), Prof. V.A. Kaplun,
Dr.Sci. (Phys.-Math.), Prof. V.F.Kravchenko
(Editor-in-Chief), I.A.Kuz'mina,
Dr.Sci. (Phys.-Math.), Prof. A.A.Kuraev (Belarus),
Dr.Sci. (Phys.-Math.), Prof. B.G.Kutuza,
Dr.Sci. (Phys.-Math.), Prof. D.S.Lukin,
Dr.Sci. (Phys.-Math.), Prof. V.V.Meriakri,
Dr.Sci. (Phys.-Math.), Prof. A.I.Panas,
Academician RAS V.I.Pustovoi,
Academician RAS V.A.Sadovnichii,
Dr.Sci. (Phys.-Math.), Prof. A.B.Samokhin,
Dr.Sci. (Phys.-Math.), Prof. G.P.Sinyavskii,
Dr.Sci. (Phys.-Math.), Prof. A.D.Shatrov,
Dr.Sci. (Phys.-Math.), Prof. B.I.Shakhtarin,
Dr.Sci. (Phys.-Math.), Prof. Ya.S.Shifrin (Ukraine),
Dr.Sci. (Phys.-Math.), Prof. A.P.Sukhorukov,
Dr.Sci. (Techn.), Prof. V.P.Vasiliev,
Dr.Sci. (Techn.), Prof. V.K.Volosyuk (Ukraine),
Academician NAN V.M.Yakovenko (Ukraine),
Dr.Sci. (Phys.-Math.), Prof. V.P. Yakovlev (deputy/assistant chief)
Prof. C.M.Butler (USA), Prof. C.H.Chen (Taiwan),
Prof. M.Hashimoto (Japan), Prof. E.Heyman (Israel),
Prof. A.Ishimaru (USA),
Prof. E.V.Jull (Canada), Prof. R.Klemm (Germany),
Prof. K.Kobayashi (Japan),
Prof. R.Mittra (USA), Prof. M.Neviere (France),
Prof. H.Perez-Meana (Mexico),
Prof. R.Pierri (Italy), Prof. J-W.Ra (Korea),
Prof. A.H.Sihvola (Finland).

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

Владимир Логвинович Рвачев (К 85-летию со дня рождения) От Рене Декарта до Владимира Рвачева. В.Ф. Кравченко	4	
ОБЗОРЫ		REVIEWS
Атомарные функции и WA-системы функций в современных проблемах радиофизики и техники. В.Ф. Кравченко, О.В. Кравченко, В.И. Пустовойт, Д.В. Чуриков	7 (32)	Atomic Functions and WA-systems of Functions in Radio Physics and Techniques Modern Problems. V.F. Kravchenko, O.V. Kravchenko, V.I. Pustovoit, D.V. Churikov
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ		MATHEMATICAL MODELING OF PHYSICAL PROCESSES
Резонансное рассеяние и генерация волн изотропной нелинейной кубически поляризуемой слоистой структурой. Постановка задачи. В. В. Яцик	33 (48)	Resonant Scattering and Generation of Waves by Isotropic Non-linear Cubically Polarisable Layered Structure. The Problem Statement. V.V. Yatsyk
R-ФУНКЦИИ, АТОМАРНЫЕ ФУНКЦИИ, ВЕЙВЛЕТЫ, ФРАКТАЛЫ И ХАОС		R-FUNCTIONS, ATOMIC FUNCTIONS, WAVELETS, FRACTALS, AND CHAOS
Итерационные алгоритмы численного решения дифференциальных уравнений с линейно преобразованным аргументом. Я. Ю. Коновалов	49 (57)	Iterative Algorithms for Numerical Solution of Differential Equations with Linearly Transformed Argument. Ya. Yu. Konovalov
МИЛЛИМЕТРОВЫЕ И СУБМИЛЛИМЕТРОВЫЕ ВОЛНЫ		MILLIMETER AND SUBMILLIMETER WAVES
Излучатель миллиметрового диапазона и его использование в диэлектрометрии. Н. Л. Евич, Ю. В. Прокопенко	58 (66)	Millimeter-Wave Radiator and its Using in Dielectric Permittivity Measurement. N.L. Yevich, Yu.V. Prokopenko

**ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА
СИГНАЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ**

Структура и характеристики алгоритмов
оценки угла прихода и углового
рассеяния волн от случайного
кластера рассеивателей.

Ю. С. Радченко, Р. В. Титов

67 (72)

**DIGITAL SIGNAL AND IMAGE
PROCESSING**

Structure and Characteristics of Algorithms
Estimating Angle of Arrival
and Angle Spread of the Wave Formed
by Random Cluster of Scatterers.

Yu. S. Radchenko, R. V. Titov

**Полный перечень журналов, выпускаемых ЗАО «Издательство «Радиотехника»
размещен на сайте <http://www.radiotec.ru>**

Зав. редакцией: И.А. Кузьмина

Учредитель ЗАО «Издательство «Радиотехника». Номер свидетельства о регистрации средства массовой информации № 014558 от 10.06.1997 г.
Сдано в набор 11.07.2011. Подписано в печать 15.08.2011. Формат 60×88 1/8. Бумага офсетная. Гарнитура таймс.

Печ. л. 9. Тираж 300 экз. Изд. № 121.

ЗАО «Издательство «Радиотехника»: 107031, Москва, К-31, Кузнецкий мост, д. 20/6. Тел. (7-495)621-48-37. Тел./факс (7-495)625-92-41.
e-mail: info@radiotec.ru, www.radiotec.ru

Компьютерная верстка ЗАО «САЙНС-ПРЕСС».
Отпечатано: ООО «Подольская Периодика». 142110, г. Подольск, ул. Кирова, 15. Зак. № .

© ЗАО «Издательство «Радиотехника», 2011 г.

Копирование, тиражирование и перевод статей, включенных в журнал, в электронном и любом другом видах –
только с разрешения ЗАО «Издательство «Радиотехника».



Владимир Логвинович Рвачев (К 85-летию со дня рождения)

От Рене Декарта до Владимира Рвачева

Выдающемуся ученому современности, действительному члену Национальной Академии наук Украины, Владимиру Логвиновичу Рвачеву 21 октября исполнилось бы 85 лет.

Становление В.Л. Рвачева как ученого совпало с периодом бурного развития в стране кибернетики и вычислительной техники. Будучи уже признанным специалистом в области механики, он существенно расширил круг своих интересов, рассматривая краевые задачи механики с общих позиций теории информатики. Его внимание привлекла проблема учета геометрической информации, характерная для широкого класса задач оптимизации и математической физики, решаемых с по-

мощью ЭВМ. Математическая теория R-функций (функций Рвачева) возникла на стыке классических методов прикладной математики, современных методов кибернетики и математической логики. Основы теории R-функций были заложены В.Л. Рвачевым в 1963 г. Решающей в этом направлении стала его работа «К решению одной задачи теории потенциала», в которой сформулирована задача о построении семейства поверхностей, включающего известную.

Исторически эта проблема восходит еще к Декарту и известна в литературе как обратная задача аналитической геометрии: задан геометрический объект, требуется написать его уравнение. Речь идет о том, что так же, как, например, для прямой на плоскости или шаров в пространстве, можно было для таких «сложных» геометрических объектов, как усеченный конус с цилиндрическим отверстием, ломаная линия, зубчатое колесо и другие, построить функцию, которая имела бы вид единого аналитического выражения и обладала бы некоторыми определенными свойствами.

Впервые понятие R-функций было введено В. Л. Рвачевым в связи с возникшей необходимостью составлять уравнения сложных чертежей в процессе поиска приближенных решений некоторых пространственных контактных задач теории упругости.

Одним из результатов, который был получен на основе теории R-функций, является решение обратной задачи аналитической геометрии. В первых работах по теории R-функций был определен достаточно широкий круг возможных ее приложений на более высоких уровнях прикладной математики: оптимальном размещении геометрических объектов (в частности, при оптимальном раскрое), распознавании образов, математическом программировании, конструктивной теории функций и особенно краевых задач математической физики.

Рвачев В. Л. разрабатывает математический аппарат теории R-функций и ее практические приложения. Он обращает внимание на то, что в течение длительного времени применение классических вариационных методов сдерживалось отсутствием конструктивных средств для построения в явном виде координатных функций, точно удовлетворяющих произвольным краевым условиям для областей сложной формы и обладающих свойствами полноты. Эта проблема многим ученым казалась практически неразрешимой. Так, Дж. Ортега и В. Рейнболдт по этому поводу писали: «Хотя формально метод Ритца распространяется на двумерные вариационные задачи и задачи более высокой размерности, здесь имеется серьезная практическая трудность, состоящая в построении подходящих базисных функций для общих областей». В. Л. Рвачев при помощи конструктивного аппарата теории R-функций разрабатывает единый подход к проблеме построения координатных последовательностей для основных вариационных и проекционных методов. При этом речь идет не просто об однородной задаче Дирихле, а о краевых условиях самых различных типов для областей практически произвольной формы. Это позволило добиться значительных успехов в решении ряда прикладных задач теории упругости, кручения стержней сложного профиля, изгиба и колебания тонких пластин, электродинамики, теплофизики и др.

Поиск эффективной организации численного решения краевых задач математической физики привел В.Л. Рвачева к созданию новой технологии программирования, реализованной в виде семейства ПОЛЕ. В 1970 г., под его руководством в отделе прикладной математики и вычислительных методов Института проблем машиностроения АН УССР начинаются работы по созданию первых версий системы ПОЛЕ. Главную роль при этом сыграла конструктивная универсальность теории R -функций, которая была положена в основу данных систем. Предметной областью систем ПОЛЕ является реализация прямых методов решения одно-, двух- и трехмерных краевых задач, описываемых уравнением (или их системами) с частными производными. Применение теории R -функций позволило решать задачи с различными типами краевых условий в областях, имеющих кусочно-элементарную границу. Программирующие системы семейства ПОЛЕ по описанию постановки задачи с помощью языка заданий автоматически осуществляют генерацию как отдельных модулей, так и всего комплекса счетных программ из отлаженных модулей для решения поставленной задачи. Системы ПОЛЕ создали основу для перехода от «кустарных» методов программирования к индустриальным на основе новой технологии создания программ. Это позволило за короткий срок решить большое число важных научно-технических проблем, а также открыло пути к созданию принципиально новых устройств вычислительной техники, ориентированных на решение задач прикладной математики, задач с совместной переработкой геометрической, аналитической и логической информации.

Дальнейшее развитие теории R -функций позволило обобщить и конструктивно реализовать в функциональных пространствах широко применяемые формулы Лагранжа–Тейлора–Эрмита, найти новый класс финитных, бесконечное число раз дифференцируемых функций, так называемых атомарных, имеющих важное значение для развития теории аппроксимации и методов решения краевых задач математической физики. Неожиданными научными направлениями, в которых теория R -функций нашла применение, являются теория устойчивости движения, химическая технология и медицинская диагностика.

Научные исследования В.Л. Рвачева отражены в более чем шестистах научных работах, в том числе восемнадцати монографиях и ряде авторских свидетельств. Особое место среди них занимают три монографии В. Л. Рвачева, определяющие этапы и перспективы развития теории R -функций и ее приложений.

В 1967 г. вышла в свет книга «Геометрические приложения алгебры логики». В ней изложены методы аналитического описания геометрических объектов сложной структуры, применяемые при решении многих задач математической физики, механики, математического программирования, оптимального раскроя, машинного распознавания геометрических образов. Описан аппарат R -функций, с помощью которого можно составлять уравнения сложных чертежей и пространственных объектов, а также семейств, включающих заданный геометрический объект. Рассмотрены некоторые приложения R -функций к задачам оптимального планирования, оптимального раскроя и краевым задачам математической физики. В этой работе, явившейся первой попыткой систематического освещения вопросов, связанных с R -функциями и их приложениями, чрезвычайно удачно сформулированы почти все основные направления их дальнейшего развития.

В 1974 г. была издана книга В.Л. Рвачева «Методы алгебры логики в математической физике», отмеченная премией им. А. Н. Динника АН УССР. Эта книга вследствие систематического изложения теории R -функций и ее применения в области краевых задач математической физики почти десять лет была основой исследований в практической деятельности многих математиков-вычислителей, инженеров и научных сотрудников, работающих в области теории упругости, радиофизики, аэро- и гидродинамики, теории пластин и оболочек, электродинамики, теории фильтрации.

В вышедшей в 1982 г. книге ученого «Теория R -функций и некоторые ее приложения» обобщены основные результаты, полученные почти за двадцатилетний период развития теории R -функций. Отмечены некоторые специфические особенности реализации теории R -функций на практике, а также задачи проблемного характера.

Теория R -функций широко используется, изучается и развивается как в нашей стране, так и за рубежом. Лекции по теории R -функций читаются в вузах России (МГУ, МФТИ, МГТУ им. Н. Э. Баумана), а также университетах Украины, Польши, Венгрии, США, Японии и других стран мира.

Кроме теории R -функций В. Л. Рвачевым в 1971 г. был предложен и обоснован новый математический аппарат так называемых атомарных функций, нашедших широкое применение в задачах обработки сигналов, восстановления изображений, аппроксимации диаграмм направленности антенн, а также краевых задачах математической физики различной физической природы.

В последние годы академик В.Л. Рвачев активно работал в области, связанной с современными проблемами космологии. Из этих работ отметим следующие: «От специальной теории относительности к математике без аксиомы Архимеда и обратно», «О некоторых наблюдаемых явлениях в дальнем космосе с позиции неархимедовых исчислений». В последней фундаментальной публикации показано, что замена в формулах специальной теории относительности символов классического математического аппарата на соответствующие символы исчисления, построенного на основе замены аксиомы Архимеда (в ее изначальном геометрическом смысле) аксиомой о существовании наибольшего числа приводит к результатам, которые для объектов дальнего космоса существенно отличаются от классических. В частности, сделано следующее открытие: «...спектры неподвижных объектов смещаются в красную сторону». Результаты теории согласуются с данными наблюдений, полученных В. С. Троицким и его коллегами. Это позволяет сделать вывод о том, что Вселенная не расширяется, и, следовательно, идея о ее рождении в результате большого взрыва 10 – 20 млрд лет назад сомнительна.

В 1972 г. В.Л. Рвачев избирается членом-корреспондентом, а в 1978 г. – действительным членом АН УССР. Как ученый, он отличается умением широко видеть сферы приложения результатов своих фундаментальных исследований.

В 1980 г. за создание, развитие и внедрение в народное хозяйство теории R-функций В.Л. Рвачеву – руководителю работы и его ученикам была присуждена Государственная премия УССР в области науки и техники.

Многогранная плодотворная научная и научно-педагогическая деятельность ученого отмечена высокими правительственными наградами.

В. Л. Рвачев вел большую научно-педагогическую и научно-организационную работу. Он создал первую в стране научную школу, основанную на базе математической теории R-функций, подготовил более 60 кандидатов наук, 12 его учеников стали докторами наук.

Владимир Логвинович Рвачев был членом редколлегии международных журналов «Зарубежная радиоэлектроника. Успехи современной радиоэлектроники» и «Электромагнитные волны и электронные системы».

Этот номер журнала содержит работы, продолжающие и развивающие идеи великого ученого в разделе: «R-функции, атомарные функции, вейвлеты, фракталы и хаос».

**Главный редактор,
заслуженный деятель науки РФ,
доктор физико-математических наук,
профессор**



В.Ф. Кравченко

Обзоры

УДК 53.01:517.5:519.6

Атомарные функции и WA-системы функций в современных проблемах радиофизики и техники

© Авторы, 2011

В. Ф. Кравченко – д. ф.-м. н. гл. науч. сотрудник,
Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,
профессор, кафедра «Высшая математика» ФН-1 МГТУ им. Н. Э. Баумана, засл. деятель науки РФ
E-mail: kvf-ok@mail.ru

О. В. Кравченко – инженер Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН
E-mail: olekravchenko@mail.ru

В. И. Пустовойт – академик РАН, д. ф.-м. н., профессор, директор НТЦ УП РАН
E-mail: vip@ckbup.msk.ru

Д. В. Чуриков – науч. сотрудник, ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН
E-mail: mpio_nice@mail.ru

Посвящается светлой памяти выдающегося ученого и замечательного человека – академика Национальной Академии наук Украины Владимира Логвиновича Рвачева

Представлен обзорный доклад, посвященный 40-летию юбилею теории атомарных функций (АФ), а также WA-системам функций, построенных на их основе применительно к широкому классу задач цифровой обработки сигналов (ЦОС), радиофизики, антенной техники, электродинамики и гироскопии.

Ключевые слова: атомарные функции, R-функции, WA-системы функций, цифровая обработка сигналов, теория вероятности, краевые задачи.

The survey report is devoted to 40-year anniversary of the theory of atomic functions (AF) and also to WA-systems of the functions constructed on their basis with reference to a wide class of problems of digital signal processing, radio physicists, the antenna technics, electro-dynamics and gyroscope.

Keywords: atomic functions, R-functions, WA-systems of functions, digital signal processing, probability theory, boundary-value problems.

Введение. В этом году исполняется 40 лет с начала создания нового научного направления – теории атомарных функций (АФ) [1–21]. В 1971 г. В. Л. Рвачевым и В. А. Рвачевым впервые была предложена конструкция построения материнской функции $ur(x)$ [1]. В 1967 г. В. Л. Рвачев поставил следующую задачу. Если $\varphi(x)$ – финитная дифференцируемая функция, имеющая один участок возрастания и один участок убывания («горб»), то ее производная состоит из «горба» и «ямы». Существует ли функция $\varphi(x)$, у которой «горб» и «яма» производной подобны горбу самой функции? На языке математики это означает: существует ли финитное решение уравнения $y'(x) = a[y(2x+1) - y(2x-1)]$, в котором, для определенности, считаем, что носитель $\varphi(x)$ – отрезок $[-1, 1]$.

В [1] доказаны существование и единственность такого финитного решения с интервалом, равным 1, а это и есть функция $ur(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-itx\} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(t \cdot 2^{-k})}{t \cdot 2^{-k}} dt$. Термин «атомарная функция» (АФ) введен в работе В. Л. Рвачева и В. А. Рвачева «Атомарные функции в математической физике» [2]. Развитие своей теории атомарных функций получила в монографиях [4, 5, 11, 16, 17, 29, 52–54].

Таким образом, в то время как классические алгебраические и тригонометрические полиномы удовлетворяют однородным линейным дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами, функция $ur(x)$ (и другие аналогичные функции) удовлетворяют уравнениям вида $Ly(x) = \sum_{k=1}^M c_k y(ax - b_k)$,

где L – линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами. Эти уравнения близки к линейным дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами в том смысле, что преобразование Фурье для них так же эффективно. АФ являются естественным расширением класса элементарных функций, которое стало необходимым в настоящее время, когда широко начали применяться финитные функции. Их целесообразно применять в численных методах там, где аппроксимируемая функция обладает возможно большей гладкостью и где применение многочленов высокой степени затруднено из-за их нефинитности. При этом для приближения функций n переменных следует использовать многомерную функцию. Возможно, что АФ найдут широкое применение и в других областях математики, а не только в теории приближений и численных методах.

В России активно ведутся исследования по разработке и применению теории АФ в сочетании с R-функциями (функциями В.Л. Рвачева) в физике и технике для широкого спектра частот от СВЧ до оптического, под научным руководством В. Ф. Кравченко его учениками в ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН, МГТУ им. Н. Э. Баумана (кафедра «Высшая математика» ФН-1), НТЦ УП РАН, в Украине, Белоруссии, за рубежом в Национальном политехническом институте (Мехико) В.И. Пономаревым и его учениками, а также в США, Канаде, Франции, Германии, Японии, Хорватии и Швеции.

1. Основные физические приложения атомарных функций. Исследования в области АФ ведутся по многим научным направлениям:

- обобщенные ряды Котельникова на основе АФ $h_a(x)$ и $\text{fup}_N(x)$;
- обобщенная N -мерная теорема Уиттекера–Котельникова–Шеннона на основе АФ;
- полиномы Левитана и Стренга–Фикса на основе АФ;
- WA-системы функций Кравченко–Рвачева и их применение для обнаружения кратковременных знакопеременных и сверхширокополосных (СШП) физических процессов;
- спектральная обработка СШП сигналов на основе АФ;
- аналитические вейвлеты Кравченко–Котельникова в цифровой обработке сигналов (ЦОС);
- временные весовые функции (окна) Гуляева–Кравченко–Пустовойта в устройствах ЦОС на поверхностных акустических волнах;
- весовые функции Кравченко–Котельникова в спектроскопии цифровых сигналов;
- время-частотное распределение класса Коэна с АФ в нелинейной ЦОС;
- АФ и атомарно-фрактальные функции в теории антенн;
- цифровая обработка сигналов в РЛС с синтезированной апертурой;
- ортогональные базисы вейвлетов в цифровой обработке сигналов и изображений;
- атомарные функции в теории вероятности и случайных процессов;
- применение теории R-функций и WA-систем функций к решению краевых задач математической физики;
- синтез двумерных цифровых фильтров с геометрией сложной формы;
- многомерная фильтрация;
- непараметрическое оценивание сигналов;
- гироскопия;
- построение весовых функций Кравченко–Котельникова–Гаусса и Кравченко–Котельникова–Левитана–Гаусса;
- новый класс вейвлетов на основе атомарной функции $h_a(x)$;
- новый класс аналитических вейвлетов Кравченко–Рвачева в задачах СШП-сигналов и процессов;
- цифровая обработка и спектральное оценивание СШП-сигналов с помощью АФ и вейвлетов;
- весовые функции Кравченко и Кравченко–Рвачева в задачах построения радиолокационных изображений и синтезирования апертуры антенн;
- атомарные функции в теории вероятности и стохастических процессах;
- применение теории R-функций и WA-систем функций к решениям краевых задач эллиптического типа.

2. Спектральные свойства весовых функций в цифровой обработке сигналов. Как известно, одним из главных вопросов в классических задачах спектральной оценки сигналов является вопрос выбора весовых функций [11, 15–17]. Оконная цифровая обработка сигналов, в частности, для управления физическими параметрами, обусловлена наличием боковых лепестков в спектральных оценках. На основе идей и результатов, представленных ранее, разрабатываются новые подходы спектрального оценивания. Так, новые весовые функции строятся в виде прямого произведения атомарных функций fup_N с классическими

окнами Гаусса, Бернштейна, Дольфа–Чебышева (табл. 1). Эти результаты представляют основу для цифровой спектральной обработки многомерных сигналов, синтеза антенн, в задачах сжатия сигнала, компьютерной томографии и термографии, медицинской диагностики.

Таблица 1. Основные параметры новых окон Кравченко и окон классических

Весовая функция (окно)	Эквивалентная шумовая полоса	Корреляция перекрытия (для 50% перекрытия), %	Паразитная амплитудная модуляция, дБ	Максимальная потери преобразования, дБ	Максимальный уровень боковых лепестков, дБ	6-децибелльная шумовая полоса	Когерентное усиление
K_2^4	1,9861	4,2498	0,8518	3,8318	-51,6112	2,6276	0,3610
$f(x) = f(x_1, \dots, x_N) \in L_2(\mathbb{R}^N)$	1,8105	7,4054	1,0259	3,6038	-53,7964	2,4255	0,3944
$K_2\Gamma_3$	1,9643	4,7297	0,8781	3,8101	-68,8390	2,6276	0,3614
$K_4^2\Gamma_2^2$	1,9631	4,7869	0,8809	3,8103	-70,6203	2,6276	0,3607
$K_4^4\Gamma_2$	1,9696	4,6700	0,8742	3,8180	-71,2806	2,6276	0,3598
$K_4^4\Gamma_3$	2,0415	3,7429	0,8156	3,9152	-74,8054	2,6276	0,3467
$K_4\Gamma_{3,5}$	1,8007	7,3910	1,0249	3,5793	-74,9523	2,4255	0,3988
Прямоугольное	1,0000	50,000	3,9224	3,9224	-13,2799	1,2128	1,0000
Треугольное	1,3333	25,0001	1,8242	3,0736	-26,5077	1,8191	0,5000
Гаусса ($\alpha = 3,5$)	1,9765	4,6147	0,8702	3,8292	-71,0006	2,6276	0,3579
Хэмминга	1,3638	23,3241	1,7492	3,0967	-45,9347	1,8191	0,5395
Блэкмана–Хэрриса (четырёхчленное)	2,0044	3,7602	0,8256	3,8453	-92,0271	2,6276	0,3587
Натолла (четырёхчленное)	1,9761	4,1760	0,8506	3,8087	-97,8587	2,6276	0,3636
Дольфа–Чебышева ($\alpha = 3,5$)	1,6328	11,8490	1,2344	3,3636	-70,0161	2,2234	0,4434
Бернштейна–Рогозинского	1,2337	31,8309	2,0982	3,0103	-23,0101	1,6170	0,6366
Кайзера ($\alpha = 3$)	1,7952	7,3534	1,0226	3,5639	-69,6568	2,4255	0,4025

Примечание: здесь обозначено: K – Кравченко, $K\Gamma$ – Кравченко–Гаусс

3. Атомарные функции в задачах теории синтеза антенн. Обзор [10] посвящен приложению АФ к основным задачам теории синтеза антенн. Теория синтеза антенн относится к обратным задачам математической физики. Пионерские результаты математической теории синтеза излучающих структур появились в конце 1930-х гг. в работах Е. Н. Брауна, И. Вольфа, Г. С. Рамма и А. А. Пистолькорса, где основным инструментом решения задачи синтеза является ряд Фурье. Затем для решения задачи синтеза стали использовать метод парциальных диаграмм, собственных функций и интегральный метод Фурье. Значительный вклад для решения такого рода задач сделали Г. С. Рамм, А. А. Пистолькорс, А. З. Фрадин, И. И. Вольман, Е. Г. Зелкин, Я. Н. Фельд, Л. Д. Бахрах и многие другие. Впервые интегральный метод Фурье для синтеза апертуры применил И. И. Вольман. Этот метод разработал и существенно расширил Е. Г. Зелкин. Метод собственных функций разрабатывали А. З. Фрадин и А. А. Пистолькорс. Л. Д. Бахрах показал, что основные результаты, полученные с помощью метода собственных функций, можно также получить и с помощью прямого решения интегрального уравнения, возникающего в задаче синтеза.

Метод парциальных диаграмм является одним из основных методов решения. В России этот метод разрабатывался в основном Е. Г. Зелкиным, а в Англии его разрабатывал П. Вудворд. На математическую теорию излучающих структур сильно повлияла теория регуляризации некорректных задач, созданная в конце 1960-х гг. А. Н. Тихоновым, В. К. Ивановым и М. М. Лаврентьевым. Идеи А. Н. Тихонова в дальнейшем успешно разрабатывали В. И. Дмитриев, А. В. Чечкин, А. С. Ильинский, В. И. Поповкин, А. Г. Свешников, Л. Д. Бахрах и С. Д. Кременецкий. Общая теория синтеза антенн была представлена в монографии Б. М. Минкович и В. П. Яковлева.

Определенный интерес представляют исследования, выполненные А. Ф. Чаплиным по анализу и синтезу антенных решеток, а также работы Б. З. Кацеленбаума, А. Н. Сивова и их коллег. В этих работах задачи синтеза рассматриваются как вариационные задачи (ищутся оптимальные значения физических характеристик антенн). В монографии М. И. Андрейчука, Н. Н. Войтовича, П. А. Савенко и В. П. Ткачука рассматриваются задачи синтеза антенн, в которых антенны различных типов синтезируются из шаблонов заданной амплитуды. Задача синтеза формулируется как вариационная задача со среднеквадратич-

ным отклонением в качестве критерия или его модификациями. Несмотря на многочисленные методы и физические подходы различных школ для решения этих главных и важных задач, многие задачи синтеза (включая, например, синтез неоднородных антенных решеток и смешанные задачи синтеза) требуют разработки аналитических и численных методов современной электродинамики на основе системных подходов и оригинальных идей. В последнее время находит применение новый математический аппарат АФ в краевых задачах, дистанционном зондировании, обработки и восстановлении изображений, физической электронике, задачах анализа и синтеза антенн. Теория АФ – это полномасштабная теория, позволяющая получить результаты, представленные ниже. Первоначально атомарные функции были использованы в задаче анализа и синтеза антенн В. Ф. Кравченко [8]. Эти исследования были продолжены в монографии [15]. Таким образом, началось активное применение АФ для решения задач синтеза антенн.

4. Обобщение N -мерной теоремы Уиттекера–Котельникова–Шеннона атомарными функциями. Известно, что в технике связи при передаче различных сигналов обычно имеют дело с функциями времени, спектр которых ограничен (в спектре не содержатся частоты выше некоторой граничной). Такие функции обладают уникальными свойствами, которые впервые установил в 1933 г. В. А. Котельников. Они выражены им в теореме [51], являющейся фундаментальной в теории связи и информатики, а также в других различных физических приложениях. Для интерполяции сигналов с финитным спектром можно также использовать преобразования Фурье АФ [1–7, 11]. Это связано с тем, что нули этих преобразований расположены регулярным образом. Кроме того, спектры АФ стремятся к нулю на бесконечности значительно быстрее функции $\text{sinc}(x)$, что позволяет ограничиться сравнительно небольшим числом членов интерполяционного ряда.

Ранее одномерные обобщенные теоремы отсчетов были опубликованы в [11, 15, 17, 37, 48, 49, 69, 70], где кратко рассмотрено обобщение N -мерной теоремы Уиттекера–Котельникова–Шеннона (УКШ) атомарными функциями. Согласно [37] сформулируем N -мерную теорему УКШ. Пусть задан N -мерный сигнал $f(x) = f(x_1, \dots, x_N) \in L_2(\mathbb{R}^N)$, преобразование Фурье которого $F(\omega) = \mathfrak{F}[f(x)](\omega)$ удовлетворяет условию ограниченности спектра:

$$F(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \text{если } \omega \in A, \\ 0, & \text{если } \omega \notin A. \end{cases}$$

Здесь A – некоторая область в \mathbb{R}^N .

Обозначим: $x_d = (x_{1d}, \dots, x_{Nd}) \in \mathbb{R}^N$ – пространственный шаг дискретизации; $\omega_d = (\omega_{1d}, \dots, \omega_{Nd}) = \left(\frac{\pi}{x_{1d}}, \dots, \frac{\pi}{x_{Nd}} \right) \in \mathbb{R}^N$ – частота дискретизации. Введем N -мерную прямоугольную область в \mathbb{R}^N : $D = [-\omega_{1d}, \omega_{1d}] \times \dots \times [-\omega_{Nd}, \omega_{Nd}]$.

Теорема 4.1. (N -мерная теорема отсчетов). Пусть спектр сигнала $f(x)$ ограничен и лежит в области $A \subset \mathbb{R}^N$. Тогда он может быть полностью восстановлен по множеству выборок с шагом x_d в том случае, если область D полностью покрывает область A ($D \supseteq A$) с помощью следующей формулы:

$$f(x_1, \dots, x_N) = \sum_{l_1, \dots, l_N \in \mathbb{Z}} x_{1d} \dots x_{Nd} \times f(l_1 x_{1d}, \dots, l_N x_{Nd}) \times g_B(x_1 - l_1 x_{1d}, \dots, x_N - l_N x_{Nd}), \quad (4.1)$$

где область $B \subset D$ и область $A \subseteq B$;

$$g_B(x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int \dots \int_B e^{i(x_1 \omega_1 + \dots + x_N \omega_N)} d\omega_1 \times \dots \times d\omega_N. \quad (4.2)$$

В [48, 49] подробно рассмотрено доказательство этой теоремы, а также различные следствия из Теоремы 1, которые хорошо известны для 1D и 2D случаев.

Теорема 4.2. Пусть функция $f(x) = f(x_1, \dots, x_N)$ имеет финитный спектр ($\text{supp } \hat{f}(\omega) = A \subset \mathbb{R}^N$). Выбираем функцию $\gamma(\omega) \in L_2(\mathbb{R}^N)$ такой, что должны выполняться следующие условия:

$$1) \gamma(0, \dots, 0) = \frac{(2\pi)^N}{x_{1d} \dots x_{Nd}}; \quad 2) \gamma(\omega) = 0 \text{ при } \omega \notin D \text{ (для точек, лежащих вне области } D).$$

Тогда при любом выборе шага дискретизации $x_d = (x_{1d}, \dots, x_{2d}) \in \mathbb{R}^N$, таком, что $A \subset D$, справедливо разложение:

$$f(x_1, \dots, x_N) = \sum_{k_1, \dots, k_N \in \mathbb{Z}} x_{1d} \dots x_{Nd} \times f(k_1 x_{1d}, \dots, k_N x_{Nd}) \times g_B(x_1 - k_1 x_{1d}, \dots, x_N - k_N x_{Nd}),$$

где область $B \subset D$ и область $A \subseteq B$;

$$g_B(x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int \dots \int_B \gamma(\omega_1, \dots, \omega_N) e^{i(x_1 \omega_1 + \dots + x_N \omega_N)} d\omega_1 \times d\omega_N.$$

До к а з а т е л ь с т в о. Исходным является сигнал $f(x)$ со спектром

$$F(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \text{если } \omega \in A, \\ 0, & \text{если } \omega \notin A. \end{cases}$$

Применив дискретизацию к $f(x)$ с частотой ω_d , получим сигнал со спектром $\hat{F}(\omega)$, который пропускается через идеальный фильтр нижних частот $p_B(\omega)$. На выходе фильтра имеем обработанный сигнал $f(x)$ со спектром $F(\omega)$. Затем, пропустив его, через фильтр с частотной характеристикой (ЧХ) $\gamma(\omega)$, получим выходной сигнал:

$$f_{\text{вых}}(x_1, \dots, x_N) = \sum_{k_1, \dots, k_N \in \mathbb{Z}} x_{1d} \dots x_{Nd} \times f(k_1 x_{1d}, \dots, k_N x_{Nd}) \times g_B(x_1 - k_1 x_{1d}, \dots, x_N - k_N x_{Nd}), \quad (4.3)$$

$$\text{где } g_B(x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int \dots \int_B \gamma(\omega_1, \dots, \omega_N) e^{i(x_1 \omega_1 + \dots + x_N \omega_N)} d\omega_1 \times d\omega_N.$$

В этом случае можно изменить процедуру (4.3), формируя спектр выходного сигнала как $F_{\text{вых}}(\omega) = \hat{F}(\omega) p_B(\omega) \gamma(\omega)$. Это эквивалентно введению фильтра $\gamma_B(\omega) = p_B(\omega) \gamma(\omega)$, формирующего выходной сигнал $f_{\text{вых}}(x_1, \dots, x_N)$ (4.3). Если положить функцию $\gamma(\omega) = 1$ в области B , то получим известную теорему УКШ. Известно, что, согласно теореме УКШ, дискретизированный сигнал проходит через идеальный фильтр нижних частот. В данном случае он проходит через фильтр с ЧХ $p_B(\omega) \gamma(\omega)$, где $p_B(\omega)$ – характеристическая функция области B :

$$p_B(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{если } \omega \in B \subset \mathbb{R}^N, \\ 0, & \text{если } \omega \notin B. \end{cases}$$

Одно из достоинств такого подхода (введение дополнительного фильтра) состоит в сочетании дискретизации с функциональным преобразованием исходного сигнала. Чтобы исследовать улучшение сходимости ряда (4.3), необходимо задать конкретный вид функции $\gamma(\omega)$, удовлетворяющей условиям Теоремы 4.2. Следовательно, задача сводится к выбору функции $\gamma(\omega)$ при заданном N .

Рассмотрим обобщенный ряд Кравченко–Котельникова, где в качестве интерполяционного ядра используется преобразование Фурье АФ $\text{fup}_n(\omega)$. С помощью обратного преобразования Фурье АФ $\text{fup}_n(\omega)$ определяется так:

$$\text{fup}_n(\omega) = \mathfrak{F}^{-1}[F(x)](\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ix\omega) F(x) dx. \quad (4.4)$$

$$\text{Здесь } F(x) = \text{sinc}^n\left(\frac{x}{2}\right) \prod_{j=1}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{x}{2^j}\right) = \mathfrak{F}[\text{fup}_n(\omega)](x).$$

Применим Теорему 4.2 для получения интерполяционного ядра вида $F(x)$. Для этого необходимо выбрать в качестве $\gamma(\omega)$ функцию $\text{fup}_n(\omega)$, нормированную соответствующим образом. Приведем несколько случаев:

А. Пусть $\gamma(\omega) = \frac{2\pi}{x_d} \text{fup}_n\left(\frac{n+2}{2\Omega} \omega\right)$. Тогда носителем этой функции является отрезок $[-\Omega, \Omega]$ (см. свойст-

во 1). Напомним, что Ω – верхняя граничная частота спектра $\hat{F}(\omega)$. В этом случае $g_{\Theta}(x) = g_{\Omega}(x)$, так как

$$g_{\Theta}(x) = \frac{1}{x_d} \int_{-\Theta}^{\Theta} \text{fup}_n\left(\frac{n+2}{2\Omega}\omega\right) \exp(ix\omega) d\omega = \frac{1}{x_d} \int_{-\Omega}^{\Omega} \text{fup}_n\left(\frac{n+2}{2\Omega}\omega\right) \exp(ix\omega) d\omega = g_{\Omega}(x).$$

Преобразуем функцию $g_{\Omega}(x)$ через $F(x)$. Используя свойства преобразований Фурье, получим

$$g_{\Omega}(x) = \frac{1}{x_d} \int_{-\Omega}^{\Omega} \text{fup}_n\left(\frac{n+2}{2\Omega}\omega\right) e^{i\omega x} d\omega = \frac{1}{x_d} \mathfrak{F}\left[\text{fup}_n\left(\frac{n+2}{2\Omega}\omega\right)\right](-x) = \frac{1}{x_d} \mathfrak{F}[\text{fup}_n(\omega)]\left(\frac{2\Omega x}{n+2}\right) = \frac{1}{x_d} F\left(\frac{2\Omega x}{n+2}\right).$$

В этом случае следующий обобщенный ряд Кравченко–Котельникова запишем так:

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(kx_d) \text{sinc}^n\left(\frac{\Omega(x - kx_d)}{(n+2)}\right) \prod_{j=1}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{\Omega(x - kx_d)}{2^{j-1}(n+2)}\right), \quad (4.5)$$

где $\Omega \geq \omega_d$.

Б. Если $\gamma(\omega) = \frac{2\pi}{x_d} \text{fup}_n\left(\frac{n+2}{2\Omega'}\omega\right)$, $\Omega' < \Omega$. Тогда носителем функции является отрезок $[-\Omega', \Omega']$. В

этом случае исследуемый сигнал восстановить невозможно, так как фильтр с ЧХ $\gamma(\omega)$ отсекает частоты на отрезке $[\Omega', \Omega]$. Поэтому использовать фильтр нельзя.

В. Пусть $\gamma(\omega) = \frac{2\pi}{x_d} \text{fup}_n\left(\frac{n+2}{2\Theta}\omega\right)$, $\Omega \leq \Theta \leq \omega_d$. Тогда носителем функции является отрезок $[-\Theta, \Theta]$. В

этом случае обобщенный ряд Кравченко–Котельникова принимает следующий вид:

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(kx_d) \text{sinc}^n\left(\frac{\Theta(x - kx_d)}{(n+2)}\right) \prod_{j=1}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{\Theta(x - kx_d)}{2^{j-1}(n+2)}\right). \quad (4.6)$$

Если $\Theta = \omega_d = \frac{\pi}{x_d}$, то получим ряд

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(kx_d) \text{sinc}^n\left(\frac{\pi(x - kx_d)}{x_d(n+2)}\right) \prod_{j=1}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{\pi(x - kx_d)}{x_d 2^{j-1}(n+2)}\right). \quad (4.7)$$

Ограничимся конечным числом в произведении ряда (4.7). Тогда

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(kx_d) \varphi_{k-M}(x), \quad (4.8)$$

где $\varphi_{k-M}(x) = \text{sinc}^n\left(\frac{\pi(x - kx_d)}{x_d(n+2)}\right) \prod_{j=1}^M \text{sinc}\left(\frac{\pi(x - kx_d)}{x_d 2^{j-1}(n+2)}\right)$.

При $M \rightarrow \infty$ имеем (4.5), а для случая $n=0$, $M=1$ ряд УКШ.

Г. Если $\gamma(\omega) = \frac{2\pi}{x_d} \text{fup}_n\left(\frac{n+2}{2\Omega'}\omega\right)$, $\Omega' > \omega_d$, то имеем ряд $f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(kx_d) g_{\Theta}(x - kx_d)$, где $g_{\Theta}(x) =$

$= \int_{-\Theta}^{\Theta} \text{fup}_n\left(\frac{n+2}{2\Omega'}\omega\right) \exp(ix\omega) d\omega$. Носителем функции является отрезок $[-\Omega', \Omega']$. Отсюда следует, что

функция $g_{\Theta}(x)$ не совпадает с $F(x)$, как наблюдается в (4.5), (4.6). Это связано с тем, что носитель функции $\text{fup}_n\left(\frac{n+2}{2\Omega'}\omega\right)$ выходит за пределы $[-\Theta, \Theta]$. Из ряда (4.6) следует, что $\varphi_{k-M}(x) = O\left(\frac{1}{|x|^{n+M}}\right)$, ($|x| \rightarrow \infty$).

Проанализируем сначала ряд (4.5). При $|k| \rightarrow \infty$ интерполирующее ядро будет стремиться к величине

$$\psi_n(k) = \frac{(n+2)^{n+1} \prod_{j=1}^{\infty} 2^{j-1}}{|k|^{n+1} \pi^{n+1}}. \quad (4.9)$$

Заменив бесконечное произведение в (4.9) конечным, получим $\psi_{n,m}(k) = \frac{(n+2)^{n+1} \prod_{j=1}^m 2^{j-1}}{|k|^{n+1} \pi^{n+1}}$. Для ряда УКШ аналогичная формула принимает вид $\xi(k) = \frac{1}{\pi|k|}$. Рассмотрим различные значения k и сравним с тем, что дают формулы для $\xi(k)$ и $\psi_{n,m}(k)$ при разных n, m . Проанализируем ряд (4.6). При $|k| \rightarrow \infty$ интерполирующее ядро стремится к величине

$$\psi_n(k) = \frac{(n+2)^{n+1} \prod_{j=1}^{\infty} 2^{j-1}}{|k|^{n+1} \pi^{n+1}} \left(\frac{\omega_d}{\Theta} \right). \quad (4.10)$$

Тут, заменив бесконечное произведение конечным, получим $\psi_{n,m}(k) = \frac{(n+2)^{n+1} \prod_{j=1}^m 2^{j-1}}{|k|^{n+1} \pi^{n+1}} \left(\frac{\omega_d}{\Theta} \right)$. Аналогично формуле (4.9) для ряда УКШ имеем $\xi'(k) = \frac{1}{\pi|k|} \left(\frac{\omega_d}{\Theta} \right)$. Это возможно, если $\Theta \leq \omega_d$. Случай $\Theta = \omega_d$ исследовался выше. Здесь (4.10) переходит в (4.9).

Проанализируем ряд (4.6). При $|k| \rightarrow \infty$ интерполирующее ядро стремится к выражению

$$\psi_n(k) = \frac{(n+2)^{n+1} \prod_{j=1}^{\infty} 2^{j-1}}{|k|^{n+1} \pi^{n+1}} \left(\frac{\omega_d}{\Theta} \right). \quad (4.11)$$

Бесконечное произведение заменим конечным, получим $\psi_{n,m}(k) = \frac{(n+2)^{n+1} \prod_{j=1}^m 2^{j-1}}{|k|^{n+1} \pi^{n+1}} \left(\frac{\omega_d}{\Theta} \right)$. Аналогично (4.11) для ряда УКШ принимает вид $\xi'(k) = \frac{1}{\pi|k|} \left(\frac{\omega_d}{\Theta} \right)$. Такое возможно при условии $\Theta \leq \omega_d$. Случай $\Theta = \omega_d$ рассмотрен выше. Тогда (4.11) переходит в (4.9). Для примера положим $\Theta = \omega_d/2$. Численный эксперимент и физический анализ результатов рассмотрен в [37].

5. Атомарные функции в теории вероятностей. В [60] рассмотрены применения АФ в задачах теории вероятности, а также к статистической радиофизике. Введены плотности вероятности (ПВ) и функции распределения, строящиеся на основе семейств АФ $up(x)$ и $h_a(x)$. Исследован и обоснован на основе АФ кумулянтный анализ построенных распределений (атомарных распределений Кравченко–Рвачева). Проведено сравнение основных характеристик построенных распределений с известными (Гаусса, Коши).

Вероятностные свойства «материнской» атомарной функции $up(x)$. Напомним основные понятия, связанные с АФ $up(x)$ [1–7] и ее вероятностными свойствами. Для этого зададимся следующим вопросом: как можно получить равномерное распределение, если имеется последовательность дискретных случайных величин (СВ) типа «орел»–«решка»? Пусть $\{\xi_k\}_{k=1}^N$ – последовательность независимых дискретных случайных величин, принимающих с вероятностью 0,5 значения -1 и 1 . Представим случайную величину ξ^N в виде

$$\xi^N = \sum_{k=1}^N \xi_k 2^{-k}, \xi_k \in \{-1, 1\}. \quad (5.1)$$

Пусть $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность независимых равномерно распределенных на $[-1, 1]$ случайных величин. Зададимся вопросом: какую плотность вероятности будет иметь случайная величина

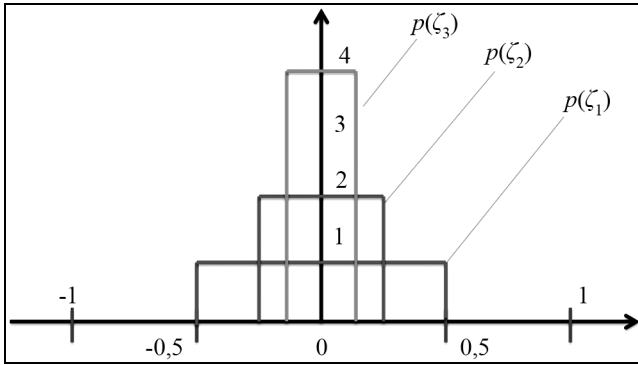


Рис. 1. Последовательность прямоугольных импульсов с плотностями вероятностей $p(\xi_1), p(\xi_2), p(\xi_3)$

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k 2^{-k} ? \tag{5.2}$$

Для ответа на этот вопрос используем свойство плотности вероятности суммы двух случайных величин [60]. Пусть случайная величина X имеет плотность вероятности $p_X(x)$, а случайная величина Y – плотность вероятности $p_Y(y)$. Тогда случайная величина $Z = X + Y$ имеет плотность вероятности

$$p_Z(z) = \int_{\mathbb{R}} p_X(z - \lambda) p_Y(\lambda) d\lambda. \tag{5.3}$$

Воспользуемся формулой (5.3) для вычисления плотности вероятности случайной величины, задаваемой равенством (5.2). На рис. 1 изображены первые три ПВ $p(\xi_1), p(\xi_2), p(\xi_3)$ из бесконечного числа, которые необходимо свернуть между собой.

При свертке функций $p(\xi_1), p(\xi_2)$ получается плотность вероятности $p(\xi_{12})$, имеющая «трапецевидную» форму (рис. 2). Далее при свертке функций $p(\xi_{12})$ и $p(\xi_3)$ получается «сглаженная», финитная функция с носителем $[-0,875; 0,875]$ (рис. 3). Повторяя процедуру свертки бесконечное число раз, получаем функцию, примерный вид которой представлен на рис. 4. Эту плотность вероятности назовем $up(\xi)$. Покажем, что $up(\xi)$ удовлетворяет функционально-дифференциальному уравнению

$$up'(\xi) = 2 \cdot up(2\xi + 1) - 2 \cdot up(2\xi - 1). \tag{5.4}$$

Функция $up(\xi)$, введенная выше как свертка бесконечного числа прямоугольных импульсов, должна удовлетворять следующей теореме.

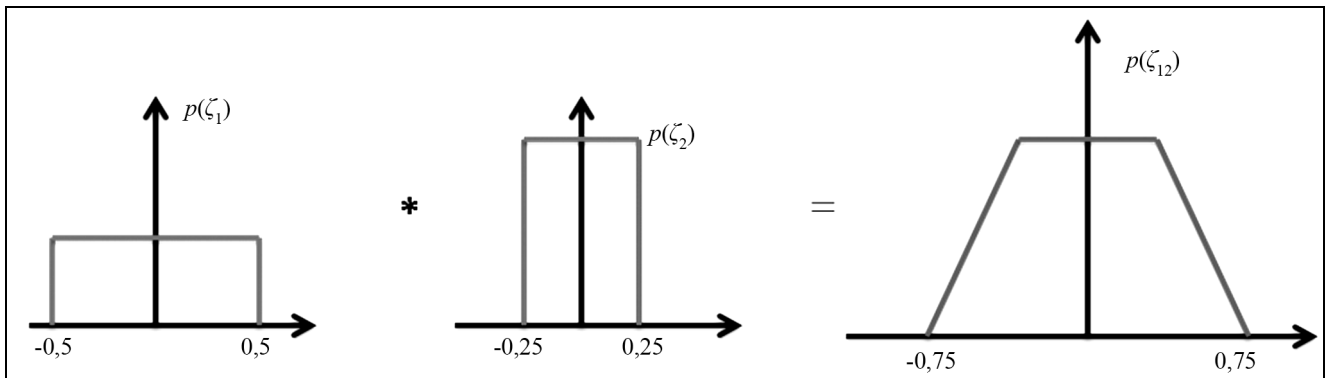


Рис. 2. Свертка плотностей вероятностей $p(\xi_1)$ и $p(\xi_2)$, дающая «трапецевидную» плотность вероятности $p(\xi_{12})$

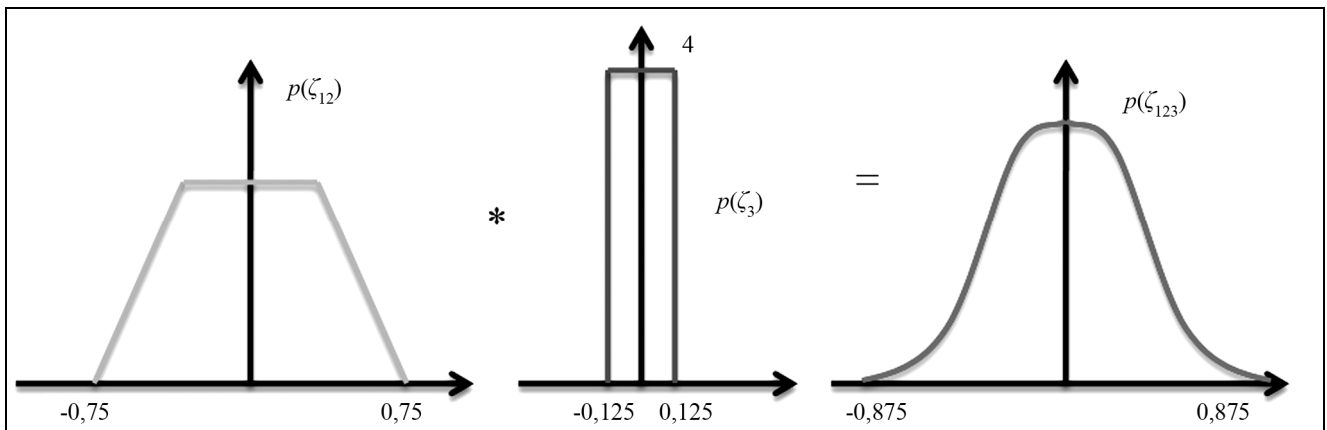


Рис. 3. Свертка плотностей вероятностей $p(\xi_{12})$ и $p(\xi_3)$, дающая «сглаженную» плотность вероятности $p(\xi_{123})$

Теорема 5.1. Плотность вероятности $up(\xi)$ случайной величины ξ является решением уравнения (4) и имеет следующее аналитическое выражение:

$$up(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \prod_{j=1}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{t}{2^j}\right) e^{it\xi} dt. \quad (5.5)$$

Доказательство теоремы дано в [60].

Поставим вопрос: какую плотность вероятности будет иметь случайная величина

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k a^{-k} ? \quad (5.6)$$

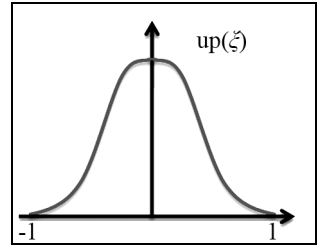


Рис. 4. Плотность вероятности $up(\xi)$

Здесь $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность равномерно распределенных на $[-1, 1]$ СВ и $a > 1$. Ответим на этот вопрос, используя следующую предельную теорему.

Теорема 5.2. Пусть задана последовательность независимых равномерно распределенных на $[-1, 1]$ случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$. Тогда при любом постоянном $a > 1$ плотность вероятности взвешенной суммы $\xi = \frac{\xi_1}{a} + \frac{\xi_2}{a^2} + \dots + \frac{\xi_n}{a^n} + \dots$ имеет вид

$$h_a(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \prod_{j=1}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{t}{a^j}\right) e^{it\xi} dt \quad (5.7)$$

с носителем $\left[-\frac{1}{a-1}, \frac{1}{a-1}\right]$.

Доказательство теоремы дано в [60].

Аналогично Теореме 5.1 можно показать, что $h_a(\xi)$ является решением функционально-дифференциального уравнения вида

$$h'_a(\xi) = -\frac{a^2}{2} \{h_a(a\xi - 1) - h_a(a\xi + 1)\}. \quad (5.8)$$

Более подробную информацию о функционально-дифференциальных уравнениях и их финитных решениях, а также о функциях $up(\xi)$, $h_a(\xi)$ можно найти в [1–7, 11]. Функции $up(\xi)$, $h_a(\xi)$ относятся к классу АФ.

Атомарное распределение Кравченко–Рвачева и его моменты. Определим плотность вероятности Кравченко–Рвачева $p_X(x)$ случайной величины (СВ) X так:

$$p_X(x) = \frac{1}{b} h_a\left(\frac{x-m}{b}\right). \quad (5.9)$$

Из [4, 11] известно, что

$$\int_{\mathbb{R}} h_a(x) dx = \int_{-\frac{1}{a-1}}^{\frac{1}{a-1}} h_a(x) dx = 1. \quad (5.10)$$

С учетом (5.10) нетрудно видеть, что $\int_{\mathbb{R}} p_X(x) dx = 1$. ПВ $p_X(x)$, если $a = 2$ и ее ХФ показаны на рис.

5. На рис. 6. изображен вид $p_X(x)$, когда $a = 2$, а $b = 1, 2$. Найдем математическое ожидание СВ X , имеющей ПВ $p_a(x)$.

Действительно,

$$m_X = \int_{\mathbb{R}} x p_X(x) dx = \int_{-\frac{1}{a-1}}^{\frac{1}{a-1}} x \frac{1}{b} h_a\left(\frac{x-m}{b}\right) dx. \quad (5.11)$$

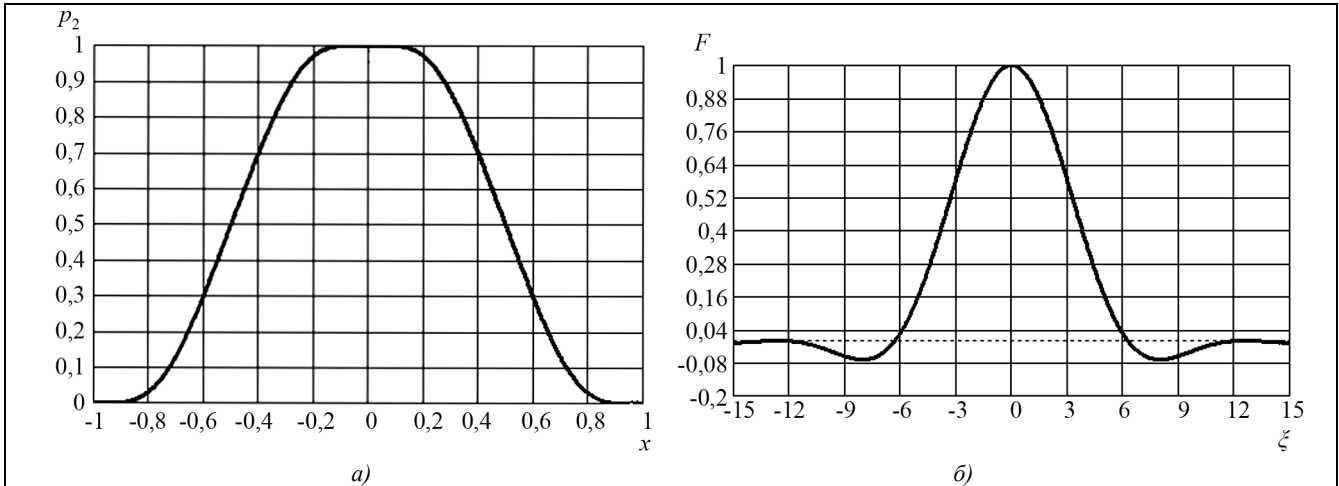


Рис. 5. Плотность вероятности $p_X(x), a = 2$ (а) и ее ХФ $F(\xi)$ (б)

Сделаем в (5.11) замену переменных $\frac{x-m}{b} = \tau \Rightarrow x = b\tau + m$. Тогда $m_X = m$. Определим моменты СВ с плотностью вероятности (5.9). Для этого найдем моменты ПВ $h_a(x)$. Из (5.8) следует, что ХФ $F_a(t)$ СВ X

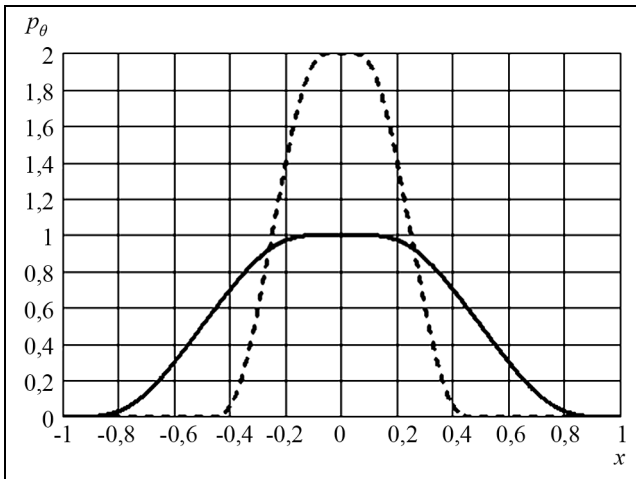


Рис. 6. Плотности вероятности $p_X(x)$ при $b = 1$ (сплошная линия) и $b = 2$ (штриховая линия)

обладает следующим свойством: $F_a(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{a}\right)F_a\left(\frac{t}{a}\right)$.

Пусть $F_a(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(a)t^k$. Тогда все нечетные моменты равны нулю $c_{2k+1}(a) = 0$. Отсюда

$$F_a(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k}(a)t^{2k}. \text{ Так как } \text{sinc}\left(\frac{t}{a}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k} a^{-2k}}{(2k+1)!},$$

то $c_{2k}(a) = \sum_{j=0}^k \frac{c_{2k-2j}(a)(-1)^j a^{-2j}}{a^{2k-2j}(2j+1)!}$. Отсюда, согласно [37],

$$c_{2k}(a) = \frac{1}{a^{2k}-1} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{c_{2i}(a)(-1)^{k-i}}{(2k-2i+1)!}. \text{ Так как } c_{2k}(a) = \frac{F_a^{(2k)}(0)}{(2k)!},$$

а $F_a^{(2k)}(0) = (-1)^k \int_{\mathbb{R}} x^{2k} h_a(x) dx$, то моменты $m_{2k}(a)$

функции $h_a(x)$ представляются в виде $m_{2k}(a) = \frac{(2k)!}{a^{2k}-1} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{c_{2i}(a)(-1)^{k-i}}{(2k-2i+1)!}$. Для частного случая, когда $a = 2$

и $h_a(x) = \text{up}(x)$, приведем первые 10 моментов [37]: $m_0(2) = 1$; $m_2(2) = \frac{1}{3^2} \approx 0,111\dots$; $m_4(2) = \frac{19}{3^3 5^2} \approx 0,028148$;

$$m_6(2) = \frac{11 \cdot 53}{3^5 \cdot 7^2} \approx 0,009792559; \quad m_8(2) = \frac{59 \cdot 2251}{3^7 5^3 \cdot 7 \cdot 17} \approx 0,0040824582; \quad m_{10}(2) = \frac{46840699}{3^7 5^2 \cdot 7 \cdot 11^2 \cdot 17 \cdot 31} \approx 0,0019192898.$$

Здесь дисперсия СВ X с плотностью вероятности $\text{up}(x)$ равна $\frac{1}{9}$. Если ПВ СВ X имеет вид (5.9), то ее дисперсия равна $\sigma^2 = b^2/9$, а среднеквадратическое отклонение $\sigma = b/3$. Нас будет в основном интересовать ПВ $\text{up}(x)$, а не $h_a(x)$. Все рассуждения относительно $\text{up}(x)$ могут быть перенесены и на другие АФ [11].

Асимметрия, эксцесс и энтропия случайной величины, имеющей плотность вероятности Кравченко–Рвачева. Найдем основные (кроме моментов) числовые характеристики СВ, имеющей плотность вероятности Кравченко–Рвачева. По определению [37], асимметрией A СВ X называется отношение третьего центрального момента m_3 к кубу среднеквадратического отклонения: $A = m_3/\sigma^3$. В данном случае $A = 0$. Экс-

цессом E СВ X называют отношение четвертого центрального момента m_4 к квадрату дисперсии за вычетом числа 3: $E = \frac{m_4}{\sigma^4} - 3$. Найдем численное значение эксцесса для СВ с плотностью $up(x)$: $E = -\frac{3^2 2}{5^2} = -0,72$.

Энтропией $H = H(X)$ непрерывной СВ X называют число $H = H(X) = -\int_{\mathbb{R}} p_X(x) \log(p_X(x)) dx$. В данном случае для основания логарифма, равного 2, энтропия $H = 0,41328$.

Функция распределения Кравченко–Рвачева. Найдем функцию распределения соответствующей плотности (14) при условии $a = 2$. По определению [37]: $F_X(x) = \int_{-\infty}^x p_X(\omega) d\omega$, причем $p_X(x) = dF_X(x)/dx$. Действительно,

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{b} up\left(\frac{\omega}{b}\right) d\omega = \int_{-b}^x \frac{1}{b} up\left(\frac{\omega}{b}\right) d\omega = \int_{-1}^{x/b} up(\xi) d\xi. \quad (5.12)$$

Запишем (22) в виде

$$F_X(x) = 1 - Q_X(x/b), \quad (5.13)$$

где

$$Q_\theta(x) = \int_x^1 up(\xi) d\xi. \quad (5.14)$$

В дальнейшем распределение (5.12) будем называть распределением Кравченко–Рвачева (КР). Выражения (5.13), (5.14) имеют вид, аналогичный распределению Гаусса (нормальному), для которого

$$p_{XN}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/(2\sigma^2)}, \quad (5.15)$$

$$F_{XN}(x) = 1 - Q_{XN}\left(\frac{x}{\sigma}\right), \quad (5.16)$$

где

$$Q_{XN}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-\xi^2/2} d\xi. \quad (5.17)$$

На рис. 7 представлены ПВ (5.9), (5.15) и функции распределения (5.13), (5.17). Примем $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ в (5.15) так, чтобы $p_{XN}(0) = 1$.

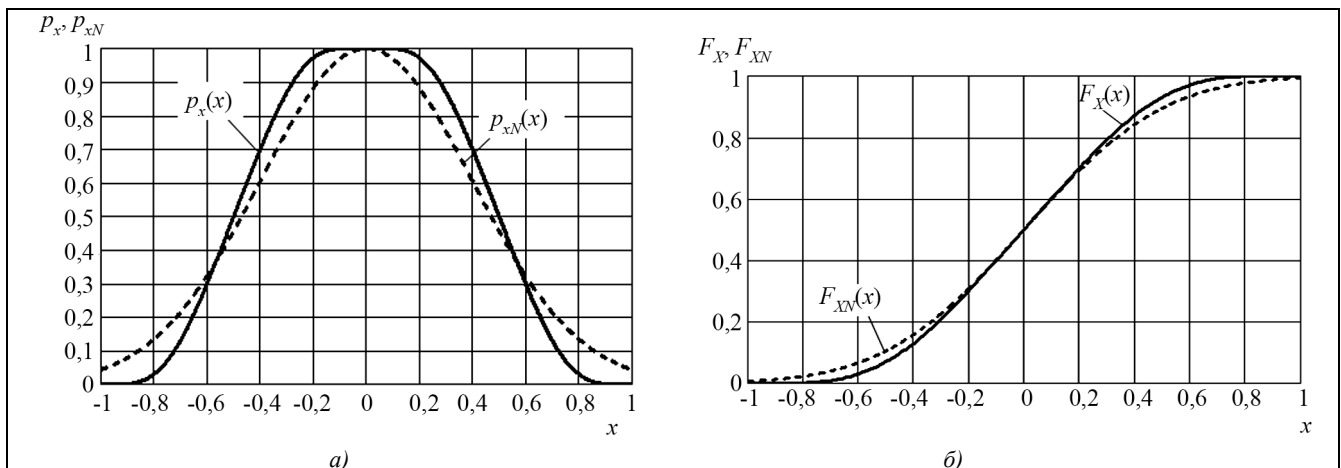


Рис. 7. Поведение плотности вероятности (а) и функции распределения (б) КР (сплошная линия), распределения Гаусса (штриховая линия)

Рассмотрим неравенство Чебышева. Пусть θ – случайная величина, имеющая среднее значение m , дисперсию σ_θ^2 и плотность вероятности $p_\theta(x)$. Тогда

$$P_\theta[|x - m| \geq c\sigma_\theta] \leq \frac{1}{c^2}, \quad (5.18)$$

где $P_\theta[\alpha \geq \beta]$ – вероятность того, что $\alpha \geq \beta$.

Если $c = 2, 3$, то на основе (5.18) можно сделать следующие вероятностные утверждения:

$$P_\theta[|x - m| \geq 2\sigma_\theta] \leq 0,250, \quad P_\theta[|x - m| \geq 3\sigma_\theta] \leq 0,111.$$

Сравним эти результаты для распределений Гаусса и КР. Для распределения Гаусса имеем

$$P_\theta[|x - m| \geq 2\sigma_\theta] < 0,050 \quad P_\theta[|x - m| \geq 3\sigma_\theta] < 0,003,$$

а для распределения КР

$$P_\theta[|x - m| \geq 2\sigma_\theta] < 0,030, \quad P_\theta[|x - m| \geq 3\sigma_\theta] = 0.$$

Последнее выражение имеет место вследствие того, что протяженность ПВ КР ограничена величиной b , а среднеквадратическое отклонение $\sigma_\theta = \sqrt{\sigma_\theta^2} = \frac{b}{3}$.

***N*-мерная плотность вероятности, статистическая независимость и смешанные выражения для вероятностей.** Определим ПВ случайного *N*-мерного вектора $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ следующим образом:

$$P[\{\omega : x(\omega) \in O\}] = \int_O p_x(\xi) d\xi \quad (5.19)$$

для любой области $O \subset \mathbb{R}^N$. Если положить, что O – область, где $x \leq \mu$, $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N) \in \mathbb{R}^N$, то из (5.19) получим

$$F_x(\mu) = P[\{\omega : x(\omega) \leq \mu\}] = \int_{-\infty}^{\mu_N} \dots \int_{-\infty}^{\mu_2} \int_{-\infty}^{\mu_1} p_x(\xi) d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_N. \quad (5.20)$$

Продифференцировав (5.20) по верхним пределам интегрирования, находим

$$p_x(\mu) = \frac{\partial^N}{\partial \mu_1 \partial \mu_2 \dots \partial \mu_N} F_x(\mu), \quad (5.21)$$

если $F_x(\mu)$ – непрерывная и дифференцируемая функция в точке μ . Известно, что СВ x_1, x_2, \dots, x_n статистически независимы, если плотность совместного распределения вероятностей этих величин p_x равна произведению

$$p_x = \prod_{i=1}^N p_{x,i}. \quad (5.22)$$

Если каждая СВ x_i имеет плотность вероятности вида (5.9), то (5.22) принимает вид

$$p_x(\mu_1, \dots, \mu_N) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{b_i} \operatorname{up}\left(\frac{\mu_i - m_i}{b_i}\right). \quad (5.23)$$

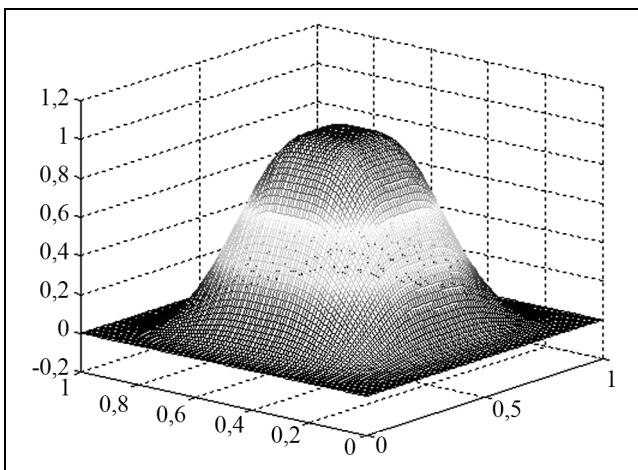


Рис. 8. Двумерная ПВ КР для $m_1, m_2 = 0$ и $b_1, b_2 = 1$

В частном случае, когда $N = 2$ (5.23), можно записать так:

$$p_x(\mu_1, \mu_2) = \frac{1}{b_1 b_2} \operatorname{up}\left(\frac{\mu_1 - m_1}{b_1}\right) \operatorname{up}\left(\frac{\mu_2 - m_2}{b_2}\right). \quad (5.24)$$

График плотности (5.24) изображен на рис. 8.

Кумулянтный анализ атомарного распределения Кравченко–Рвачева. Характеристическую функцию (ХФ) $F_\theta(\xi)$ случайной величины θ можно представить в виде $F_\theta(\xi) = \exp\{B_\theta(\xi)\}$, где выполняется равенство $B_\theta(0) = 0$. Разложим функцию $B_\theta(\xi)$ в степенной ряд

$$B_\theta(\xi) = \ln\{F_\theta(\xi)\} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\chi_k}{k!} (i\xi)^k. \quad (5.25)$$

Коэффициенты ряда (5.25) таковы:

$$\chi_k = (i)^{-k} B_\theta^{(k)}(0) = (i)^{-k} \left[\frac{d^k \ln(F_\theta(\xi))}{d\xi^k} \right]_{\xi=0}.$$

Они так же, как и моменты, являются характеристиками вероятностного распределения и носят название *кумулянтов* или *семиинвариантов* [37]. Кумулянты однозначно определяют СВ, если ряд (5.25) сходится для всех ξ . В этом случае набор кумулянтов $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n, \dots$ может служить тождественным представлением вероятностного распределения. Если известны моменты, то кумулянты могут быть найдены из следующих соотношений: $\chi_1 = m_1$, $\chi_2 = m_2 - m_1^2 = D$, $\chi_3 = m_3 - 3m_1m_2 + 2m_1^2$, $\chi_4 = m_4 - 3m_2^2 - 4m_1m_3 + 12m_1^2m_2 - 6m_1^4$, $\chi_5 = m_5 - 5m_4m_1 - 10m_2m_3 + 20m_1^2m_3 + 30m_1m_2^2 - 60m_1^3m_2 + 24m_1^5, \dots$. В свою очередь, моменты выражаются через кумулянты: $m_1 = \chi_1$, $m_2 = \chi_2 + \chi_1^2$, $m_3 = \chi_3 + 3\chi_1\chi_2 + \chi_1^3$, $m_4 = \chi_4 + 3\chi_2^2 + 4\chi_1\chi_3 + 6\chi_1^2\chi_2 + \chi_1^4$, $m_5 = \chi_5 + 5\chi_1\chi_4 + 10\chi_2\chi_3 + 10\chi_1^2\chi_3 + 10\chi_1^3\chi_2 + 15\chi_1\chi_2^2 + \chi_1^5, \dots$.

Если $p_\theta(x) = \frac{1}{b} \text{up}\left(\frac{x-m}{b}\right)$, то все нечетные моменты равны нулю, как и нечетные кумулянты. Приведем численное значение первых пяти четных моментов и кумулянтов (табл. 2).

Таблица 2. Моменты и кумулянты атомарного распределения Кравченко–Рвачева

N	2	4	6	8	10
Моменты	0,111	0,028	$9,793 \cdot 10^{-3}$	$4,082 \cdot 10^{-3}$	$1,919 \cdot 10^{-3}$
Кумулянты	0,111	$8,889 \cdot 10^{-3}$	$4,031 \cdot 10^{-3}$	$4,182 \cdot 10^{-3}$	0,763

Отметим, что найденные выше коэффициенты асимметрии и эксцесса являются кумулянтными коэффициентами [37], которые описывают степень отклонения вероятностного распределения от гауссовского. Пусть имеется распределение $p_\theta(\xi)$, обладающее всеми кумулянтами. Его характеристическую функцию запишем в виде

$$F_\theta(\xi) = \exp\left\{\left(im\xi - \frac{D^2}{2}\xi^2\right)\left[1 + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{\beta_k}{k!} (i\xi)^k\right]\right\}. \quad (5.26)$$

Коэффициенты β_k в (5.26) являются моментами распределения (5.9), определенными при $\chi_{1,2} = 0$, и называются *квазимоментами распределения*. Они не равны нулю только для негауссовских случайных величин. Осуществив преобразование Фурье (5.26), имеем

$$p_\theta(x) = p_\Gamma(x) + \sum_{k=3}^{\infty} (-1)^k \frac{\beta_k}{k!} p_\Gamma^{(k)}(x). \quad (5.27)$$

Ряд (5.27) называют *рядом Эджворта*. Он представляет собой разложение произвольной ПВ по производным гауссовского распределения [37]. Если ограничиться первыми четырьмя четными членами в (5.27) для распределения (5.9), то получим

$$p_\theta(x) = p_\Gamma(x) + \frac{\chi_4}{4!} p_\Gamma^{(4)}(x) + \frac{\chi_6}{6!} p_\Gamma^{(6)}(x) + \frac{\chi_8 + 35\chi_4^2}{8!} p_\Gamma^{(8)}(x) + \frac{\chi_{10} + 210\chi_4\chi_6}{10!} p_\Gamma^{(10)}(x). \quad (5.28)$$

Приведем простейший пример использования кумулянтного подхода для построения двумерной ПВ в случае, когда случайные величины связаны только коррелированностью ρ . При этом [37] характеристическая функция будет такой:

$$F_\theta(\xi, \eta) = e^{-i\rho\xi\eta} F_\theta(\xi) F_\theta(\eta), \quad (5.29)$$

где $F_\theta(\xi)$, $F_\theta(\eta)$ – ХФ СВ с плотностями (5.9), каждую из которых можно представить в виде (5.26) или как

$$F_\theta(\xi) = \Psi_1(\xi) \exp\left[i\chi_{1\xi}\xi - \frac{\chi_{2\xi}}{2}\xi^2\right], \quad (5.30)$$

$$F_\theta(\eta) = \Psi_1(\eta) \exp\left[i\chi_{2\eta}\eta - \frac{\chi_{2\eta}}{2}\eta^2\right]. \quad (5.31)$$

Здесь $\chi_{1\xi}, \chi_{2\xi}$ и $\chi_{1\eta}, \chi_{2\eta}$ – первые два кумулянта распределения (5.9) (табл. 2).

Двумерную ХФ (5.29) с учетом (5.30) и (5.31) запишем в виде

$$F_\theta(\xi, \eta) = F_\Gamma(\xi, \eta) \Psi_1(\xi) \Psi_1(\eta). \quad (5.32)$$

Это соотношение представляет собой произведение ХФ гауссовской совокупности двух СВ $\{\delta_1, \delta_2\}$ на ХФ КР двух СВ $\{\delta'_1, \delta'_2\}$. Преобразование Фурье (5.32) дает ПВ

$$p(x, y) = \iint_{\mathbb{R}^2} p_\Gamma(s, t) p_1(x-s) p_2(y-t) ds dt, \quad (5.33)$$

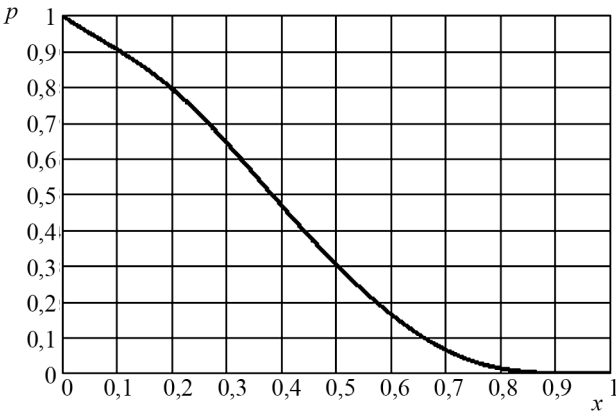
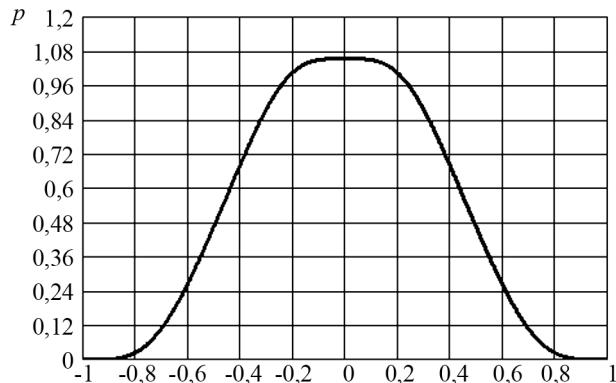
где $p_\Gamma(s, t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\chi_{2\xi}\chi_{2\eta} - \rho^2}} \exp\left[\frac{\chi_{2\eta}(s - \chi_{1\xi})^2 - 2\rho(s - \chi_{1\xi})(t - \chi_{1\eta}) + \chi_{2\xi}(t - \chi_{1\eta})^2}{2(\chi_{2\xi}\chi_{2\eta} - \rho^2)}\right]$, а $p_1(x), p_2(y)$ –

плотности распределения КР, задаваемые своими кумулянтами (5.25), (5.27).

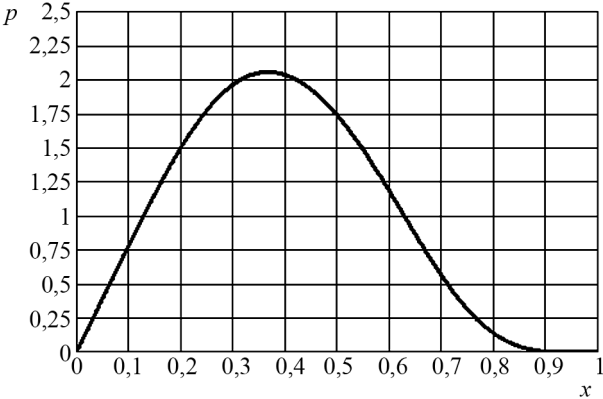
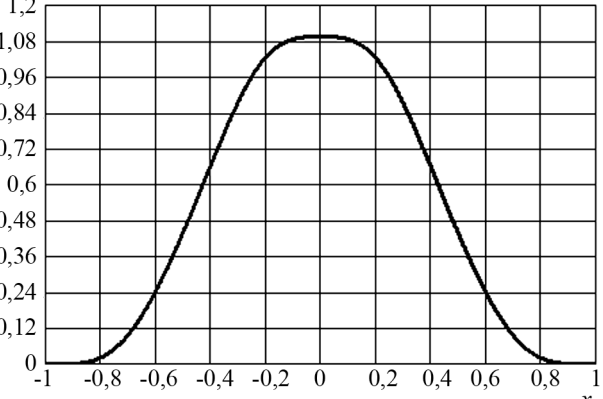
Итак, получена двумерная ПВ СВ, связанных коррелированностью, так что, если положить $\rho = 0$, то (5.33) переходит (5.24).

Обобщенные плотности вероятностей на основе распределения Кравченко–Рвачева. На практике могут быть полезны финитные распределения, строящиеся на основе АФ $\varphi(x)$. Числовые характеристики предложенных распределений приведены в табл. 3.

Таблица 3. Числовые характеристики распределений

Законы	График $p(x)$	Моменты
1	2	3
Кравченко–Пуассона ($a = b = 1$)		$m_1 = 0,095$; $m_2 = 0,035$; $m_3 = 0,016$; $m_4 = 0,008023$; $m_5 = 0,00443$
Кравченко–Гаусса ($a = b = 1$)		$m_1 = 0$; $m_2 = 0,134$; $m_3 = 0$; $m_4 = 0,0013$; $m_5 = 0$

Окончание табл. 3.

1	2	3
Кравченко–Рэлея ($a = b = 1$)		$m_1 = 0,387;$ $m_2 = 0,18;$ $m_3 = 0,093;$ $m_4 = 0,053;$ $m_5 = 0,031$
Кравченко–Коши ($a = b = 1$)		$m_1 = 0;$ $m_2 = 0,099;$ $m_3 = 0;$ $m_4 = 0,023;$ $m_5 = 0$

Плотность вероятности Кравченко–Пуассона $p(x) = \begin{cases} \frac{1}{c} \text{up}\left(\frac{x}{b}\right) \exp\left(-\frac{x}{a}\right), & \text{при } x \geq 0, \\ 0, & \text{при } x < 0, \end{cases}$ где $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Плотность вероятности Кравченко–Гаусса $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi c}} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} \text{up}\left(\frac{x}{b}\right)$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Плотность вероятности Кравченко–Рэлея $p(x) = \begin{cases} \frac{x}{c} \text{up}\left(\frac{x}{b}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right), & \text{при } x \geq 0, \\ 0, & \text{при } x < 0, \end{cases}$ где $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Плотность вероятности Кравченко–Коши $p(x) = \frac{a}{c} \frac{\pi}{a^2 + x^2} \text{up}\left(\frac{x}{b}\right)$, $a, b, c \in \mathbb{R}$. Причем c выбирается

так, чтобы $\int_{\mathbb{R}} p(x) dx = 1$. Развитие этого нового научного направления получило в работах [60, 82, 111, 115, 120, 121, 124].

6. Новый класс WA-систем функций Кравченко–Рвачева в цифровой обработке сигналов. В последнее время вейвлетам, как математическому аппарату, уделяется большое внимание во многих приложениях. Благодаря локальным свойствам как в пространственной, так и в частотной области, ортогональности, нулевым моментам и кратномасштабному анализу (КМА) вычислительные алгоритмы на основе вейвлетов обладают существенными преимуществами перед фурье-преобразованиями. В теории вейвлетов [17-20] имеет место сближение различных математических аппаратов аппроксимации. Примером могут служить широко известные сплайн-вейвлеты, в которых используется математический аппарат как сплайнов, так и вейвлетов. С этой точки зрения большой научный и практический интерес представляет построение нового класса ортогональных вейвлет-функций Кравченко [32, 36, 44, 47, 55, 61, 66, 117] на

основе АФ. Эффективность этого подхода показана на конкретных физических примерах, относящихся к цифровой обработке сигналов и изображений (ЦОС), а также к численному решению дифференциальных уравнений. Подробно обоснование новых конструкций вейвлетов, построенных на АФ имеются в [17–20, 30–33, 40, 41, 44, 47, 54, 55, 57, 62, 66, 74, 86, 95, 114, 116–119, 122, 123]. Далее на основе атомарных функций (АФ) $h_a(x)$ построены новые конструкции ортогональных вейвлетов Кравченко. Получены следующие результаты: предложен и обоснован обобщенный алгоритм вычисления ортогональных вейвлетов, рассмотрен его частный случай, дан анализ характеристик новых вейвлетов в сравнении с вейвлетами Мейера и Котельникова–Шеннона. Обосновано обобщение функции неопределенности (ФН) по времени и частоте на основе семейства АФ применительно к цифровой обработке сигналов в антенных системах. Предложен новый класс аналитических вейвлетов, основанных на АФ и получивших название аналитических вейвлетов Кравченко–Рвачева (АКР-вейвлетов).

Предлагается использовать аналитическое вейвлет-преобразование для изучения структуры широкополосных (СШП) сигналов и процессов. Выполнен вейвлет-анализ простых вещественных моделей СШП-сигналов во временной области. Показаны преимущества использования АКР-вейвлетов для анализа СШП-сигналов и процессов. С помощью комплексного функционала качества сделан выбор оптимального вейвлетного базиса для каждой конкретной модели СШП-сигнала. Предложен и обоснован новый подход, основанный на комбинациях АФ в сочетании с классическими спектральными ядрами. Показано, что полученные конструкции имеют определенные преимущества перед известными в задачах спектрального анализа СШП-сигналов.

6.1. Построение ортогональных вейвлетов Кравченко. Ортогональные вейвлеты Кравченко строятся на основе АФ $h_a(x)$ и обладают гладким преобразованием Фурье. Это позволяет обеспечить лучшую временную локализацию по сравнению с вейвлетами Котельникова–Шеннона. Построение их [17–20] осуществляется с помощью сопряженных зеркальных фильтров с нормировкой $\hat{m}_0(0) = \sqrt{2}$, принадлежащих C^n . Как известно, ортогональный вейвлет-анализ основывается на построении масштабирующей функции $\varphi(x)$, которая образует совокупность замкнутых вложенных друг в друга подпространств $V_j \subset L^2(\mathbb{R})$, $j \in \mathbb{Z}$, порождающих КМА [1,6-8] со следующими свойствами: 1) $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j = L^2(\mathbb{R})$; 2) $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$; 3) $f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}$; 4) Существует масштабирующая функция $\varphi(x) \in V_0$, сдвиги которой образуют базис Рисса пространства V_0 .

Пусть V_0 – подпространство в $L^2(\mathbb{R})$, порожденное сдвигами функции $\varphi(x)$. Для того, чтобы функции $\varphi_n(x) = \varphi(x - n)$ образовывали [17-20] базис Рисса подпространства V_0 необходимо выполнение следующих теорем.

Теорема 6.1. Система $\{\varphi(x - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$, полученная сдвигами некоторой функции $\varphi(x) \in L^2(\mathbb{R})$, образует базис Рисса подпространства $V_0 \subset L^2(\mathbb{R})$, тогда и только тогда, когда существуют положительные постоянные A и B , такие, что

$$A \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\omega + 2\pi n)|^2 \leq B \quad (6.1)$$

Для ортонормированной системы функций $\varphi_n(x) = \varphi(x - n)$, $n \in \mathbb{Z}$ справедлива Теорема 6.2.

Теорема 6.2. Функции $\varphi_n(x) = \varphi(x - n)$ образуют ортонормированный базис $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ подпространства $V_0 \subset L^2(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\omega + 2\pi n)|^2 = 1. \quad (6.2)$$

Это равносильно выполнению квадратурного условия в переходной области:

$$|\hat{m}_0(\omega)|^2 + |\hat{m}_0(\omega - 2\pi)|^2 = 2, \quad \omega = \left[-\frac{2}{3}\pi; -\frac{1}{3}\pi\right] \cup \left[\frac{1}{3}\pi; \frac{2}{3}\pi\right].$$

Согласно [17–20] спектр масштабирующей функции определяется следующим образом:

$$\hat{\varphi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{m}_0\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \Leftrightarrow \hat{\varphi}(\omega) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{m}_0\left(\frac{\omega}{2^k}\right),$$

а спектр вейвлетной функции запишем в виде $\hat{\psi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{g}\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$, где $\hat{g}(\omega) = e^{-i\omega} \hat{m}_0(\omega + \pi)$. В общем случае функция $\hat{m}_0(\omega)$ является сложной. Учитывая свойства АФ $h_a(x)$, можно упростить вывод функции масштабирования $\hat{m}_0(\omega)$. Для этого модифицируем функцию $h_a(x)$ согласно следующим условиям:

$$1^0. \text{ Носителем функции должен быть отрезок } x = \left[-\frac{2}{3}\pi; \frac{2}{3}\pi\right].$$

$$2^0. \text{ Функция должна иметь постоянное значение (плоскую вершину): } \tilde{h}_a(x) = \sqrt{2} \text{ на отрезке } x = \left[-\frac{1}{3}\pi; \frac{1}{3}\pi\right].$$

$$3^0. \text{ Для сопряжения спектров в переходной области: } \tilde{h}_a\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 1 \text{ — точка перегиба функции.}$$

Как следует из свойств 1^0-3^0 , модифицированная функция $h_a^*(x)$ проходит через шесть ключевых точек: $T_1 = \left(-\frac{2}{3}\pi; 0\right)$, $T_2 = \left(-\frac{\pi}{2}; 1\right)$, $T_3 = \left(-\frac{\pi}{3}; \sqrt{2}\right)$, $T_4 = \left(\frac{\pi}{3}; \sqrt{2}\right)$, $T_5 = \left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$, $T_6 = \left(\frac{2}{3}\pi; 0\right)$. Вне интервала $[T_1, T_6]$ она равна нулю, а на интервале $[T_3, T_4]$ принимает постоянное значение (имеет плоскую вершину). В общем случае для выполнения условий 1^0-3^0 используются линейные комбинации сдвигов и сжатий АФ $h_a(x)$ для разложения единицы на заданном интервале. Кроме того, в частном случае можно применить модифицированную функцию $h_a(x)$ без дополнительных преобразований, как это делается, например, в случае с вейвлетами Мейера [17–20].

6.2. Обобщенные ортогональные вейвелеты Кравченко на основе атомарных функций $h_a(x)$. Для формирования функции $\hat{\phi}(\omega)$, удовлетворяющей свойствам 1^0-3^0 и условиям теорем, воспользуемся более общим подходом. Частичная сумма ряда разложения единицы по функциям $h_a(x)$: $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_a\left(x - \frac{2k}{a}\right) \equiv 1$,

$h_{a,M}^{\text{sum}}(\omega) = \sum_{k=-M}^M h_a\left(\omega - \frac{2k}{a}\right)$. В этом случае необходимо выполнение условий 1^0-3^0 для линейной комбинации функций $h_a(x)$. Рассмотрим случай формирования частичной суммы для произвольного M . На рис. 9 представлена схема разложения единицы на интервале $\left[-\frac{2M(a-1)+a-2}{a(a-1)}; \frac{2M(a-1)+a-2}{a(a-1)}\right]$. Здесь носителем частичной суммы является $\left[-\frac{2M(a-1)+a}{a(a-1)}; \frac{2M(a-1)+a}{a(a-1)}\right]$, плоская вершина определена на интервале $\left[-\frac{2M(a-1)+a-2}{a(a-1)}; \frac{2M(a-1)+a-2}{a(a-1)}\right]$, а точки перегиба такие: $x = \pm \frac{2M+1}{a}$. Вводя нормировку аргумента $b = \frac{1}{\pi} \frac{a}{2N+1}$, получаем

$$\widetilde{h_{a,M}}(\omega) = \sum_{k=-M}^M h_a\left(\frac{1}{\pi} \frac{a}{2N+1} \left(\omega - \frac{2k}{a}\right)\right). \quad (6.3)$$

Такая модифицированная функция удовлетворяет условиям 1^0-3^0 . Следовательно, получаем выражения спектров для масштабирующей и вейвлетных функций:

$$\hat{\phi}(\omega) = \frac{2}{\sqrt{a}} \sqrt{\sum_{k=-M}^M h_a\left(\frac{1}{\pi} \frac{a\omega}{2N+1} - \frac{2k}{a}\right)}, \quad (6.4)$$

$$\hat{\psi}(\omega) = e^{-i\omega} \frac{2\sqrt{2}}{a} \sqrt{\sum_{k=-M}^M h_a\left(\frac{1}{\pi} \frac{a(\omega+\pi)}{2N+1} - \frac{2k}{a}\right) \sum_{k=-M}^M h_a\left(\frac{1}{\pi} \frac{a\omega}{2N+1} - \frac{2k}{a}\right)}. \quad (6.5)$$

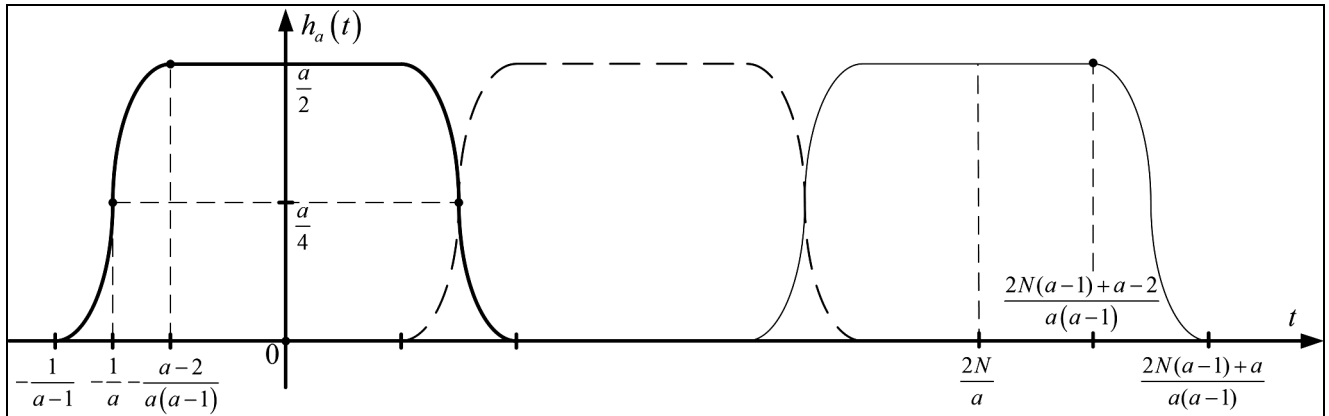


Рис. 9. Разложение единицы для произвольного значения M

Спектр масштабирующей и вейвлет-функции для $a=2$ и $M=1$ показан на рис. 10,а. Поведение соответствующего вейвлета приведено на рис. 10,б.

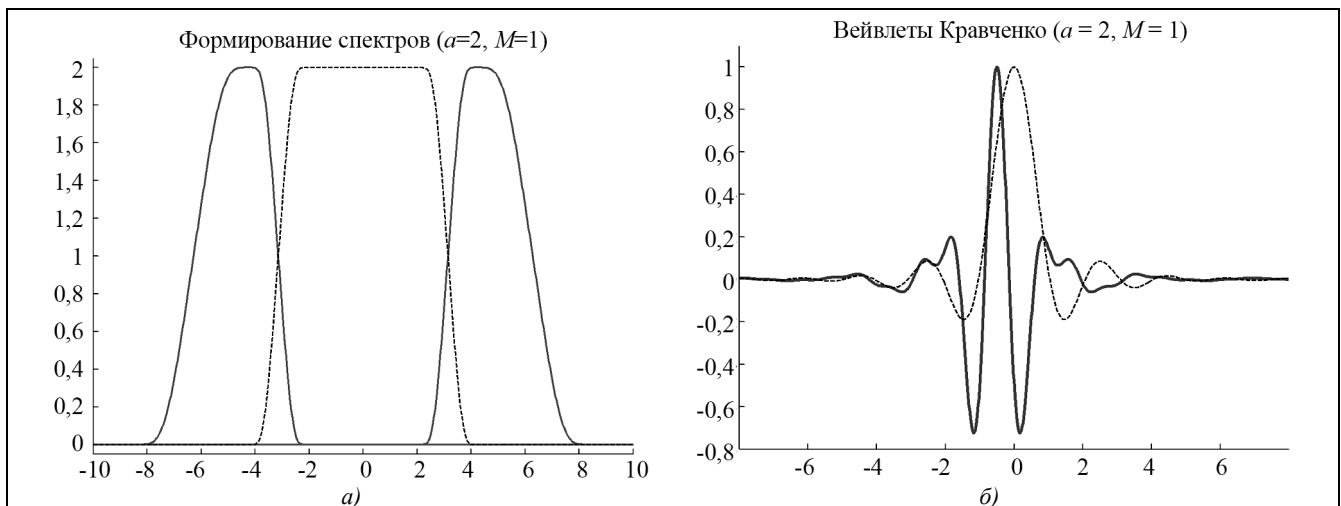


Рис. 10. Спектры масштабирующей функции и вейвлета (а), их графики (б) ($a=2, M=1$)

Физические характеристики вейвлетов. Оценки констант неопределенностей. Одной из основных характеристик вейвлетов являются константы неопределенности [17–20], дающие информацию о частотно-временном разрешении функции и распределении энергии. Важным является то, что константа неопределенности инвариантна к сдвигам-сжатиям и масштабированию функции. Это делает данную оценку эффективной при анализе конкретных схем КМА. Константы неопределенности определяются так:

$$x_f^* = \frac{1}{\|f(x)\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} x |f(x)|^2 dx, \quad \Delta_f = \frac{1}{\|f(x)\|} \left(\int_{-\infty}^{\infty} (x - x_f^*)^2 |f(x)|^2 dx \right)^{1/2},$$

$$\omega_{\hat{f}}^* = \frac{1}{\|\hat{f}(\omega)\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega, \quad \Delta_{\hat{f}} = \frac{1}{\|\hat{f}(\omega)\|} \left(\int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \omega_{\hat{f}}^*)^2 |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \right)^{1/2}.$$

Время-частотная локализация характеризуется произведением $\Delta_f \Delta_{\hat{f}}$. В табл. 4 приведены результаты вычисления констант неопределенности для вейвлетов Кравченко при различных значениях a , а также вейвлетов Мейера и Котельникова–Шеннона на носителе $[-8;8]$.

Рассмотрим применение разработанной методики для цифровой обработки сигналов вейвлетами Кравченко. Согласно [17, 32] используем следующие физические характеристики: относительное положение максимума ФСП γ_1 , относительное положение первого нуля ФСП γ_2 , относительная ширина ФСП по уровню 3 дБ γ_3 , относительная ширина ФСП по уровню 6 дБ γ_4 , когерентное усиление γ_7 , эквивалентную шумовую полосу γ_8 , максимальный уровень боковых лепестков γ_9 , дБ. Физические параметры для вейвлетов Кравченко и Мейера приведены в табл. 5.

Таблица 4. Значения констант неопределенности

Константы неопределенности для разных значений параметра a	Вейвлет Кравченко	Вейвлет Мейера	Вейвлет Котельникова–Шеннона
$a = 4$	0,9270	1,1459	1,6864
$a = 5$	1,0267		
$a = 6$	1,0999		
$a = 6,64$	1,1459		
$a = 7$	1,1718		
$a = 8$	1,2380		
$a = 9$	1,2998		
$a = 10$	1,3499		
$a \rightarrow \infty$	1,6864		

Таблица 5. Физические характеристики вейвлетов Кравченко и Мейера

a	M	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_7	γ_8	γ_9
Вейвлеты Кравченко $\{\tilde{h}_{a,M}\}$								
2	1	0,88272	2	0	0,65979	6,7084	3,9162	-21,909
2	1	2,8369	0,88406	0,87319	0,6342	7,3814	3,6719	-21,702
3	1	1,1224	2	0	0,59723	5,8634	3,1626	-16,327
3	1	3,6546	0,79412	0,94118	0,44934	6,1004	2,9145	-16,354
4	1	1,2874	2	0	0,57448	5,5102	2,8571	-14,238
4	1	4,218	0,75556	0,94074	0,40384	5,5877	2,6057	-14,034
2	2	1,112	2	0	0,59723	5,8916	3,1894	-17,851
2	2	3,5909	0,79412	0,93382	0,47209	6,1527	2,9539	-17,824
3	2	1,3666	2	0	0,5631	5,3742	2,7438	-13,495
3	2	4,4915	0,74627	0,95149	0,38962	5,373	2,4766	-13,407
4	2	1,4777	2	0	0,55741	5,207	2,6086	-12,461
4	2	4,9975	0,7218	0,9812	0,34412	5,0817	2,3017	-12,45
4	0	0,83026	2	0	0,67686	7,0403	4,1587	-19,655
4	0	2,6747	0,97143	0,85	0,66548	8,1019	4,0321	-19,77
5	0	0,92475	2	0	0,63704	6,5586	3,7442	-17,364
5	0	2,9979	0,90647	0,8741	0,57732	7,1398	3,4428	-17,307
6	0	0,99363	2	0	0,61998	6,2938	3,5056	-16,739
6	0	3,2471	0,85507	0,87681	0,52897	6,7168	3,2308	-16,55
Вейвлет Мейера								
-	-	0	0,81905	0,65411	0,69392	7,3217	4,2844	-35,90
-	-	0,9292	0,74796	0,71667	0,83612	7,0681	3,9927	-35,90

7. Решение краевых задач с помощью функций Рвачева и WA-систем функций. При рассмотрении широкого класса краевых задач различной физической природы возникает необходимость в решении дифференциальных уравнений в частных производных, в которых исследуемая область имеет сложную конфигурацию. В таких случаях, как правило, используются численные методы: сеточные (метод конечных разностей, конечных элементов, граничных элементов), вариационные и проекционные (метод Рунца, Бубнова–Галеркина–Петрова, коллокаций, Трефтца, метод наименьших квадратов, метод фиктивных областей, R-функций [5, 11, 12, 16]). Однако каждый из них имеет свои преимущества и недостатки. Так, сеточные методы обладают большой эффективностью алгоритма (за счет чего и получили широкое распространение), но при этом не точно учитывают геометрию исследуемого объекта.

В случае вариационных методов не всегда можно построить базисные функции, которые удовлетворяли бы всем требуемым условиям. Поэтому их использование ограничено. Следует особо выделить метод R-функций [4, 5], обладающий геометрической гибкостью и универсальностью по отношению к выбранному способу минимизации функционала. Применение такого подхода требует значительных вычислительных затрат. Это обусловлено использованием структурных формул, в основе которых лежат построенные с помощью R-операций функции области. Такие функции могут иметь сложную структуру, а для вычисления интегралов от них по области нестандартной формы необходимо использовать квадратурные формулы с высоким порядком точности. Вейвлет-базисы позволяют обойти указанные выше недостатки благодаря своим уникальным свойствам [4, 5] и разработать адаптивную расчетную схему без использования операции интегрирования. Такой подход возможен при введении специальных коэффициентов, отражающих дифференциальные и интегральные характеристики базиса, а также коэффициентов разложения по вейвлетам функций области, краевых условий и правой части уравнения.

Основным инструментом для реализации нового метода на основе R-функций и вейвлетов является схема Галеркина – Петрова [4] решения дифференциальных уравнений в частных производных. Известно, что метод Галеркина (Галеркина – Петрова) обладает достаточной гибкостью для того, чтобы оказалось возможным непосредственно воспользоваться дополнительным математическим аппаратом с целью повышения эффективности алгоритма в целом. Поэтому для него разработано много различных модификаций. Рассмотрим формулировку классического метода Галеркина [4]. Пусть требуется найти в области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ решение u дифференциального уравнения

$$Au=f (f \in H) \quad (7.1)$$

с краевыми условиями

$$L_i u|_{\partial\Omega} = g_i, \quad i = \overline{1, N} \quad (7.2)$$

на участках $\partial\Omega_i$ границы $\partial\Omega$. Здесь A -эллиптический дифференциальный оператор, область определения $D(A)$ и область значения $R(A)$ которого являются плотными подмножествами заданного гильбертовского пространства H ; L_i -операторы краевых условий (в частном случае L_i может представлять тождественный оператор); f, g_i -известные функции. Приближенное решение (7.1), (7.2) ищется в виде ряда

$$u_n(x, y) = \sum_{k=1}^n c_k \phi_k(x, y), \quad (7.3)$$

где c_k – коэффициенты, подлежащие определению; $\phi_k(x, y) \in D(A)$ – последовательность базисных функций.

Согласно методу Галеркина, c_k находят из условия, чтобы невязка уравнения (7.1) была ортогональна к функциям

$$\{\phi_k\}_{k=1}^n \quad (Au_n - f, \phi_k) = 0, \quad k=1, \dots, n. \quad (7.4)$$

Известно [2, 3], что $\{\phi_k\}_n$ должны удовлетворять следующим требованиям:

1. Конечная система $\{\phi_k\}_n$ используемых функций линейно независима. Тогда она образует базис в n -мерном подпространстве $H_n \subset H$, которое является линейной оболочкой этой системы, а $u_n \in H_n$.

2. Для сходимости приближенного решения $u_n \in H_n$ к слабому решению $u \in H$ уравнения $Au=f$ необходимо, чтобы используемые функции $\{\phi_k\}_n$ входили в систему $\{\phi_k\}$, которая является ортонормированным (или ортогональным) базисом в H . Для того, чтобы гарантировать, что норма невязки (7.1) при $n \rightarrow \infty$ стремится к нулю, можно потребовать выполнение некоторых дополнительных условий.

3. Базисные функции ϕ_k должны принадлежать области определения $D(A)$ оператора A , так как для нахождения коэффициентов c_k в (7.3) необходимо предварительно вычислить значения скалярного произведения $(A\phi_n, \phi_k)$, а это возможно лишь при выполнении сформулированного требования.

Тогда (7.4) сводится к системе алгебраических уравнений относительно коэффициентов c_n :

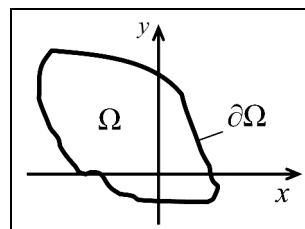
$$\sum_{n=1}^N (Au_n, \phi_k) c_n = (f, \phi_k), \quad k = 1, \dots, n. \quad (7.5)$$

Выражение (5) в матричной форме имеет вид

$$AC=B, \quad (7.6)$$

где элементы A и B определяются по формулам $a_{nk} = (A\phi_n, \phi_k)$, $b_{nk} = (f, \phi_k)$. На данном этапе основную трудность представляет расчет элементов матриц системы. Использование вейвлетов в качестве базисных функций уменьшает усилия, требуемые для вычисления этих элементов. В основном это обусловлено свойствами локализации, как в пространственной, так и в частотной области, ортонормированности, нулевыми моментами, алгоритму БВП Мала [1, 4–6]. Использование этих преимуществ позволяет представить скалярные произведения в виде стандартного набора коэффициентов, зависящих от вида вейвлет-системы, связывающих производные базисных функций и сами функции. Они называются *коэффициентами связи* (КС) [57]. Основные затруднения, возникающие при таком выборе базиса, связаны с учетом геометрии объекта и краевых условий, так как вейвлеты ортонормированны во всем пространстве L_2 . Однако эти трудности позволяет устранить теория R-функций [4, 5]. Новый подход приближенного решения краевых задач на основе метода Галеркина (Галеркина – Петрова), вейвлетов и R-функций требует решения следующих вопросов:

- 1) разработка и обоснование алгоритмов, позволяющих точно определять значения КС;
- 2) синтез КС для различных систем вейвлетов с разным количеством базисных функций;
- 3) разработка нового метода вейвлет-Галеркина решения краевых задач эллиптического типа с использованием теории R-функций;
- 4) построение алгоритмов численной реализации для решения краевых задач.



Модификация метода Галеркина на основе вейвлетов и R-функций.

Рис. 11. Область произвольной формы

Пусть в некоторой области произвольной формы $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ требуется найти решение дифференциального уравнения (7.1) с заданными краевыми условиями (7.2)

на участках $\partial\Omega_i$ границы $\partial\Omega$. Решение (7.1), (7.2) будем рассматривать для двумерного случая ($\Omega \subset \mathbb{R}^2$).

Тогда вейвлет-базис представляет собой тензорное произведение одномерных масштабирующих функций $\varphi(x)$, а пространство, образованное сдвигами $\varphi(x)$ при масштабе j [57], определяется как $X_j = V_j \otimes V_j$. Оно является линейной оболочкой для $\varphi_{jk}(x)\varphi_{jl}(y)$, $k, l \in \mathbb{Z}$.

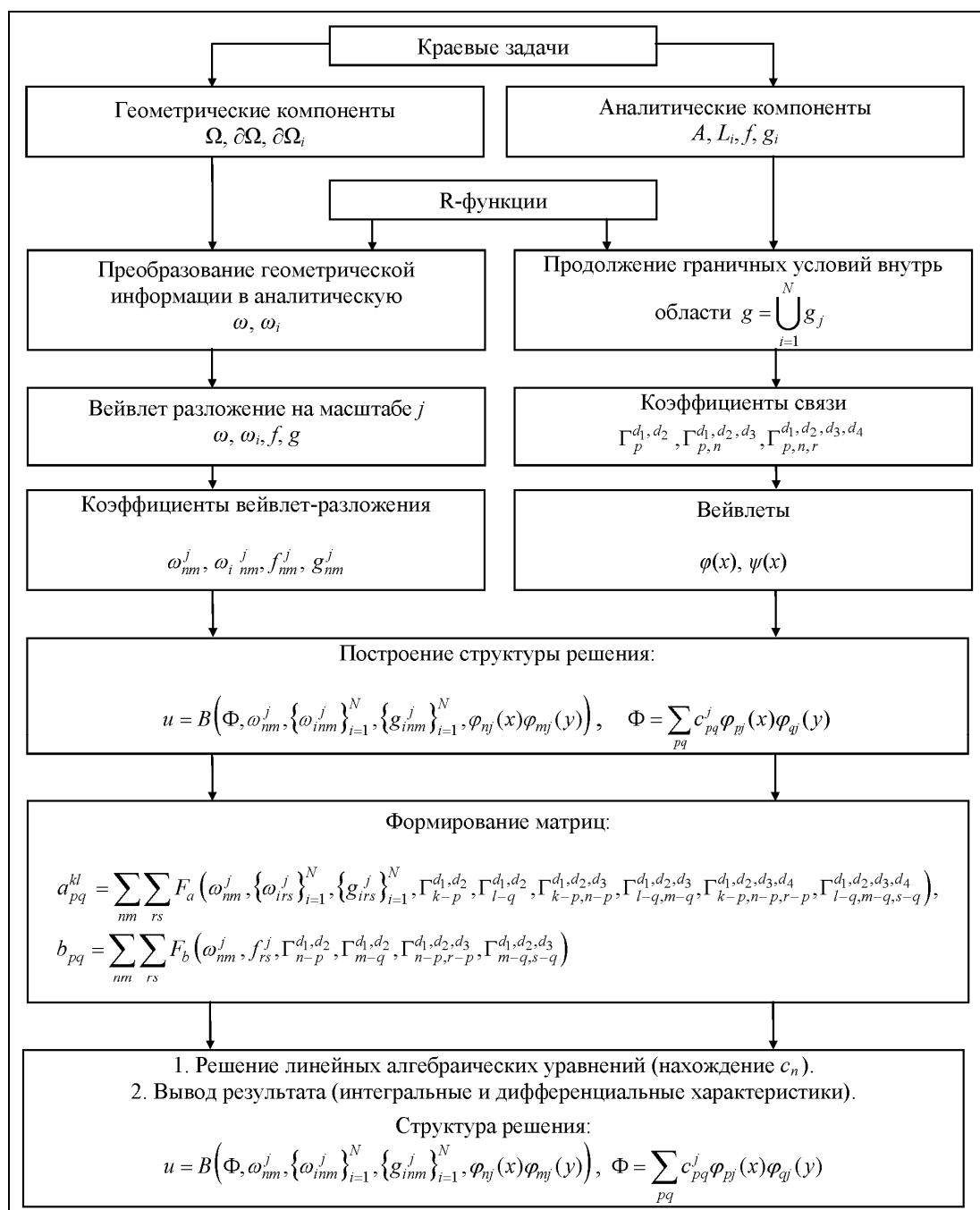


Рис. 12. Структурная схема связи теории R-функций и вейвлетов

Следовательно, разложение функции двух переменных $f(x,y)$ при разрешении j имеет вид

$$f^j(x,y) = \sum_{k,l} f_{kl}^j \varphi_{jk}(x) \varphi_{jl}(y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f_{kl}^j = (f(x,y), \varphi_{jk}(x) \varphi_{jl}(y)). \quad (7.7)$$

Таким образом, согласно теории вейвлетов [17–20, 57], $f^j(x,y) \rightarrow f(x,y)$ при $j \rightarrow \infty$. Выделим следующие ключевые моменты нового [57] метода:

продолжение граничных условий внутрь области Ω в виде функции $\chi_0(x,y)$ $L_i \chi_0|_{\partial\Omega_i} = g_i$;

представление геометрической информации краевой задачи на основе построения функций области $\omega(x,y)$, $\omega_i(x,y)$ с помощью теории R-функций;

выбор вейвлетов в качестве базисных и проекционных функций;

представление $f(x,y)$, $\chi_0(x,y)$, $\omega(x,y)$, $\omega_i(x,y)$ в виде разложения (7.7);

применение метода Галеркина для решения (7.1), (7.2).

Структуры решения на основе вейвлетов. Рассмотрим применение вейвлетов в качестве основного элемента структур решения. Эти функции не удовлетворяют дифференциальному уравнению (7.1), а тем более не являются собственными функциями оператора A задачи (7.1), (7.2). Однако, благодаря свойствам локализации как в пространственной, так и в частотной области, нулевым моментам, быстрым алгоритмам определения коэффициентов разложения и коэффициентов связи, вейвлеты являются мощным и универсальным математическим аппаратом для разработки нового подхода решения краевых задач с помощью метода R-функций, который основан на аппроксимации структуры решения вейвлетами. В общем случае это можно представить в виде структурной схемы, представленной на рис. 12.

Заключение. В обзоре были рассмотрены некоторые из приложений, в которых нашли применение теории АФ, WA-систем функций и R-функций в современных проблемах радиофизики и техники. Основное внимание было сосредоточено на приложениях АФ к цифровой обработке сигналов, восстановлению изображений, задачам анализа и синтеза антенн, теории вероятности, краевым задачам математической физики.

Литература

1. Рвачев В. Л., Рвачев В. А. Об одной финитной функции // ДАН УССР. Сер. А. 1971. С. 705–707.
2. Рвачев В. Л., Рвачев В. А. Атомарные функции в математической физике // Математизация знаний и научно-технический прогресс. Киев: Наукова думка. 1975. С. 188–199.
3. Рвачев В. А. О приближении с помощью функции $\text{up}(x)$ // ДАН СССР. 1977. Т. 233. № 2. С. 295–296.
4. Рвачев В. Л., Рвачев В. А. Неклассические методы теории приближений в краевых задачах. Киев: Наукова думка. 1979.
5. Рвачев В. Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. Киев: Наукова думка. 1982.
6. Рвачев В. А. Финитные решения функционально-дифференциальных уравнений и их применения // Успехи математических наук. 1990. Т. 45. Вып. 1 (271). С. 77–103.
7. Kravchenko, V. F., Rvachev, V. L., and Rvachev, V. A., Mathematical Methods for Signal Processing Based on Atomic Functions // J. of Communication Technology and Electronics. 1995. V. 40(12). P. 118–137.
8. Кравченко В. Ф. Аппроксимация диаграммы направленности и синтез линейного излучателя на основе атомарных функций // Зарубежная радиоэлектроника. Успехи современной радиоэлектроники. 1996. № 8. С. 23–28.
9. Resnikoff, H. L. and Wells, R. O., Wavelet analysis: the scalable structure of information. New York: Springer. 1998.
10. Zelkin, E. G. and Kravchenko, V. F., Atomic Functions in Antenna Synthesis Problems and New Windows // Review, J. of Communications Technology and Electronics. 2001. V. 46. № 8. P. 829–857. (Translated from Radiotekhnika and Electronica. 2001. V. 46. № 8. P. 903–931.)
11. Кравченко В. Ф. Лекции по теории атомарных функций и некоторым их приложениям. М.: Радиотехника. 2003.
12. Басараб М. А., Кравченко В. Ф. Булева алгебра и методы аппроксимации в краевых задачах электродинамики / под ред. В. Ф. Кравченко. М.: Физматлит. 2004.
13. Гуляев Ю. В., Кравченко В. Ф., Кураев А. А. Усилители на основе эффекта Вавилова–Черенкова с нерегулярными электродинамическими структурами // Успехи физических наук. 2004. Т. 174. № 6. С. 639–655.
14. Басараб М. А., Кравченко В. Ф., Матвеев В. А. Математическое моделирование физических процессов в гироскопии. М.: Радиотехника. 2005.
15. Зелкин Е. Г., Кравченко В. Ф., Гусевский В. И. Конструктивные методы аппроксимации в теории антенн. М.: САЙНС-ПРЕСС. 2005.
16. Кравченко В. Ф., Рвачев В. Л. Алгебра логики, атомарные функции и вейвлеты в физических приложениях. М.: Физматлит. 2006.
17. Цифровая обработка сигналов и изображений в радиофизических приложениях / под ред. В. Ф. Кравченко. М.: Физматлит. 2007.
18. Гуляев Ю. В., Кравченко В. Ф., Пустовойт В. И. Новый класс WA-систем функций Кравченко–Рвачева // ДАН РАН. 2007. Т. 413. № 3. С. 320–328.
19. Гуляев Ю. В., Кравченко В. Ф., Пустовойт В. И. Аналитические вейвлеты Кравченко–Котельникова в цифровой обработке сигналов // ДАН РАН. 2007. Т. 417. № 4. С. 476–482.

20. *Kravchenko, V. F., Volosyuk, V. K., and Pavlikov, V. V.*, Digital Signal Processing and Atomic Functions in Synthetic Aperture Radar // Telecommunications and Radio Engineering. 2007. № 66(16). P. 1441–1452.
21. *Колодяжный В. М., Рвачев В. А.* Атомарные функции. Обобщения на случай многих переменных и перспективные направления практических приложений // Кибернетика и системный анализ. 2007. № 6. С. 155–177.
22. *Kravchenko, V. F. and Smirnov, D. V.*, The form optimization of the ultrashort pulsed signals on basis of atomic functions // Proc. 6th Int. Kharkov Symposium on physics and engineering of microwaves, millimeter and submillimeter waves and workshop on terahertz technologies. Kharkov, Ukraine, June 25–30. Symposium Proceedings. V. 2. P. 971–973.
23. *Kravchenko, V. F., Kravchenko, O. V., and Yurin, A. V.*, The contour analysis of low-sized complex-shaped objects based on R-functions, atomic functions and wavelets // Proc. 6th Int. Kharkov Symposium on physics and engineering of microwaves, millimeter and submillimeter waves and workshop on terahertz technologies. Kharkov, Ukraine, June 25–30. Symposium Proceedings. 2007. V. 2. P. 974–976.
24. *Chernogor, L. F., Kravchenko, V. F., and Lazorenko, O. V.*, Analytical Kravchenko–Rvachev wavelets based on the atomic functions // Proc. 6th Int. Kharkov Symposium on physics and engineering of microwaves, millimeter and submillimeter waves and workshop on terahertz technologies. Kharkov, Ukraine. June 25–30. Symposium Proceedings. 2007. V. 2. P. 983–985.
25. *Kravchenko, V. F., Volosyuk, V. K., and Pavlikov, V. V.*, The Family of Atomic Function and Digital Signal Processing in Synthetic Aperture Radar // Proc. 6th Int. Conf. on Antenna Theory and Techniques, Sevastopol, Ukraine, 17–21 September. 2007. P. 20–25.
26. *Волосюк В. К., Кравченко В. Ф.* Статистическая теория радиотехнических систем дистанционного зондирования и радиолокации / под ред. В. Ф. Кравченко. М.: Физматлит. 2008.
27. *Басараб М. А., Кравченко В. Ф., Матвеев В. А.* Методы моделирования и цифровой обработки сигналов в гироскопии. М.: Физматлит. 2008.
28. *Матвеев В. А., Лунин Б. С., Басараб М. А.* Навигационные системы на волновых твердотельных гироскопах. М.: Физматлит. 2008.
29. Вычислительные методы в современной радиофизике / под ред. В. Ф. Кравченко. М.: Физматлит. 2009.
30. *Кравченко В. Ф., Юрин А. В.* Особенности численного дифференцирования функций одной и двух переменных на основе нового класса вейвлетов // Электромагнитные волны и электронные системы. 2008. Т. 13. № 8. С. 12–30.
31. *Кравченко В. Ф., Юрин А. В.* Новый класс вейвлет-функций в цифровой обработке сигналов и изображений // Успехи современной радиоэлектроники. 2008. № 5. С. 3–64.
32. *Кравченко В. Ф., Чуриков Д. В.* Атомарные функции $h_a(x)$ и новые ортогональные вейвлеты на их основе // Успехи современной радиоэлектроники. 2008. № 6. С. 67–88.
33. *Кравченко В. Ф., Чуриков Д. В.* Цифровая обработка и спектральное оценивание сверхширокополосных сигналов атомарными функциями и вейвлетами // Успехи современной радиоэлектроники. 2008. № 8. С. 39–46.
34. *Волосюк В. К., Кравченко В. Ф., Павликов В. В.* Весовые функции Кравченко–Рвачева в задачах построения радиолокационных изображений при синтезировании апертуры антенны // Антенны. 2008. Вып. 2(129). С. 48–60.
35. *Кравченко В. Ф., Чуриков Д. В.* Новые алгоритмы пространственно-временной цифровой обработки сигналов в антенных системах // Антенны. 2008. Вып. 4(131). С. 47–54.
36. *Kravchenko, V. F., Ponomaryov, V. I., and Sanchez-Ramirez, J. L.*, Properties of different wavelet filters used for ultrasound and mammography compression // Telecommunications and radio engineering. Begell House Edit. 2008. V. 87. № 10. P. 853–865.
37. *Кравченко В. Ф., Сафин А. Р.* Атомарные функции и N -мерная теорема Уиттекера–Котельникова–Шеннона // Электромагнитные волны и электронные системы. 2008. Т. 13. № 12. С. 31–44.
38. *Kravchenko, V. F. and Churikov, D. V.*, Kravchenko-Kotelnikov-Wigner Distributions in Radio Physical Applications // Proc. Int. conference “DAYS on DIFFRACTION”. St.Petersburg, Russia. June 3–6. 2008. P. 87–88.
39. *Kravchenko, V.F. and Churikov, D. V.*, Kravchenko-Kotelnikov-Levitan-Wigner Distributions in Radio Physical Applications // Proc. Int. Conference “DAYS on DIFFRACTION”. St. Petersburg, Russia. June 3–6. 2008. P. 79–84.
40. *Kravchenko, V. F. and Churikov, D. V.*, Spectral Estimation and Digital UWB Signal Processing by Atomic Functions and Wavelets // The Fourth International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals, 15–19 September. 2008. Sevastopol, Ukraine. 2008. P. 27–33.
41. *Kravchenko, V. F. and Churikov, D. V.*, Constructing of New Kravchenko Wavelets on Basis of Atomic Functions $h_a(t)$ // Proceedings 10th International Conference and exhibition on Digital Signal Processing and Its Applications. March 26–28. 2008. Moscow. Russia. 2008. V. 1. P. 153–156.
42. *Volosyuk, V. K., Kravchenko, V. F., and Pavlikov, V. V.*, The Contrast ratio Estimation for Subsurface Objects Discrimination Caused by Interfering Surface Background Reflection // Proceedings 10th International Conference and exhibition on Digital Signal Processing and Its Applications. March 26–28. 2008. Moscow. Russia. 2008. V. 2. P. 438–441.
43. *Vagin, V. A., Kravchenko, V. F., Pustovoyt, V. I., and Hitrov, O. V.*, Kravchenko–Kotelnikov–Levitan Weight Functions in the Phase Correction Method of Forman // Proceedings 10th International Conference and exhibition on Digital Signal Processing and Its Applications. March 26–28. 2008. Moscow. Russia. 2008. V. 2. P. 576–577.
44. *Кравченко В. Ф., Чуриков Д. В.* Пространственно-временное преобразование радиолокационных сигналов на основе ортогональных вейвлетов Кравченко // Труды 63-й Научной сессии, посвященной Дню радио. Москва. 2008. С. 58–60.
45. *Кравченко В. Ф., Юрин А. В.* Построение ортонормированного базиса на основе атомарных функций и его применение к решению краевых задач объектов сложной формы // Труды 63-й Научной сессии, посвященной Дню радио. Москва. 2008. С. 60–63.
46. *Вагин В. А., Кравченко В. Ф., Пустовойт В. И., Хитров О. В.* Функции аподизации Кравченко–Котельникова при восстановлении спектра методом Формана // Труды 63-й Научной сессии, посвященной Дню радио. Москва. 2008. С. 68–69.
47. *Kravchenko, V. F. and Churikov, D. V.*, A new Class of Orthogonal Kravchenko Wavelets // Proceedings of International Conference RVK08 and MMWP08. Växjö, Sweden. June 9–13. 2008. P. 39–43.
48. *Кравченко В. Ф.* Теорема Уиттекера–Котельникова–Шеннона и атомарные функции в современной радиофизике (Обзор). // Труды 16-й Междунар. конф. «Радиолокация и радиосвязь». ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН. МЭИ (Технический университет), Москва–Фирсановка. 11–16 ноября 2008. С. 463–485.
49. *Кравченко В. Ф., Сафин А. Р.* Обобщение N -мерной теоремы Уиттекера–Котельникова–Шеннона на основе атомарных функций // Труды 16-й Междунар. конф. «Радиолокация и радиосвязь». ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН. МЭИ (Технический университет), Москва–Фирсановка. 11–16 ноября 2008. С. 486–489.

50. *Кравченко В. Ф., Чуриков Д. В.* Синтез двумерных весовых функций (окон) на основе атомарных и R-функций в радиолокации // Труды 16-й Междунар. конф. «Радиолокация и радиосвязь». ИПЭ им. В. А. Котельникова РАН. МЭИ (Технический университет), Москва–Фирсановка. 11–16 ноября 2008. С. 490–494.
51. *Котельников В. А.* О пропускной способности «эфира» и проволоки в электросвязи // Собрание трудов. Т1. Радиоп физика. Информатика, телекоммуникации. М.: Физматлит. 2008. С. 90–108. 9–22.
52. *Kravchenko, V. F., Perez-Meana, H. M., and Ponomaryov, V. I.*, Adaptive Digital Processing of Multidimensional Signals with Applications. Moscow. Fizmatlit. 2009.
53. *Лазоренко О. В., Черногор Л. Ф.* Сверхширокополосные сигналы и процессы. Харьков: ХНУ им. Каразина. 2009.
54. *Кравченко В. Ф., Лабунько О. С., Лерер А. М., Синявский Г. П.* Вычислительные методы в современной радиоп физике / под ред. В. Ф. Кравченко. М.: Физматлит. 2009.
55. *Kravchenko V. F. and Pustovoit V. I.*, New System of Kravchenko Orthogonal Wavelets $\{\widehat{up}(t)\}$ // Doklady Mathematics, 2009. V. 8, № 2. P. 775–780.
56. *Kravchenko, V. F. and Yurin, A. V.*, The Selection of Basis Functions Systems for Determination of Cutoff Frequency of Waveguides and Resonators of Complex Shape with the Help of R-functions Method // Mathematical Modeling of Wave Phenomena, 3rd Conference on Mathematical Modeling of Wave Phenomena and 20th Nordic Conference on Radio Science and Communications, Växjö, Sweden, June 9–13. 2008. American Institute of Physics Conference Proceedings. 2009. V. 1106. P. 18–25.
57. *Кравченко В. Ф., Юрин А. В.* Применение теории R-функций и вейвлетов к решению краевых задач эллиптического типа // Электромагнитные волны и электронные системы. 2009. Т. 14. № 3. С. 4–39.
58. *Kravchenko, V. F., Kravchenko, O. V., and Safin, A. R.*, Kravchenko–Rvachev atomic distributions in diffraction theory // Proc. Int. conference “DAYS on DIFFRACTION”. St. Petersburg. Russia. 2009. V. 55. P. 26–29.
59. *Кравченко В. Ф., Чуриков Д. В.* Синтез двумерных цифровых фильтров с нестандартной геометрией опорной области // Успехи современной радиоэлектроники. 2009. № 5. С. 3–12.
60. *Кравченко В. Ф., Кравченко О. В., Сафин А. Р.* Атомарные функции в теории вероятностей и случайных процессов // Успехи современной радиоэлектроники. 2009. № 5. С. 23–38.
61. *Kravchenko, V. F., and Churikov, D. V.*, A new class of orthogonal Kravchenko WA-system functions $\{\widehat{h}_a(t)\}$ // Telecommunications and Radio Engineering. 2009. V. 68. № 8. P. 649–666.
62. *Gomeztagle, F., Kravchenko, V. F., and Ponomaryov V. I.*, Super-Resolution method based on wavelet atomic functions in images and video Sequences // Telecommunications and Radio Engineering. 2009. V. 68. № 9. P. 747–761.
63. *Kravchenko, V. F., and Safin, A. R.*, Generalized Kravchenko–Fourier Transforms Based On The Atomic Functions // Proc. 11th Int. Conf. and exhibition on Digital Signal Processing and Its Applications, March 25–27. 2009. Moscow. Russia. V. 1. P. 135–137.
64. *Kravchenko, V. F. and Churikov, D. V.*, Atomic and R- functions in the synthesis of two-dimensional fir filters // Proc. 11th Int. Conf. and exhibition on Digital Signal Processing and Its Applications, March 25–27. 2009. Moscow. Russia. V. 1. P. 141–144.
65. *Gomeztagle, F., Kravchenko, V., and Ponomaryov, V.*, Super-Resolution Procedures in Images and Video Sequences Applying Wavelet Atomic Functions // Proc. of the 20th IASTED Int. Conf. on Modelling and Simulation, held July 6 – 8. 2009. In Banff, Alberta, Canada. P. 187–189.
66. *Kravchenko, V., Meana, H. P., Ponomaryov, V., and Churikov, D.*, Spectral Estimation of Digital Signals by the Orthogonal Kravchenko Wavelets $\{\widehat{h}_a(t)\}$ // Progress in Pattern Recognition, Image Analysis, Computer Vision, and Applications. Edited by Eduardo Bayro-Corrochano, Jan-Olof Eklundh. Proc. of 14th Iberoamerican Conference on Pattern Recognition, CIARP2009, Guadalajara, Jalisco, Mexico, November 15–18. 2009. Springer-Verlag. Berlin. Heidelberg. P. 989–996.
67. *Kravchenko V. F. and Yurin, A. V.*, The Selection of Basis Functions Systems for Determination of Cutoff Frequency of Waveguides and Resonators of Complex Shape with the Help of R-functions Method // Mathematical Modeling of Wave Phenomena, 3rd Conference on Mathematical Modeling of Wave Phenomena and 20th Nordic Conference on Radio Science and Communications, Växjö, Sweden, June 9–13, 2008, American Institute of Physics Conference Proceedings. V. 1106. P. 18–25.
68. *Кравченко В. Ф.* Атомарные функции: Теория и применение // Труды Междунар. науч. конф. «Излучение и рассеяние электромагнитных волн» ИРЭМВ-2009. 27 июня – 1 июля 2009. Таганрог–Дивноморское. ТТИ ЮФУ. С. 24–33.
69. *Кравченко В. Ф., Чуриков Д. В.* Обобщенная теорема Кравченко–Котельникова в задачах Корреляционной обработки информации // Труды Междунар. науч. конф. «Излучение и рассеяние электромагнитных волн» ИРЭМВ-2009. 27 июня – 1 июля 2009. Таганрог–Дивноморское. ТТИ ЮФУ. С. 431–433.
70. *Кравченко В. Ф., Кравченко О. В., Сафин А. Р.* Применение обобщенной теоремы Кравченко–Котельникова к аналогово-цифровым преобразователям // Труды Междунар. науч. конф. «Излучение и рассеяние электромагнитных волн» ИРЭМВ-2009. 27 июня – 1 июля 2009. Таганрог–Дивноморское. ТТИ ЮФУ. С. 392–396.
71. *Кравченко В. Ф., Кравченко О. В., Сафин А. Р.* Дискретизация двумерных сигналов на основе атомарных и R-функций // Труды Междунар. науч. конф. «Излучение и рассеяние электромагнитных волн» ИРЭМВ-2009. 27 июня – 1 июля 2009. Таганрог–Дивноморское. ТТИ ЮФУ. С. 397–400.
72. *Kravchenko, V. F., Kravchenko, O. V., and Safin, A. R.*, Nongaussian Kravchenko–Rvachev Distributions in Radio Physical Applications // Proc. Progress in Electromagnetics Research Symposium, August 18–21. 2009. Moscow, RUSSIA. The Electromagnetics Academy. P. 237–240.
73. *Kravchenko, V. F. and Churikov, D. V.*, The Theory of Spectral Estimation of Signals and Generalized Kravchenko–Kotel’nikov–Levitan Theorems // Proc. Progress in Electromagnetics Research Symposium, August 18–21. 2009. Moscow. RUSSIA. The Electromagnetics Academy. P. 241–244.
74. *Kravchenko V. F. and Yurin A. V.*, The Theory of R-functions and Wavelets in the Boundary Value Problems of Electrodynamics // Proc. Progress in Electromagnetics Research Symposium, August 18–21. 2009. Moscow. RUSSIA. The Electromagnetics Academy. P. 1388–1392.
75. *Churikov, D. V.*, Application of the Theory of R-functions to the Analysis and Synthesis of Multidimensional Signals // Proc. Progress in Electromagnetics Research Symposium, August 18–21. 2009. Moscow. RUSSIA. The Electromagnetics Academy. P. 245–248.
76. *Churikov, D. V.*, Construction of New Kravchenko–Kotel’nikov–Chebyshev–Legendre Spectral Kernels and Their Application in Digital Multidimensional Signals Processing. Proc. Progress in Electromagnetics Research Symposium, August 18–21. 2009. Moscow. RUSSIA. The Electromagnetics Academy. P. 251–254.

77. *Kravchenko, O. V. and Safin, A. R.*, An Application Generalized Kravchenko-Kotel'nikov Theorem on Atomic Functions $fup_N(t)$ to Interpolation Nonstationary Random Processes // Proc. Progress in Electromagnetics Research Symposium, August 18–21. 2009. Moscow. RUSSIA. The Electromagnetics Academy. P. 249–250.
78. *Kravchenko, O. V. and Safin, A. R.*, Atomic Functions in Problems of Analysis and Synthesis of Optimal Discrete Receivers // Draft Abstracts Progress in Electromagnetics Research Symposium, August 18–21. 2009. Moscow. RUSSIA. The Electromagnetics Academy. P. 128.
79. *Kravchenko, V. F.*, Atomic and R-functions in Radiophysical Applications. Review // Proc. International Conference on Antenna Theory and Techniques, 6–9 October, 2009. Lviv. Ukraine. P. 3–12.
80. *Kravchenko, V. F., Kravchenko, O. V., and Safin, A. R.*, Synthesis of 2D Directional Diagrams of Antennas with Arbitrary Aperture based on Atomic and R-functions // Proc. International Conference on Antenna Theory and Techniques, 6–9 October, 2009. Lviv. Ukraine. P. 63–65.
81. *Kravchenko, V. F., Kravchenko, O. V., and Safin, A. R.*, Kravchenko–Rvachev Probability Distribution in the Problems of Analysis and Synthesis for Linear Arrays // Proc. International Conference on Antenna Theory and Techniques, 6–9 October. 2009. Lviv. Ukraine. P. 66–69.
82. *Кравченко В. Ф., Кравченко О. В., Сафин А. Р., Чуриков Д. В.* Применение новых вероятностных весовых функций в цифровой обработке сигналов // Труды Российского научно-технического общества радиотехники, электроники и связи им. А. С. Попова. Сер. Акустооптические и радиолокационные методы измерений и обработки информации. Вып. III. 3-я Междунар. конф. 22–24 сентября 2009. Суздаль. Россия. С. 9–17.
83. *Кравченко В. Ф., Кравченко О. В., Сафин А. Р.* Характеристические и атомарные функции в теории случайных процессов // Труды Российского научно-технического общества радиотехники, электроники и связи им. А. С. Попова. Сер. Акустооптические и радиолокационные методы измерений и обработки информации. Вып. III. 3-й Междунар. конф. 22–24 сентября 2009. Суздаль. Россия. С. 179–182.
84. *Кравченко В. Ф., Кравченко О. В., Сафин А. Р.* Теория R-функций и дискретизация 2D непрерывных сигналов // Труды Российского научно-технического общества радиотехники, электроники и связи им. А. С. Попова. Сер. Акустооптические и радиолокационные методы измерений и обработки информации. Вып. III. 3-я Междунар. конф. 22–24 сентября, 2009. Суздаль. Россия. С. 182–184.
85. *Кравченко В. Ф., Чуриков Д. В.* Спектральная оценка двумерных сигналов на основе ядер обобщенного ряда Кравченко–Котельникова // Труды Российского научно-технического общества радиотехники, электроники и связи им. А. С. Попова. Сер. Акустооптические и радиолокационные методы измерений и обработки информации. Вып. III. 3-я Междунар. конф., 22–24 сентября, 2009. Суздаль. Россия. С. 214–216.
86. *Gomeztagle, F., Kravchenko, V., and Ponomaryov, V.*, Super-Resolution Procedures in Images and Video Sequences Applying Wavelet Atomic Functions // Proceedings of the 20th IASTED International Conference on Modelling and Simulation. Held July 6 – 8. 2009 in Banff, Alberta. Canada. P. 187–189.
87. *Кравченко В. Ф., Чуриков Д. В.* Новые методы корреляционной обработки радиолокационных сигналов семейством атомарных функций. Пленарный доклад // Труды 3 международной конференции «Радиолокация и радиосвязь». ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН. 26 – 30 октября 2009. Т. 1. С. 3–16.
88. *Кравченко В. Ф., Кравченко О. В., Сафин А. Р.* Применение теоремы Кравченко–Котельникова к интерполяции случайных процессов // Труды 3-й Междунар. конф. «Радиолокация и радиосвязь». ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН. 26 – 30 октября 2009. Т. 2. С. 180–183.
89. *Кравченко В. Ф., Чуриков Д. В.* Цифровая обработка широкополосных сигналов атомарными функциями в антенной технике // Труды 3-й Междунар. конф. «Радиолокация и радиосвязь». ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН. 26 – 30 октября 2009. Т. 2. С. 198–201.
90. *Кравченко В. Ф., Кравченко О. В., Сафин А. Р.* Булева алгебра и атомарные функции в задачах синтеза антенн // Труды 3-й Междунар. конф. «Радиолокация и радиосвязь». ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН. 26 – 30 октября 2009. Т. 2. С. 234–239.
91. *Кравченко В. Ф., Кравченко О. В., Сафин А. Р.* Применение атомарной функции $ur(x)$ к задачам синтеза антенн // Электромагнитные волны и электронные системы. 2010. Т. 15. № 2. С. 27–32.
92. *Кравченко В. Ф., Кравченко О. В., Сафин А. Р.* Атомарные функции и системы фазовой синхронизации с выборками // Электромагнитные волны и электронные системы. 2010. Т. 15. № 7. С. 41–55.
93. *Кравченко В. Ф., Чуриков Д. В.* Анализ временных рядов комплексными WA-системами функций Кравченко // Электромагнитные волны и электронные системы. 2010. Т. 15. № 7. С. 3–17.
94. *Волосюк В. К., Кравченко В. Ф., Павликов В. В.* Весовые функции Кравченко в задачах восстановления радиолокационных изображений при модифицированном синтезе апертуры // Электромагнитные волны и электронные системы. 2010. Т. 15. № 8. С. 33–43.
95. *Kravchenko, V. F. and Koshelev, A. Y.*, New Complex Wavelets Family Based On Atomic Functions // Telecommunications and Radio Engineering, 2010. V. 69(4). P. 305–325.
96. *Кравченко В. Ф., Кравченко О. В., Сафин А. Р.* Новый комбинированный метод теоретико-числовых преобразований в сочетании с весовыми функциями (окнами) // Труды 12-й Междунар. конф. и выставки «Цифровая обработка сигналов и ее применение». Москва. 2010. Т. 1. С. 131–133.
97. *Кравченко В. Ф., Чуриков Д. В.* Модифицированные спектральные ядра Наги в цифровой обработке сигналов // Труды 12-й Междунар. конф. и выставки Цифровая обработка сигналов и ее применение. Москва. 2010. Т. 1. С. 145–148.
98. *Кравченко В. Ф., Кравченко О. В., Сафин А. Р.* Преобразователь гильберта на основе атомарных функций // Труды 65-й Научной сессии, посвященной Дню радио. Москва. 2010. С. 47–49.
99. *Кравченко В. Ф., Кравченко О. В., Сафин А. Р.* Атомарные функции и уравнение Шредингера в квантовой механике // Труды 65-й Научной сессии, посвященной Дню радио. Москва. 2010. С. 49–51.
100. *Kravchenko, V. F. and Churikov, D. V.*, Radial Atomic Functions in Digital Signal Processing // Proc. Int. conference «DAYS on DIFFRACTION». St. Petersburg. Russia. June 8–11. 2010. P. 99–101.
101. *Kravchenko, V. F. and Churikov, D. V.*, New analytical WA-systems of Kravchenko functions // Proc. Int. conference «DAYS on DIFFRACTION». St. Petersburg. Russia. June 8–11. 2010. P. 93–98.
102. *Kravchenko, V. F., Kravchenko, O. V., and Safin, A. R.*, Atomic and R-functions in p-adic analysis theory // Programm of Int. conference «DAYS on DIFFRACTION». St. Petersburg. Russia. June 8–11. 2010. P. 50.

103. *Kravchenko, V. F., Kravchenko, O. V., and Safin, A. R.*, Atomic functions and spectral operators theory in quantum scattering problems // Program of Int. conference «DAYS on DIFFRACTION». St. Petersburg. Russia. June 8–11. 2010. P. 50–51.
104. *Kravchenko, V. F., Kravchenko, O. V., and Safin, A. R.*, Generalized Kravchenko-Kotel'nikov Sampling Theorem for Interpolation of Signals with Complex Shape // Proceedings of 2010 International Kharkov Symposium on Physics and Engineering of Microwaves, Millimeter and Submillimeter Waves, Session H: R-functions, Atomic Functions, Wavelets, Fractals. 2010. H-5.
105. *Kravchenko, V. F., Kravchenko, O. V., and Safin, A. R.*, A New Construction of Solution of Schrodinger Equation on the Basis of Atomic Functions // Proceedings of 2010 International Kharkov Symposium on Physics and Engineering of Microwaves, Millimeter and Submillimeter Waves, Session H: R-functions, Atomic Functions, Wavelets, Fractals. 2010. H-6.
106. *Kapranov, M. V., Kravchenko, V. F., Kravchenko, O. V., and Safin, A. R.*, Atomic Functions, Phase Locked Loops with Samples and Arnold Tongues // Proceedings of 2010 International Kharkov Symposium on Physics and Engineering of Microwaves, Millimeter and Submillimeter Waves, Session H: R-functions, Atomic Functions, Wavelets, Fractals. 2010. H-7.
107. *Kravchenko, V. F. and Churikov, D. V.*, Modified Nagy Kernels in Digital UWB Signal Processing // Proc. of 2010 Int. Kharkov Symposium on Physics and Engineering of Microwaves, Millimeter and Submillimeter Waves, Session H: R-functions, Atomic Functions, Wavelets, Fractals. 2010. H-10.
108. *Kravchenko, V. F., Kravchenko, O. V., and Safin, A. R.*, Spectral Theory Analysis of UWB-oscillations in Frequency Synthesizers Based on Phase-Locked Loops, Invited Paper // Proc. Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals, 6–10 September, 2010. Sevastopol. Ukraine. P. 22–29.
109. *Kravchenko, V. F. and Churikov, D. V.*, New Kravchenko Transforms and Digital UWB Signal Processing // Proc. Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals. 6–10 September, 2010. Sevastopol. Ukraine. P. 54–58.
110. *Kravchenko, V. F. and Churikov, D. V.*, Atomic Distributions in SAR Problems // Proc. Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals. 6–10 September, 2010. Sevastopol. Ukraine. P. 59–61.
111. *Kravchenko, V. F. and Churikov, D. V.*, Correlation Radar Signal Processing on Basis of Probability Kravchenko Weight Functions // Proceedings of IEEE 10th International Conference on Signal Processing Proceedings (ICSP'10). October 24 – 28, 2010. Taiyangdao. Hotel Beijing. China. P. 1906–1909.
112. *Kravchenko, V. F., Churikov, D. V., and Yurin A. V.*, Analytical Description of Complex Shape Locus with the Help of R-Operations and Atomic Functions // The Digital Signal and Image Processing. Telecommunications and Radio Engineering. 2011. V. 70(4). P. 283–323.
113. *Кравченко В. Ф., Пустовойт В. И., Чуриков Д. В.* Аналитические двумерные WA-системы функций Кравченко–Рвачева и их физические свойства // ДАН РАН. 2011. Т. 439. № 3.
114. *Kravchenko, V. F. and Churikov, D. V.*, Two-dimensional analytical Kravchenko-Rvachev wavelets in digital signal and image processing // Program of Int. conference «DAYS on DIFFRACTION». St. Petersburg. Russia. 30 May – 3 June. 2011. P. 64–65.
115. *Kravchenko, V. F. and Churikov, D. V.*, Atomic functions in nonparametric estimations of probability density functions and their derivatives // Proc. Int. conference «DAYS on DIFFRACTION». St. Petersburg. Russia. 30 May – 3 June. 2011.
116. *Kravchenko, V. F. and Churikov, D. V.*, Two-dimensional analytical Kravchenko-Rvachev wavelets in digital signal and image processing // Proc. Int. conference «DAYS on DIFFRACTION». St. Petersburg. Russia. 30 May – 3 June. 2011.
117. *Kravchenko, V. F. and Churikov, D. V.*, New constructions of complex orthogonal Kravchenko wavelets // Program of Int. Conference «DAYS on DIFFRACTION». St. Petersburg. Russia. 30 May – 3 June. 2011. P. 65–66.
118. *Ponamaryov, V., Supelveda, F. G., and Kravchenko, V.*, Resolution Enhancement Based on Wavelet Atomic Functions // Proc. 17th International Conference on Digital Signal Processing. Corfu. Greece. 6–8 July 2011.
119. *Кравченко В. Ф., Пустовойт В. И., Чуриков Д. В.* Применение комплексных WA-систем функций Кравченко к обработке временных рядов // ДАН РАН. 2011. Т. 436. № 5. С. 615–622.
120. *Кравченко В. Ф., Пустовойт В. И., Чуриков Д. В.* Атомарные функции и непараметрические оценки плотности вероятности // ДАН РАН, 2011. Т. 440, № 2.
121. *Кравченко В. Ф., Пустовойт В. И., Чуриков Д. В.* Применение семейства атомарных функций к задачам непараметрической оценки плотности вероятности // Электромагнитные волны и электронные системы. 2011. Т. 16. № 8.
122. *Кравченко В. Ф., Пустовойт В. И., Чуриков Д. В.* Аналитические двумерные WA-системы функций Кравченко–Рвачева в задачах цифровой обработки сигналов и изображений // Электромагнитные волны и электронные системы. 2011. Т. 16. № 9.
123. *Kravchenko, V. F., Churikov D. V., and Yurin, A. V.*, Analytical Description of Complex Shape Locus with the Help of R-Operations and Atomic Functions // The Digital Signal and Image Processing. Telecommunications and Radio Engineering. 2011. V. 70(4). P. 283–323.
124. *Кравченко В. Ф., Чуриков Д. В.* Непараметрические оценки плотности вероятности и ее производных на основе семейства атомарных функций // Труды 13-й Междунар. конф. «Цифровая обработка сигналов и ее применение», Москва. 2011. Т. 1. С. 163–165.

Поступила 29 июня 2011 г.

Atomic Functions and WA-systems of Functions in Radio Physics and Techniques Modern Problems

© Authors, 2011

V.F. Kravchenko, O.V. Kravchenko, V.I. Pustovoi, D.V. Churikov

The review is devoted to 40-year anniversary of the theory of atomic functions (AF) and also to WA-systems of the functions constructed on their basis with reference to a wide class of problems of digital signal processing, radio physicists, antenna technique, electrodynamics and gyroscope. AF are natural expansion of elementary functions class which became necessary now when have widely started to be applied finite functions. They are expedient for applying in numerical methods there where approximated function possesses probably smoothness and where application of high degree polynomial is complicated because of them non-finiteness. AF can will find wide application in other areas of mathematics. Some applications of the theories of AF, WA-systems of functions and R-functions in modern problems of radio physics and techniques are considered. The attention is concentrated mainly to applications of AF to digital signal and image processing, problems of the antenna analysis and synthesis, probability theory, boundary value problems of mathematical physics.

Математическое моделирование физических процессов

УДК 517.9:536.4

Резонансное рассеяние и генерация волн изотропной нелинейной кубически поляризуемой слоистой структурой. Постановка задачи

© Авторы, 2011

В. В. Яцик – к. ф.-м. н., ст. науч. сотрудник отдела теории дифракции и дифракционной электроники, Институт радиофизики и электроники им. А. Я. Усикова, Национальная академия наук Украины (г. Харьков, Украина)
E-mail: yatsyk@vk.kharkov.ua; vasyi.yatsyk@meta.ua

Проведен анализ задачи рассеяния и генерации волн в резонансной области частот при возбуждении изотропной, немагнитной, линейно поляризованной, нелинейной слоистой диэлектрической структуры с кубической поляризуемостью среды пакетом плоских волн, состоящим из плоских волн на кратных частотах.

Ключевые слова: резонансное рассеяние, кубическая поляризуемость, генерация волн.

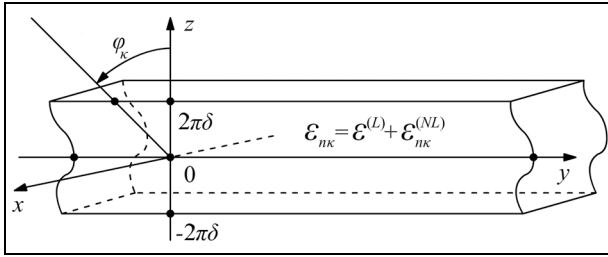
In resonant area of frequencies the analysis of a problem of scattering and generation of waves is carried out at excitation to the isotropic, not magnetic, linearly polarized, nonlinear layered dielectric structure with cubic polarisability of medium a packet of plane waves, consisting of plane waves on multiple frequencies.

Keywords: resonance scattering, cubic polarisability, generation of waves.

Введение. В резонансной области частот проведен анализ задачи рассеяния и генерации волн при возбуждении изотропной, немагнитной, линейно поляризованной (E -поляризация), нелинейной слоистой диэлектрической структуры с кубической поляризуемостью среды пакетом плоских волн, состоящим из плоских волн на кратных частотах. Электромагнитные волны в нелинейной среде с кубической поляризуемостью описываются бесконечной системой нелинейных уравнений [1–4]. При исследовании отдельных нелинейных эффектов оказывается возможным в этой системе ограничиться рассмотрением конечного числа уравнений, а также оставить в виде коэффициентов поляризации отдельные слагаемые, характеризующие исследуемую физическую задачу [4]. Анализ возбуждения поперечно неоднородной нелинейной диэлектрической слоистой структуры пакетом квазиоднородных электромагнитных полей позволил получить условие фазового синхронизма волн. Дополним классическую постановку задачи условием фазового синхронизма.

В работе в строгой постановке рассматривается краевая задача дифракция пакета плоских волн на нелинейной слоистой диэлектрической структуре с учетом генерации третьей гармоники. Исследуемая краевая задача сведена к системе одномерных (вдоль высоты структуры) нелинейных интегральных уравнений Фредгольма второго рода относительно составляющих комплексных амплитуд Фурье рассеянных и генерируемых нелинейным слоем полей.

1. Анализ процесса рассеяния и генерации волн слоистой диэлектрической структурой с кубической поляризуемостью среды. В резонансной области частот проведем анализ задачи рассеяния и генерации волн при возбуждении изотропной, немагнитной, линейно поляризованной, нелинейной слоистой диэлектрической структуры с кубической поляризуемостью среды плоской электромагнитной волной (совершающей колебания с частотой $\omega \equiv kc$) (рисунок). Исследование будем проводить в частотной области, принимая во внимание кратные частоты $n\omega$, генерируемые нелинейной структурой при гармонической временной зависимости вида $\exp(-in\omega t)$.



Нелинейная слоистая диэлектрическая структура

Рассмотрим трехкомпонентное E -поляризованное электромагнитное поле $\mathbf{E}(\mathbf{r}, nk) = (E_x(nk; y, z), 0, 0)$, $\mathbf{H}(\mathbf{r}, nk) = (0, H_y(nk; y, z), H_z(nk; y, z))$ и ограничимся учетом в представлении нелинейной части вектора поляризации при нулевом значении статического электрического поля $\mathbf{E}(\mathbf{r}, sk|_{s=0}) = \mathbf{0}$ младшими членами ряда Тейлора [5]. В этом случае, единственная отличная от нуля компонента вектора поляризации

$\mathbf{P}^{(NL)}(\mathbf{r}, nk) = (P_x^{(NL)}(nk; y, z), 0, 0)$ определяется тензором восприимчивости третьего порядка $\hat{\chi}^{(3)}$, что характерно для нелинейной изотропной среды с кубической поляризуемостью [1–4, 6–10].

Анализ процесса генерации и резонансного рассеяния волн нелинейными кубически поляризованными диэлектрическими структурами сводится к отысканию комплексных амплитуд Фурье электромагнитного поля, удовлетворяющих бесконечной системе нелинейных уравнений [1–4]

$$\begin{aligned} \nabla^2 E_x(\mathbf{r}, sk) + \frac{(n\omega)^2}{c^2} D_x^{(L)}(\mathbf{r}, sk) + \frac{4\pi(s\omega)^2}{c^2} P_x^{(NL)}(\mathbf{r}, sk) &= 0, \quad s=1, 2, \dots, \\ P_x^{(NL)}(\mathbf{r}, sk) &= \frac{1}{4} \sum_{\substack{n, m, p=-\infty \\ n+m+p=s \\ n, m, p \neq 0}}^{\infty} \chi_{xxxx}^{(3)}(sk; nk, mk, pk) E_x(\mathbf{r}, nk) E_x(\mathbf{r}, mk) E_x(\mathbf{r}, pk) = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{\infty} 3\chi_{xxxx}^{(3)}(sk; jk, -jk, sk) \times \\ &\times |E_x(\mathbf{r}, jk)|^2 E_x(\mathbf{r}, sk) + \frac{1}{4} \sum_{\substack{n, m, p=-\infty \\ n \neq -m, p=s \\ m \neq -p, n=s \\ n \neq -p, m=s \\ n+m+p=s \\ n, m, p \neq 0}}^{\infty} \chi_{xxxx}^{(3)}(sk; nk, mk, pk) E_x(\mathbf{r}, nk) E_x(\mathbf{r}, mk) E_x(\mathbf{r}, pk). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $D_x^{(L)}(\mathbf{r}, sk)$ линейная часть комплексной компоненты электрического смещения; $\chi_{xxxx}^{(3)}(sk; nk, mk, pk)$ коэффициенты кубической восприимчивости нелинейной среды.

При исследовании отдельных нелинейных эффектов оказывается возможным в системе уравнений (1) ограничиться рассмотрением конечного числа уравнений. Например, при оценке нелинейных эффектов, вызванных порождением в нелинейной среде лишь гармоник на трех комбинированных частотах, в ситуации, обусловленной возбуждением нелинейного объекта пакетом волн. Если такой пакет волн состоит из сильного волнового поля частотой κ (генерирующего излучение на утроенной частоте) и слабых полей с частотами 2κ , 3κ (не приводящих к генерации гармоник на соответствующих кратных частотах), можно ограничиться рассмотрением трех характерных уравнений на трех кратных частотах [1–4]. Оставим при этом в представлении коэффициентов поляризации отдельные, отличные от нуля, слагаемые, характеризующие исследуемую физическую задачу. Ограничившись рассмотрением описанных выше ситуаций, систему (1) представим в виде

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{aligned} \nabla^2 E_x(\mathbf{r}, \kappa) + \kappa^2 D_x^{(L)}(\mathbf{r}, \kappa) + 4\pi\kappa^2 P_x^{(NL)}(\mathbf{r}, \kappa) &= 0, \\ \nabla^2 E_x(\mathbf{r}, 2\kappa) + (2\kappa)^2 D_x^{(L)}(\mathbf{r}, 2\kappa) + 4\pi(2\kappa)^2 P_x^{(NL)}(\mathbf{r}, 2\kappa) &= 0, \\ \nabla^2 E_x(\mathbf{r}, 3\kappa) + (3\kappa)^2 D_x^{(L)}(\mathbf{r}, 3\kappa) + 4\pi(3\kappa)^2 P_x^{(NL)}(\mathbf{r}, 3\kappa) &= 0, \end{aligned} \right. \\ P_x^{(NL)}(\mathbf{r}, nk) &= \frac{3}{4} \left(\chi_{xxxx}^{(3)}(nk, \kappa, -\kappa, nk) |E_x(\mathbf{r}, \kappa)|^2 + \chi_{xxxx}^{(3)}(nk, 2\kappa, -2\kappa, nk) |E_x(\mathbf{r}, 2\kappa)|^2 + \chi_{xxxx}^{(3)}(nk, 3\kappa, -3\kappa, nk) |E_x(\mathbf{r}, 3\kappa)|^2 \right) \times \\ &\times E_x(\mathbf{r}, nk) + \delta_n^1 \frac{3}{4} \left\{ \chi_{xxxx}^{(3)}(\kappa, -\kappa, -\kappa, 3\kappa) [E_x^*(\mathbf{r}, \kappa)]^2 E_x(\mathbf{r}, 3\kappa) + \chi_{xxxx}^{(3)}(\kappa, 2\kappa, 2\kappa, -3\kappa) E_x^2(\mathbf{r}, 2\kappa) E_x^*(\mathbf{r}, 3\kappa) \right\} + \\ &+ \delta_n^2 \frac{3}{4} \chi_{xxxx}^{(3)}(2\kappa; -2\kappa, \kappa, 3\kappa) E_x^*(\mathbf{r}, 2\kappa) E_x(\mathbf{r}, \kappa) E_x(\mathbf{r}, 3\kappa) + \\ &+ \delta_n^3 \left\{ \frac{1}{4} \chi_{xxxx}^{(3)}(3\kappa; \kappa, \kappa, \kappa) E_x^3(\mathbf{r}, \kappa) + \frac{3}{4} \chi_{xxxx}^{(3)}(3\kappa; 2\kappa, 2\kappa, -\kappa) E_x^2(\mathbf{r}, 2\kappa) E_x^*(\mathbf{r}, \kappa) \right\}, \quad n=1, 2, 3. \end{aligned} \quad (2)$$

Для линейных электродинамических объектов уравнения системы (2) независимы. В случае нелинейного объекта, присутствие функций $P_x^{(NL)}(\mathbf{r}, n\kappa)$ делает их связанными, так как каждая из этих гармоник зависит от серии гармоник $E_x(\mathbf{r}, n\kappa)$.

Слагаемые первой суммы в представлении $P_x^{(NL)}(\mathbf{r}, n\kappa)$ называют членами фазовой самомодуляции (FSM) [11], обозначим их $P_x^{\text{FSM}}(\mathbf{r}, n\kappa)$. Они непосредственно входят в левую часть каждого из уравнений (2) (поскольку содержат сомножитель, являющийся искомой функции каждого из уравнений (2) на заданной частоте $n\kappa$). Очевидно, что эти слагаемые отвечают за вариацию диэлектрической проницаемости нелинейной среды, обусловленную ростом амплитуды поля возбуждения. Слагаемые второй суммы в представлении $P_x^{(NL)}(\mathbf{r}, n\kappa)$ отвечают за генерацию кратных гармоник. Одни из них генерируют излучение на кратных частотах, другие описывают взаимное влияние сгенерированных на кратных частотах полей на исследуемое электромагнитное поле. Причем те из них, которые на кратной частоте $n\kappa$ явно зависят от искомого поля дифракции, индуцируют комплексную величину диэлектрической проницаемости нелинейной среды, обозначим их $P_x^{\text{GC}}(\mathbf{r}, n\kappa)$. Остальные слагаемые второй суммы в представлении $P_x^{(NL)}(\mathbf{r}, n\kappa)$, могут быть перенесены в правые части соответствующих уравнений (играют роль источников генерирующего излучения), обозначим их с помощью $P_x^{\text{G}}(\mathbf{r}, n\kappa)$. Поэтому

$$P_x^{(NL)}(\mathbf{r}, n\kappa) \equiv P_x^{\text{FSM}}(\mathbf{r}, n\kappa) + P_x^{\text{GC}}(\mathbf{r}, n\kappa) + P_x^{\text{G}}(\mathbf{r}, n\kappa). \quad (3)$$

Анализ рассматриваемой задачи может быть существенно упрощен, прежде всего, путем уменьшения числа заданных параметров, коэффициентов кубической восприимчивости рассматриваемой нелинейной среды. Так, согласно правилу Клеймана [12, 13]:

$$\begin{aligned} \chi_{xxxx}^{(3)}(n\kappa; \kappa, -\kappa, n\kappa) &= \chi_{xxxx}^{(3)}(n\kappa; 2\kappa, -2\kappa, n\kappa) = \chi_{xxxx}^{(3)}(n\kappa; 3\kappa, -3\kappa, n\kappa) = \chi_{xxxx}^{(3)}(\kappa; -\kappa, -\kappa, 3\kappa) = \\ &= \chi_{xxxx}^{(3)}(\kappa; 2\kappa, 2\kappa, -3\kappa) = \chi_{xxxx}^{(3)}(2\kappa; -2\kappa, \kappa, 3\kappa) = \chi_{xxxx}^{(3)}(3\kappa; \kappa, \kappa, \kappa) = \chi_{xxxx}^{(3)}(3\kappa; 2\kappa, 2\kappa, -\kappa) \equiv \chi_{xxxx}^{(3)}, \quad n=1, 2, 3. \end{aligned} \quad (4)$$

С учетом (3) и (4), систему уравнений (2) запишем так:

$$\begin{cases} \nabla^2 E_x(\mathbf{r}, \kappa) + \kappa^2 D_x^{(L)}(\mathbf{r}, \kappa) + 4\pi\kappa^2 (P_x^{\text{FSM}}(\mathbf{r}, \kappa) + P_x^{\text{GC}}(\mathbf{r}, \kappa)) = -4\pi\kappa^2 P_x^{\text{G}}(\mathbf{r}, \kappa), \\ \nabla^2 E_x(\mathbf{r}, 2\kappa) + (2\kappa)^2 D_x^{(L)}(\mathbf{r}, 2\kappa) + 4\pi(2\kappa)^2 (P_x^{\text{FSM}}(\mathbf{r}, 2\kappa) + P_x^{\text{GC}}(\mathbf{r}, 2\kappa)) = 0, \\ \nabla^2 E_x(\mathbf{r}, 3\kappa) + (3\kappa)^2 D_x^{(L)}(\mathbf{r}, 3\kappa) + 4\pi(3\kappa)^2 P_x^{\text{FSM}}(\mathbf{r}, 3\kappa) = -4\pi(3\kappa)^2 P_x^{\text{G}}(\mathbf{r}, 3\kappa), \end{cases}$$

$$P_x^{\text{FSM}}(\mathbf{r}, n\kappa) = \frac{3}{4} \chi_{xxxx}^{(3)} (|E_x(\mathbf{r}, \kappa)|^2 + |E_x(\mathbf{r}, 2\kappa)|^2 + |E_x(\mathbf{r}, 3\kappa)|^2) E_x(\mathbf{r}, n\kappa); \quad n=1, 2, 3;$$

$$P_x^{\text{GC}}(\mathbf{r}, \kappa) = \frac{3}{4} \chi_{xxxx}^{(3)} [E_x^*(\mathbf{r}, \kappa)]^2 E_x(\mathbf{r}, 3\kappa) \equiv \frac{3}{4} \chi_{xxxx}^{(3)} \frac{[E_x^*(\mathbf{r}, \kappa)]^2}{E_x(\mathbf{r}, \kappa)} E_x(\mathbf{r}, 3\kappa) E_x(\mathbf{r}, \kappa), \quad (5)$$

$$P_x^{\text{G}}(\mathbf{r}, \kappa) = \frac{3}{4} \chi_{xxxx}^{(3)} E_x^2(\mathbf{r}, 2\kappa) E_x^*(\mathbf{r}, 3\kappa),$$

$$P_x^{\text{GC}}(\mathbf{r}, 2\kappa) = \frac{3}{4} \chi_{xxxx}^{(3)} E_x^*(\mathbf{r}, 2\kappa) E_x(\mathbf{r}, \kappa) E_x(\mathbf{r}, 3\kappa) \equiv \frac{3}{4} \chi_{xxxx}^{(3)} \frac{E_x^*(\mathbf{r}, 2\kappa)}{E_x(\mathbf{r}, 2\kappa)} E_x(\mathbf{r}, \kappa) E_x(\mathbf{r}, 3\kappa) E_x(\mathbf{r}, 2\kappa),$$

$$P_x^{\text{G}}(\mathbf{r}, 3\kappa) = \frac{3}{4} \chi_{xxxx}^{(3)} \left\{ \frac{1}{3} E_x^3(\mathbf{r}, \kappa) + E_x^2(\mathbf{r}, 2\kappa) E_x^*(\mathbf{r}, \kappa) \right\}, \quad P_x^{\text{GC}}(\mathbf{r}, 3\kappa) \equiv 0.$$

Диэлектрическая проницаемость нелинейной среды заполняющей слой (рисунок) представима в виде суммы

$$\varepsilon_{n\kappa} = \varepsilon^{(L)} + \varepsilon_{n\kappa}^{(NL)} \quad \text{при } |z| \leq 2\pi\delta. \quad (6)$$

Вне слоя $\varepsilon_{n\kappa} = 1$ (при $|z| > 2\pi\delta$). Линейные и нелинейные слагаемые диэлектрической проницаемости слоя задаются сомножителями при величинах $(n\kappa)^2 E_x(\mathbf{r}, n\kappa)$ во вторых и третьих слагаемых каждого из уравнений системы. Так

$$\varepsilon^{(L)} = D_x^{(L)}(\mathbf{r}, n\kappa) / E_x(\mathbf{r}, n\kappa) = 1 + 4\pi\chi_{xx}^{(1)}. \quad (7)$$

Здесь учтены представления для линейной части комплексных компонент электрического смещения $D_x^{(L)}(\mathbf{r}, n\kappa) = E_x(\mathbf{r}, n\kappa) + 4\pi P_x^{(L)}(\mathbf{r}, n\kappa) = \varepsilon^{(L)} E_x(\mathbf{r}, n\kappa)$ и поляризации $P_x^{(L)}(\mathbf{r}, n\kappa) = \chi_{xx}^{(1)} E_x(\mathbf{r}, n\kappa)$. Аналогично, третьи слагаемые каждого из уравнений системы позволяет записать нелинейную составляющую диэлектрической проницаемости в виде

$$\varepsilon_{nk}^{(NL)} = 4\pi (P_x^{\text{FSM}}(\mathbf{r}, n\kappa) + P_x^{\text{GC}}(\mathbf{r}, n\kappa)) / E_x(\mathbf{r}, n\kappa). \quad (8)$$

В рассматриваемом случае, согласно (7), линейная часть диэлектрической проницаемости

$$\varepsilon^{(L)}(z) = 1 + 4\pi \chi_{xx}^{(1)}(z), \quad (9)$$

а также заданная условием (4) функция кубической восприимчивости нелинейной среды

$$\alpha(z) = 3\pi \chi_{xxxx}^{(3)}(z) \quad (10)$$

зависят лишь от поперечной координаты z . Отметим, что для поперечно неоднородных сред (слоя или слоистой структуры), линейная часть $\varepsilon^{(L)}(z)$ диэлектрической проницаемости которых описывается кусочно-гладкой или кусочно-постоянной функцией, функция $\alpha(z)$ также соответственно кусочно-гладкая или кусочно-постоянная. Это замечание позволяет в рамках одной математической модели исследовать дифракционные характеристики как нелинейного слоя, так и слоистой структуры (состоящей из конечного числа нелинейных диэлектрических слоев).

2. Условие фазового синхронизма волн. Квазиоднородные электромагнитные поля в поперечно неоднородной нелинейной диэлектрической слоистой структуре. При возбуждении нелинейной структуры полем плоской волны рассеянное и сгенерированное поле в поперечно неоднородном нелинейном диэлектрическом слое квазиоднородно вдоль координаты y , т. е.

$$E_x(n\kappa; y, z) = U(n\kappa; z) \exp(i\Phi_{n\kappa} y), \text{ при } |z| \leq 2\pi\delta. \quad (11)$$

Здесь $U(n\kappa; z)$ и $\Phi_{n\kappa} \equiv n\kappa \sin(\phi_{n\kappa})$ – соответственно комплексная величина поперечной составляющей амплитуды Фурье электрического поля и значение продольной постоянной распространения на частоте $n\kappa$, $\phi_{n\kappa}$ – заданные величины углов возбуждения нелинейной структуры.

Диэлектрические проницаемости слоистой структуры на кратных частотах $n\kappa$ определяются величинами поперечных составляющих комплексных амплитуд Фурье рассеянных и сгенерированных полей, т.е. перераспределением энергии электрических полей на кратных частотах при заданном угле возбуждения нелинейной структуры оставляя при этом исследуемую структуру поперечно неоднородной. Условие продольной однородности (вдоль координаты y) диэлектрической проницаемости нелинейной слоистой структуры запишем в виде

$$\varepsilon_{nk}^{(NL)}(\alpha(z), E_x(\mathbf{r}, \kappa), E_x(\mathbf{r}, 2\kappa), E_x(\mathbf{r}, 3\kappa)) = \varepsilon_{nk}^{(NL)}(\alpha(z), U(\kappa; z), U(2\kappa; z), U(3\kappa; z)). \quad (12)$$

Воспользовавшись представлениями (8), (11) и условием (12), получаем физически не противоречивое требование, которое назовем условием фазового синхронизма волн:

$$\Phi_{n\kappa} = n\Phi_{\kappa}, \text{ при } n = 1, 2, 3. \quad (13)$$

Приведем вывод условия (13). Так, согласно (8) и (5), получим

$$\varepsilon_{nk}^{(NL)} = 4\pi \frac{P_x^{\text{FSM}}(\mathbf{r}, n\kappa)}{E_x(\mathbf{r}, n\kappa)} + 4\pi \frac{P_x^{\text{GC}}(\mathbf{r}, n\kappa)}{E_x(\mathbf{r}, n\kappa)},$$

$$P_x^{\text{FSM}}(\mathbf{r}, n\kappa) = \frac{3}{4} \chi_{xxxx}^{(3)} (|E_x(\mathbf{r}, \kappa)|^2 + |E_x(\mathbf{r}, 2\kappa)|^2 + |E_x(\mathbf{r}, 3\kappa)|^2) E_x(\mathbf{r}, n\kappa),$$

$$P_x^{\text{GC}}(\mathbf{r}, \kappa) = \frac{3}{4} \chi_{xxxx}^{(3)} \frac{[E_x^*(\mathbf{r}, \kappa)]^2}{E_x(\mathbf{r}, \kappa)} E_x(\mathbf{r}, 3\kappa) E_x(\mathbf{r}, \kappa),$$

$$P_x^{\text{GC}}(\mathbf{r}, 2\kappa) = \frac{3}{4} \chi_{xxxx}^{(3)} \frac{E_x^*(\mathbf{r}, 2\kappa)}{E_x(\mathbf{r}, 2\kappa)} E_x(\mathbf{r}, \kappa) E_x(\mathbf{r}, 3\kappa) E_x(\mathbf{r}, 2\kappa), \quad P_x^{\text{GC}}(\mathbf{r}, 3\kappa) \equiv 0, \quad n = 1, 2, 3,$$

или с учетом (10) и (11) запишем

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{nk}^{(NL)} = & \alpha(z) \left(|E_x(\mathbf{r}, \kappa)|^2 + |E_x(\mathbf{r}, 2\kappa)|^2 + |E_x(\mathbf{r}, 3\kappa)|^2 \right) + \delta_n^1 \alpha(z) \frac{[E_x^*(\mathbf{r}, \kappa)]^2}{E_x(\mathbf{r}, \kappa)} E_x(\mathbf{r}, 3\kappa) + \\
 & + \delta_n^2 \alpha(z) \frac{E_x^*(\mathbf{r}, 2\kappa)}{E_x(\mathbf{r}, 2\kappa)} E_x(\mathbf{r}, \kappa) E_x(\mathbf{r}, 3\kappa) = \alpha(z) \left(|U(\kappa; z)|^2 + |U(2\kappa; z)|^2 + |U(3\kappa; z)|^2 \right) + \\
 & + \delta_n^1 \alpha(z) \frac{[U^*(\kappa; z)]^2}{U(\kappa; z)} \exp(-3i\Phi_{\kappa} y) U(3\kappa; z) \exp(i\Phi_{3\kappa} y) + \delta_n^2 \alpha(z) \frac{U^*(2\kappa; z)}{U(2\kappa; z)} \exp(-2i\Phi_{2\kappa} y) U(\kappa; z) \times \\
 & \times \exp(i\Phi_{\kappa} y) U(3\kappa; z) \exp(i\Phi_{3\kappa} y) = \alpha(z) \left(|U(\kappa; z)|^2 + |U(2\kappa; z)|^2 + |U(3\kappa; z)|^2 \right) + \delta_n^1 \alpha(z) \frac{[U^*(\kappa; z)]^2}{U(\kappa; z)} \times \\
 & \times U(3\kappa; z) \exp[i(-3\Phi_{\kappa} + \Phi_{3\kappa}) y] + \delta_n^2 \alpha(z) \frac{U^*(2\kappa; z)}{U(2\kappa; z)} U(\kappa; z) U(3\kappa; z) \exp[i(-2\Phi_{2\kappa} + \Phi_{\kappa} + \Phi_{3\kappa}) y], \\
 n = 1, 2, 3.
 \end{aligned} \tag{14}$$

Требование (12) справедливо, если

$$\begin{cases} -3\Phi_{\kappa} + \Phi_{3\kappa} = 0, \\ -2\Phi_{2\kappa} + \Phi_{\kappa} + \Phi_{3\kappa} = 0. \end{cases} \tag{15}$$

Из (15) следует справедливость условия (13).

Диэлектрическая проницаемость нелинейного слоя, согласно (6), (9), (14), (13), представима в виде

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{nk}(z, \alpha(z), E_x(\mathbf{r}, \kappa), E_x(\mathbf{r}, 2\kappa), E_x(\mathbf{r}, 3\kappa)) & \equiv \varepsilon_{nk}(z, \alpha(z), U(\kappa; z), U(2\kappa; z), U(3\kappa; z)) \equiv \\
 & \equiv \varepsilon^{(L)}(z) + \varepsilon_{nk}^{(NL)}(\alpha(z), U(\kappa; z), U(2\kappa; z), U(3\kappa; z)) = \\
 & = \varepsilon^{(L)}(z) + \alpha(z) \left(\sum_{n=1}^3 |U(n\kappa; z)|^2 + \delta_n^1 \frac{[U^*(\kappa; z)]^2}{U(\kappa; z)} U(3\kappa; z) + \delta_n^2 \frac{U^*(2\kappa; z)}{U(2\kappa; z)} U(\kappa; z) U(3\kappa; z) \right) = \\
 & = \varepsilon^{(L)}(z) + \alpha(z) \left\{ |U(\kappa; z)|^2 + |U(2\kappa; z)|^2 + |U(3\kappa; z)|^2 + \delta_n^1 U^*(\kappa; z) \exp[-2i \arg U(\kappa; z)] U(3\kappa; z) + \right. \\
 & + \delta_n^2 \exp[-2i \arg U(2\kappa; z)] U(\kappa; z) U(3\kappa; z) \left. \right\} = \varepsilon^{(L)}(z) + \alpha(z) \left\{ |U(\kappa; z)|^2 + |U(2\kappa; z)|^2 + |U(3\kappa; z)|^2 + \right. \\
 & + \delta_n^1 |U(\kappa; z)| |U(3\kappa; z)| \exp[i\{-3 \arg U(\kappa; z) + \arg U(3\kappa; z)\}] + \\
 & \left. + \delta_n^2 |U(\kappa; z)| |U(3\kappa; z)| \exp[i\{-2 \arg U(2\kappa; z) + \arg U(\kappa; z) + \arg U(3\kappa; z)\}] \right\}, \quad n = 1, 2, 3.
 \end{aligned} \tag{16}$$

Анализ квазиоднородных полей $E_x(n\kappa; y, z)$ (см. (11)) в поперечно неоднородном нелинейном диэлектрическом слое позволяет показать, что при условии фазового синхронизма волн (13) составляющие вектора нелинейной поляризации $\mathbf{P}_x^G(\mathbf{r}, n\kappa)$ (играющие роль источников генерирующих излучение в правых частях системы уравнений (5)) удовлетворяют условию квазиоднородности. Действительно, на частотах $n\kappa$ правые части первого и третьего уравнений системы (5) с учетом (10), (11) и условия фазового синхронизма волн (13) представимы как

$$\begin{aligned}
 -4\pi\kappa^2 P_x^G(\mathbf{r}, \kappa) & = -\kappa^2 \alpha(z) E_x^2(\mathbf{r}, 2\kappa) E_x^*(\mathbf{r}, 3\kappa) = -\kappa^2 \alpha(z) U^2(2\kappa; z) \exp(2i\Phi_{2\kappa} y) U^*(3\kappa; z) \exp(-i\Phi_{3\kappa} y) = \\
 & = -\kappa^2 \alpha(z) U^2(2\kappa; z) U^*(3\kappa; z) \exp(4i\Phi_{\kappa} y - 3i\Phi_{\kappa} y) = -\kappa^2 \alpha(z) U^2(2\kappa; z) U^*(3\kappa; z) \exp(i\Phi_{\kappa} y), \\
 -4\pi(3\kappa)^2 P_x^G(\mathbf{r}, 3\kappa) & = -(3\kappa)^2 \alpha(z) \left\{ \frac{1}{3} E_x^3(\mathbf{r}, \kappa) + E_x^2(\mathbf{r}, 2\kappa) E_x^*(\mathbf{r}, \kappa) \right\} = -(3\kappa)^2 \alpha(z) \left\{ \frac{1}{3} U^3(\kappa; z) \exp(3i\Phi_{\kappa} y) + \right. \\
 & + U^2(2\kappa; z) \exp(2i\Phi_{2\kappa} y) U^*(\kappa; z) \exp(-i\Phi_{\kappa} y) \left. \right\} = -(3\kappa)^2 \alpha(z) \left\{ \frac{1}{3} U^3(\kappa; z) \exp(3i\Phi_{\kappa} y) + \right. \\
 & + U^2(2\kappa; z) U^*(\kappa; z) \exp(4i\Phi_{\kappa} y - i\Phi_{\kappa} y) \left. \right\} = -(3\kappa)^2 \alpha(z) \left\{ \frac{1}{3} U^3(\kappa; z) + U^2(2\kappa; z) U^*(\kappa; z) \right\} \exp(3i\Phi_{\kappa} y) = \\
 & = -(3\kappa)^2 \alpha(z) \left\{ \frac{1}{3} U^3(\kappa; z) + U^2(2\kappa; z) U^*(\kappa; z) \right\} \exp(i\Phi_{3\kappa} y).
 \end{aligned} \tag{18}$$

Это доказывает выполнение условия квазиоднородности для компонент Вектора $\mathbf{P}_x^G(\mathbf{r}, n\kappa)$.

Условие фазового синхронизма волн (13), в рассматриваемом случае – пространственной квазиоднородности электромагнитных полей вдоль координаты y (11), запишем в виде

$$n\kappa \cdot \sin \phi_{n\kappa} = n\kappa \cdot \sin \phi_\kappa, \quad n = 1, 2, 3. \quad (19)$$

Отсюда следует, что заданная величина ϕ_κ угла падения плоской волны на частоте κ совпадает с возможными направлениями $\phi_{n\kappa} = \phi_\kappa$ углов падения плоских волны на кратных частотах $n\kappa$. При этом углы уходящих от слоя волн $\phi_{n\kappa}^{\text{scat}} = -\phi_{n\kappa}$ в зоне отражения $z > 2\pi\delta$ и $\phi_{n\kappa}^{\text{scat}} = \pi + \phi_{n\kappa}$ в зоне прохождения нелинейного слоя $z < -2\pi\delta$. Все углы отсчитываются в плоскости y_0 z от оси z против хода часовой стрелки.

3. Дифракция пакета плоских волн на нелинейной слоистой диэлектрической структуре. Генерация третьей гармоники. Отметим, что воздействие на нелинейный диэлектрик слабого квазиоднородного электромагнитного поля (11), не приводящего к генерации гармоник на кратных частотах $E_x(\mathbf{r}, 2\kappa) = 0$ и $E_x(\mathbf{r}, 3\kappa) = 0$, сводится к отысканию $E_x(\mathbf{r}, \kappa)$ электрической компоненты поля описываемого лишь первым уравнением системы (5), т.е. решению задачи дифракции плоской волны на диэлектрическом слое с нелинейностью типа Керра $\varepsilon_{nk} = \varepsilon^{(L)}(z) + \alpha(z)|E_x(\mathbf{r}, \kappa)|^2$ [1–3, 6–10]. Анализ процесса генерации нелинейной диэлектрической структурой поля на утроенной частоте 3κ , обусловленного воздействием сильного электромагнитного поля, на частоте κ описывается первым и третьим уравнением системы (5). Исключение из рассмотрения вторым уравнением системы (5) связано с однородностью соответствующей задачи на удвоенной частоте 2κ , отсутствием источников генерирующих излучение на частоте 2κ (правая часть во втором уравнении равна нулю), что позволяет положить $E_x(\mathbf{r}, 2\kappa) = 0$.

Интерес представляет анализ влияния на процесс генерации нелинейной структурой третьей гармоники (обусловленной воздействием сильного электромагнитного поля частотой κ) слабых квазиоднородных электромагнитных полей дифракции с частотами 2κ и 3κ (не генерирующих гармоник на кратных частотах). Так, система уравнений (5) допускает описание процесса генерации поля на утроенной частоте 3κ (третьей гармоники) при возбуждении нелинейной структуры пакетом волн (удовлетворяющих условию фазового синхронизма). Если такой пакет волн состоит из сильного поля на частоте κ и слабого поля дифракции на частоте 3κ , то, как и в ситуации, описанной выше, положив $E_x(\mathbf{r}, 2\kappa) = 0$, оставляем в системе (5) лишь первое и третье уравнения. Для пакетов волн состоящих из сильного поля с частотой κ и слабого поля с частотой 2κ (либо слабых полей с частотами 2κ и 3κ) необходимо учитывать все три уравнения системы (5). Это связано с неоднородностью соответствующей задачи дифракции на удвоенной частоте, обусловленной воздействием слабого поля с частотой 2κ .

Рассмотрим задачи дифракции пакета плоских волн состоящего из сильного поля с частотой κ (генерирующего поле на утроенной частоте) и слабых полей с частотами 2κ и 3κ (оказывающих влияние на процесс генерации третьей гармоники, обусловленный вкладом слабых электромагнитных полей дифракции)

$$\{E_x^{\text{inc}}(\mathbf{r}, n\kappa): E_x^{\text{inc}}(n\kappa; y, z) = a_{n\kappa}^{\text{inc}} \exp[i(\Phi_{n\kappa} y - \Gamma_{n\kappa}(z - 2\pi\delta))]\}, z > 2\pi\delta \}_{n=1}^3 \quad (20)$$

на немагнитной, изотропной, линейно поляризованной

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, n\kappa) = (E_x(n\kappa; y, z), 0, 0), \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, n\kappa) = \left(0, H_y \equiv \frac{1}{i\omega\mu_0} \frac{\partial E_x(n\kappa; y, z)}{\partial z}, H_z \equiv -\frac{1}{i\omega\mu_0} \frac{\partial E_x(n\kappa; y, z)}{\partial y} \right)$$

(E -поляризация), поперечно неоднородной $\varepsilon^{(L)}(z) = \varepsilon_{xx}^{(L)}(z) = 1 + 4\pi\chi_{xx}^{(1)}(z)$ диэлектрической слоистой структуре (рисунок) с кубической поляризуемостью среды (3). Рассматриваемый пакет волн (20) удовлетворяет условиям квазиоднородности (11) и фазового синхронизма (13).

Комплексные амплитуды полных полей дифракции

$$E_x(\mathbf{r}, n\kappa) \equiv E_x(n\kappa; y, z) = E_x^{\text{inc}}(n\kappa; y, z) + E_x^{\text{scat}}(n\kappa; y, z)$$

(где δ_n^m – символ Кронекера) описываются системой граничных задач заданных, согласно (5), с учетом представлений (16)–(18), уравнениями

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 E_x(\mathbf{r}, \kappa) + \kappa^2 \varepsilon_\kappa(z, \alpha(z), E_x(\mathbf{r}, \kappa), E_x(\mathbf{r}, 2\kappa), E_x(\mathbf{r}, 3\kappa)) E_x(\mathbf{r}, \kappa) = -\kappa^2 \alpha(z) E_x^2(\mathbf{r}, 2\kappa) E_x^*(\mathbf{r}, 3\kappa), \\ \nabla^2 E_x(\mathbf{r}, 2\kappa) + (2\kappa)^2 \varepsilon_{2\kappa}(z, \alpha(z), E_x(\mathbf{r}, \kappa), E_x(\mathbf{r}, 2\kappa), E_x(\mathbf{r}, 3\kappa)) E_x(\mathbf{r}, 2\kappa) = 0, \\ \nabla^2 E_x(\mathbf{r}, 3\kappa) + (3\kappa)^2 \varepsilon_{3\kappa}(z, \alpha(z), E_x(\mathbf{r}, \kappa), E_x(\mathbf{r}, 2\kappa), E_x(\mathbf{r}, 3\kappa)) E_x(\mathbf{r}, 3\kappa) = \\ = -(3\kappa)^2 \alpha(z) \left\{ \frac{1}{3} E_x^3(\mathbf{r}, \kappa) + E_x^2(\mathbf{r}, 2\kappa) E_x^*(\mathbf{r}, \kappa) \right\}, \end{array} \right. \quad (21)$$

с обобщенными граничными условиями ($E_{\text{tg}}(n\kappa; y, z)$ и $H_{\text{tg}}(n\kappa; y, z)$ непрерывны на границах слоев нелинейной структуры $\varepsilon_{n\kappa}$; $E_x(n\kappa; y, z) = U(n\kappa; z) \exp(i\Phi_{n\kappa} y)$ – условие пространственной квазиоднородности по y ; $\Phi_{n\kappa} = n\Phi_\kappa$ – условие фазового синхронизма волн) и условием излучения для рассеянного поля:

$$E_x^{\text{scat}}(n\kappa; y, z) = \left\{ \begin{array}{l} a_{n\kappa}^{\text{scat}} \\ b_{n\kappa}^{\text{scat}} \end{array} \right\} \exp\left[i(\Phi_{n\kappa} y \pm \Gamma_{n\kappa}(z \mp 2\pi\delta)) \right], \quad z \gtrless \pm 2\pi\delta. \quad (22)$$

Выражение (22) является математической формулировкой условия излучения на бесконечности. Оно обеспечивает физически непротиворечивое поведение энергетических характеристик рассеяния и гарантирует отсутствие волн приходящих из бесконечности (т. е. $z = \pm\infty$) [14]. В работе исследуются рассеивающие свойства нелинейного слоя, где в (22) всегда $\text{Im}\Gamma_{n\kappa} \equiv 0$, $\text{Re}\Gamma_{n\kappa} > 0$. Отметим, что (22) остается также в силе при анализе волноводных свойств слоя, когда $\text{Im}\Gamma_{n\kappa} > 0$, $\text{Re}\Gamma_{n\kappa} \equiv 0$. Здесь $\{x, y, z, t\}$ – безразмерные пространственно-временные координаты, в которых высота слоя $4\pi\delta$; зависимость от времени определяется множителем $\exp(-in\omega t)$; $\omega = \kappa c$ – безразмерная круговая частота; κ – безразмерный частотный параметр, такой, что $\kappa = \omega/c \equiv 2\pi/\lambda$, он характеризует отношение истинной высоты слоя h к длине волны возбуждения λ , т. е. $h/\lambda = 2\kappa\delta$; $c = (\varepsilon_0 \mu_0)^{1/2}$ – безразмерный параметр, равный по абсолютной величине скорости света в среде, содержащей слой, $\text{Im}c = 0$, ε_0 и μ_0 – материальные параметры среды; $E_{\text{tg}}(n\kappa; y, z)$ и $H_{\text{tg}}(n\kappa; y, z)$ – тангенциальные составляющие векторов напряженности полного $\mathbf{E}(\mathbf{r}, n\kappa)$ и $\mathbf{H}(\mathbf{r}, n\kappa)$ поля; $\nabla^2 = \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$; $\Gamma_{n\kappa} = \sqrt{(n\kappa)^2 - \Phi_{n\kappa}^2}$ – поперечные постоянные распространения; $\Phi_{n\kappa} = n\kappa \sin \phi_{n\kappa}$ – продольные постоянные распространения, $\phi_{n\kappa}$ – угол падения плоских волн, $|\phi_{n\kappa}| < \pi/2$ (рисунок). Абсолютное значение истинных величин x', y', z', t', ω' восстанавливается по формулам $(x', y', z') = (x, y, z)h/(4\pi\delta)$, $t' = th/(4\pi\delta)$, $\omega' = \omega \cdot 4\pi\delta/h$.

Искомое решение задачи дифракции (21)–(22) будет в виде

$$\begin{aligned} E_x(n\kappa; y, z) &= U(n\kappa; z) \exp(i\Phi_{n\kappa} y) = \\ &= \begin{cases} a_{n\kappa}^{\text{inc}} \exp(i(\Phi_{n\kappa} y - \Gamma_{n\kappa}(z - 2\pi\delta))) + a_{n\kappa}^{\text{scat}} \exp(i(\Phi_{n\kappa} y + \Gamma_{n\kappa}(z - 2\pi\delta))), & z > 2\pi\delta, \\ U(n\kappa; z) \exp(i\Phi_{n\kappa} y), & |z| \leq 2\pi\delta, \\ b_{n\kappa}^{\text{scat}} \exp(i(\Phi_{n\kappa} y - \Gamma_{n\kappa}(z + 2\pi\delta))), & z < -2\pi\delta, \quad n = 1, 2, 3. \end{cases} \end{aligned} \quad (23)$$

Заметим, что в зависимости от величин амплитуд $\{a_\kappa^{\text{inc}}, a_{2\kappa}^{\text{inc}}, a_{3\kappa}^{\text{inc}}\}$ падающего на нелинейный слой пакета плоских волн амплитуды рассеянных полей $\{a_{n\kappa}^{\text{scat}}, b_{n\kappa}^{\text{scat}}\}_{n=1}^3$ можно рассматривать как амплитуды поля дифракции, генерации или суммы амплитуд полей дифракции и генерации. Если составляющие пакета $\{a_\kappa^{\text{inc}} = a_\kappa^{\text{inc(W)}}, a_{2\kappa}^{\text{inc}} = a_{2\kappa}^{\text{inc(W)}}, a_{3\kappa}^{\text{inc}} = a_{3\kappa}^{\text{inc(W)}}\}$ состоят из амплитуд слабых волн, то $\{a_{n\kappa}^{\text{scat}} = a_{n\kappa}^{\text{dif}}, b_{n\kappa}^{\text{scat}} = a_{n\kappa}^{\text{dif}}\}_{n=1}^3$. Присутствие в пакете $\{a_\kappa^{\text{inc}} = a_\kappa^{\text{inc(S)}}, a_{2\kappa}^{\text{inc}} = a_{2\kappa}^{\text{inc(W)}}, a_{3\kappa}^{\text{inc}} = a_{3\kappa}^{\text{inc(W)}}\}$ амплитуды сильной волны на частоте κ приводит к появлению правых частей в (21). В этом случае интерес представляет анализ следующих ситуаций:

$$\begin{aligned}
\left\{ a_{\kappa}^{\text{inc}} = a_{\kappa}^{\text{inc(S)}} \neq 0, a_{2\kappa}^{\text{inc}} = a_{2\kappa}^{\text{inc(W)}} \equiv 0, a_{3\kappa}^{\text{inc}} = a_{3\kappa}^{\text{inc(W)}} \equiv 0 \right\} &\Rightarrow \left\{ a_{\kappa}^{\text{scat}} = a_{\kappa}^{\text{dif}}, a_{2\kappa}^{\text{scat}} \equiv 0, a_{3\kappa}^{\text{scat}} = a_{3\kappa}^{\text{gen}} \right\}, \\
\left\{ a_{\kappa}^{\text{inc}} = a_{\kappa}^{\text{inc(S)}} \neq 0, a_{2\kappa}^{\text{inc}} = a_{2\kappa}^{\text{inc(W)}} \equiv 0, a_{3\kappa}^{\text{inc}} = a_{3\kappa}^{\text{inc(W)}} \neq 0 \right\} &\Rightarrow \left\{ a_{\kappa}^{\text{scat}} = a_{\kappa}^{\text{dif}}, a_{2\kappa}^{\text{scat}} \equiv 0, a_{3\kappa}^{\text{scat}} = a_{3\kappa}^{\text{dif}} + a_{3\kappa}^{\text{gen}} \right\}, \\
\left\{ a_{\kappa}^{\text{inc}} = a_{\kappa}^{\text{inc(S)}} \neq 0, a_{2\kappa}^{\text{inc}} = a_{2\kappa}^{\text{inc(W)}} \neq 0, a_{3\kappa}^{\text{inc}} = a_{3\kappa}^{\text{inc(W)}} \equiv 0 \right\} &\Rightarrow \left\{ a_{\kappa}^{\text{scat}} = a_{\kappa}^{\text{dif}} + a_{\kappa}^{\text{gen}}, a_{2\kappa}^{\text{scat}} = a_{2\kappa}^{\text{dif}}, a_{3\kappa}^{\text{scat}} = a_{3\kappa}^{\text{gen}} \right\}, \\
\left\{ a_{\kappa}^{\text{inc}} = a_{\kappa}^{\text{inc(S)}} \neq 0, a_{2\kappa}^{\text{inc}} = a_{2\kappa}^{\text{inc(W)}} \neq 0, a_{3\kappa}^{\text{inc}} = a_{3\kappa}^{\text{inc(W)}} \neq 0 \right\} &\Rightarrow \left\{ a_{\kappa}^{\text{scat}} = a_{\kappa}^{\text{dif}} + a_{\kappa}^{\text{gen}}, a_{2\kappa}^{\text{scat}} = a_{2\kappa}^{\text{dif}}, a_{3\kappa}^{\text{scat}} = a_{3\kappa}^{\text{dif}} + a_{3\kappa}^{\text{gen}} \right\}.
\end{aligned} \quad (24)$$

4. Система нелинейных интегральных уравнений задачи. Аналогично результатам, приведенным в работах [1–4, 14], задача (21)–(22) сводится к отысканию решений системы одномерных нелинейных интегральных уравнений (вдоль высоты структуры $z \in [-2\pi\delta, 2\pi\delta]$) относительно компонент полей $U(n\kappa; z)$, $n = 1, 2, 3$, рассеянных и генерируемых в нелинейном слое. Приведем вывод этой системы уравнений в случае возбуждении нелинейной структуры пакетом плоских волн (20).

Решение задачи (21)–(22) во всем пространстве $Q = \{q = (y, z) : -\infty < y < \infty, -\infty < z < \infty\}$ получается путем сведения, с использованием свойств канонической функции Грина, задачи (21)–(22) (когда $\varepsilon_{n\kappa} \equiv 1$), определяемой в полосе $Q_{\{Y, \infty\}} = \{q = (y, z) : -Y \leq y \leq Y, |z| < \infty; Y > 0\} \subset Q$ выражением [14, 15]

$$\begin{aligned}
G_0(n\kappa; q, q_0) &= \frac{i}{4Y} \exp\{i[\Phi_{n\kappa}(y - y_0) + \Gamma_{n\kappa}|z - z_0|]\} / \Gamma_{n\kappa} = \\
&= \exp(\pm i\Phi_{n\kappa}y) \frac{i\pi}{4Y} \int_{-\infty}^{\infty} H_0^{(1)}\left(n\kappa\sqrt{(\tilde{y} - y_0)^2 + (z - z_0)^2}\right) \exp(\mp i\Phi_{n\kappa}\tilde{y}) d\tilde{y}, \quad n = 1, 2, 3,
\end{aligned} \quad (25)$$

к системе одномерных нелинейных интегральных уравнений относительно составляющих рассеянных и генерируемых в нелинейном слое полей $U(n\kappa; z)$, $n = 1, 2, 3$ (см. (23)), вдоль высоты слоя $z \in [-2\pi\delta, 2\pi\delta]$.

Систему нелинейных интегральных уравнений получим аналогично классическому подходу, изложенному в [16] (см. также [2]). Обозначим как рассеянное, так и сгенерированное, полное поле дифракции на каждой из частот $n\kappa$, $n = 1, 2, 3$, решение задачи (21)–(22) через $E_x(n\kappa; q|_{q=\{y, z\}}) = U(n\kappa; z) \exp(i\Phi_{n\kappa}y)$ (см. (23)), и запишем систему уравнений (21) в виде

$$\begin{cases}
(\nabla^2 + \kappa^2) E_x(\kappa; q) = [1 - \varepsilon_{\kappa}(q, \alpha(q), E_x(\kappa; q), E_x(2\kappa; q), E_x(3\kappa; q))] \kappa^2 E_x(\kappa; q) - \alpha(q) \kappa^2 E_x^2(2\kappa; q) E_x^*(3\kappa; q), \\
(\nabla^2 + (2\kappa)^2) E_x(2\kappa; q) = [1 - \varepsilon_{2\kappa}(q, \alpha(q), E_x(\kappa; q), E_x(2\kappa; q), E_x(3\kappa; q))] (2\kappa)^2 E_x(2\kappa; q), \\
(\nabla^2 + (3\kappa)^2) E_x(3\kappa; q) = [1 - \varepsilon_{3\kappa}(q, \alpha(q), E_x(\kappa; q), E_x(2\kappa; q), E_x(3\kappa; q))] (3\kappa)^2 E_x(3\kappa; q) - \\
-\alpha(q) (3\kappa)^2 \left\{ \frac{1}{3} E_x^3(\kappa; q) + E_x^2(2\kappa; q) E_x^*(\kappa; q) \right\},
\end{cases}$$

или

$$\begin{aligned}
(\nabla^2 + (n\kappa)^2) E_x(n\kappa; q) &= [1 - \varepsilon_{n\kappa}(q, \alpha(q), E_x(\kappa; q), E_x(2\kappa; q), E_x(3\kappa; q))] (n\kappa)^2 E_x(n\kappa; q) - \\
&- \delta_n^1 \alpha(q) (n\kappa)^2 E_x^2(2\kappa; q) E_x^*(3\kappa; q) - \delta_n^3 \alpha(q) (n\kappa)^2 \left\{ \frac{1}{3} E_x^3(\kappa; q) + E_x^2(2\kappa; q) E_x^*(\kappa; q) \right\}, \quad n = 1, 2, 3.
\end{aligned} \quad (26)$$

В правой части системы уравнений (26) первое слагаемое вне слоя равно нулю, поскольку предполагается, что диэлектрическая проницаемость среды, в которую помещен нелинейный слой равной единице, т.е. $1 - \varepsilon_{n\kappa}(q, \alpha(q), E_x(\kappa; q), E_x(2\kappa; q), E_x(3\kappa; q)) \equiv 0$ при значениях $|z| > 2\pi\delta$.

Поле возбуждения нелинейной структуры может быть представлено в виде пакета падающих плоских волн $\{E_x^{\text{inc}}(\kappa; q), E_x^{\text{inc}}(2\kappa; q), E_x^{\text{inc}}(3\kappa; q)\}$, удовлетворяющих условию фазового синхронизма, где

$$E_x^{\text{inc}}(n\kappa; q) = a_{n\kappa}^{\text{inc}} \exp\{i[\Phi_{n\kappa} y - \Gamma_{n\kappa}(z - 2\pi\delta)]\}, \quad n = 1, 2, 3. \quad (27)$$

Причем в рамках рассматриваемой задачи, описываемой системой уравнений (26), поле возбуждения $E_x^{\text{inc}}(\kappa; q)$ нелинейной структуры на частоте κ достаточно сильное (т. е. амплитуда a_{κ}^{inc} такова, что возможна генерация третьей гармоники), на частоте 2κ и 3κ амплитуда $a_{2\kappa}^{\text{inc}}$ и $a_{3\kappa}^{\text{inc}}$ поля возбуждения $E_x^{\text{inc}}(2\kappa; q)$ и $E_x^{\text{inc}}(3\kappa; q)$ выбирается слабой, не приводящей к генерации кратных гармоник.

Во всем пространстве Q , на каждой из частот $n\kappa$, $n = 1, 2, 3$, поля падающих плоских волн $\{E_x^{\text{inc}}(n\kappa; q)\}_{n=1}^3$ удовлетворяют системе однородных уравнений Гельмгольца:

$$(\nabla^2 + (n\kappa)^2)E_x^{\text{inc}}(n\kappa; q) = 0; \quad q \in Q; \quad n = 1, 2, 3. \quad (28)$$

Падающие поля $\{E_x^{\text{inc}}(n\kappa; q)\}_{n=1}^3$ при $z > 2\pi\delta$ являются полями приходящих к слою плоских волн, а при $z < 2\pi\delta$ – полями уходящих плоских волн, удовлетворяющих условию излучения (поскольку, в представлении полей $E_x^{\text{inc}}(n\kappa; q)$, $n = 1, 2, 3$, величины поперечных постоянных распространения положительны $\Gamma_{n\kappa} > 0$, $n = 1, 2, 3$).

Вычитая из полных полей дифракции $E_x(n\kappa; q)$ соответствующие поля падающих волн $E_x^{\text{inc}}(n\kappa; q)$ (см. (23)), получаем для отраженных от слоя полей $E_x(n\kappa; q) - E_x^{\text{inc}}(n\kappa; q) \equiv E_x^{\text{scat}}(n\kappa; q)$ для $z > 2\pi\delta$, рассеянных в слое полей $E_x(n\kappa; q)$ для $|z| \leq 2\pi\delta$ и прошедших сквозь слой полей $E_x(n\kappa; q) \equiv E_x^{\text{scat}}(n\kappa; q)$ при $z < 2\pi\delta$, следующие уравнения:

$$\begin{aligned} & (\nabla^2 + (n\kappa)^2)[E_x(n\kappa; q) - E_x^{\text{inc}}(n\kappa; q)] = 0, \quad z > 2\pi\delta, \\ & (\nabla^2 + (n\kappa)^2)E_x(n\kappa; q) = [1 - \varepsilon_{n\kappa}(q, \alpha(q), E_x(\kappa; q), E_x(2\kappa; q), E_x(3\kappa; q))](n\kappa)^2 E_x(n\kappa; q) - \\ & - \delta_n^1 \alpha(q) (n\kappa)^2 E_x^2(2\kappa; q) E_x^*(3\kappa; q) - \delta_n^3 \alpha(q) (n\kappa)^2 \left\{ \frac{1}{3} E_x^3(\kappa; q) + E_x^2(2\kappa; q) E_x^*(\kappa; q) \right\}, \quad |z| \leq 2\pi\delta, \\ & (\nabla^2 + (n\kappa)^2)E_x(n\kappa; q) = 0, \quad z < -2\pi\delta, \quad n = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (29)$$

Из уравнений для канонической функции Грина

$$(\nabla^2 + (n\kappa)^2)G_0(n\kappa; q, q_0) = -\delta(q, q_0), \quad n = 1, 2, 3 \quad (30)$$

(здесь $\delta(q, q_0)$ дельта-функция Дирака) и уравнений (29) для каждой из приведенных в нем функций, рассматриваемых как функции параметра q_0 , легко получить выражение

$$\begin{aligned} & [E_x(n\kappa; q_0) - E_x^{\text{inc}}(n\kappa; q_0)] \nabla^2 G_0(n\kappa; q, q_0) - G_0(n\kappa; q, q_0) \nabla^2 [E_x(n\kappa; q_0) - E_x^{\text{inc}}(n\kappa; q_0)] = \\ & = -[E_x(n\kappa; q_0) - E_x^{\text{inc}}(n\kappa; q_0)] \delta(q, q_0), \quad z > 2\pi\delta, \\ & E_x(n\kappa; q_0) \nabla^2 G_0(n\kappa; q, q_0) - G_0(n\kappa; q, q_0) \nabla^2 E_x(n\kappa; q_0) = -E_x(n\kappa; q_0) \delta(q, q_0) - \\ & - G_0(n\kappa; q, q_0) [1 - \varepsilon_{n\kappa}(q_0, \alpha(q_0), E_x(\kappa; q_0), E_x(2\kappa; q_0), E_x(3\kappa; q_0))](n\kappa)^2 E_x(n\kappa; q_0) + \\ & + \delta_n^1 G_0(n\kappa; q, q_0) \alpha(q) (n\kappa)^2 E_x^2(2\kappa; q) E_x^*(3\kappa; q) + \delta_n^3 G_0(n\kappa; q, q_0) \alpha(q) (n\kappa)^2 \left\{ \frac{1}{3} E_x^3(\kappa; q) + E_x^2(2\kappa; q) E_x^*(\kappa; q) \right\}, \\ & |z| \leq 2\pi\delta, \\ & E_x(n\kappa; q_0) \nabla^2 G_0(n\kappa; q, q_0) - G_0(n\kappa; q, q_0) \nabla^2 E_x(n\kappa; q_0) = -E_x(n\kappa; q_0) \delta(q, q_0), \quad z < -2\pi\delta; \quad n = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (31)$$

Рассмотрим в пространстве Q прямоугольную область

$$Q_{\{Y, Z\}} = \{q = (y, z): -Y \leq y \leq Y, -Z \leq z \leq Z; Y > 0, Z > 2\pi\delta\}$$

и разобьем ее на три прямоугольника – лежащий над слоем, содержащий слой и находящийся под слоем:

$$\begin{aligned} Q_{\{Y,Z\},z>2\pi\delta} &= \{q = \{y, z\} : -Y \leq y \leq Y, 2\pi\delta < z \leq Z; Y > 0, Z > 2\pi\delta\}, \\ Q_{\{Y,Z\},|z|\leq 2\pi\delta} &= \{q = \{y, z\} : -Y \leq y \leq Y, -Z \leq z \leq Z; Y > 0, Z = 2\pi\delta\}, \\ Q_{\{Y,Z\},z<-2\pi\delta} &= \{q = \{y, z\} : -Y \leq y \leq Y, -Z \leq z < -2\pi\delta; Y > 0, Z > 2\pi\delta\}. \end{aligned}$$

Воспользуемся формулой Грина. В случае нелинейной слоистой структуры, состоящей из конечного числа слоев, правомерность применимости формулы Грина в области, занятой диэлектриком $Q_{\{Y,Z\},|z|\leq 2\pi\delta}$, следует из обобщенных граничных условий, требования непрерывности $E_{\text{tg}}(n\kappa; q)$ и $H_{\text{tg}}(n\kappa; q)$ компонент полного поля дифракции на границах слоев. Действительно, покроем $Q_{\{Y,Z\}}$ конечным набором непересекающихся прямоугольников, в каждом из которых $\varepsilon_{n\kappa}(q_0, \alpha(q_0), E_x(\kappa; q_0), E_x(2\kappa; q_0), E_x(3\kappa; q_0))$ – гладкая функция. На общих границах этих областей (на границах слоев рассматриваемой структуры) в силу непрерывности $E_{\text{tg}}(n\kappa; q)$ и $H_{\text{tg}}(n\kappa; q)$ компонент электромагнитного поля (см. граничное условие (22)) $E_x(n\kappa; q)$ и $\partial E_x(n\kappa; q)/\partial \mathbf{n}$ непрерывны (где \mathbf{n} внешняя нормаль к каждой из областей), откуда с использованием формулы Грина и условия легко получить, систему нелинейных интегральных уравнений относительно искомых решений $E_x(n\kappa; q)$, $n = 1, 2, 3$, в области $Q_{\{Y,Z\},|z|\leq 2\pi\delta}$. Эта система вне области занятой диэлектрическим слоем $Q_{\{Y,Z\}} \setminus Q_{\{Y,Z\},|z|\leq 2\pi\delta}$ является интегральным представлением решения задачи. Следовательно, как в области, занятой диэлектриком $Q_{\{Y,Z\},|z|\leq 2\pi\delta}$, так и вне этой области, а также в областях $Q_{\{Y,Z\},z>2\pi\delta}$ и $Q_{\{Y,Z\},z<-2\pi\delta}$ искомые – дважды непрерывно дифференцируемые функции $\{E_x(n\kappa; q)\}_{n=1}^3$ непрерывны и имеют непрерывные производные во всей области $Q_{\{Y,Z\}}$ вплоть до границы $\partial Q_{\{Y,Z\}}$ включительно, т. е. $E_x(n\kappa; q) \in C^2(Q_{\{Y,Z\}}) \cap C^1(\overline{Q_{\{Y,Z\}}})$, $n = 1, 2, 3$.

Систему нелинейных интегральных уравнений и соответствующие интегральные представления искомых решений задачи получаем, применив в каждом из прямоугольников $Q_{\{Y,Z\},z>2\pi\delta}$, $Q_{\{Y,Z\},|z|\leq 2\pi\delta}$, $Q_{\{Y,Z\},z<-2\pi\delta}$ к функциям $E_x(n\kappa; q_0) - E_x^{\text{inc}}(n\kappa; q_0) \equiv E_x^{\text{scat}}(n\kappa; q_0)$ при $q_0 \in Q_{\{Y,Z\},z>2\pi\delta}$, $E_x(n\kappa; q_0) \equiv E_x^{\text{scat}}(n\kappa; q_0)$, при $q_0 \in Q_{\{Y,Z\},|z|\leq 2\pi\delta}$, $E_x(n\kappa; q_0) \equiv E_x^{\text{scat}}(n\kappa; q_0)$, при $q_0 \in Q_{\{Y,Z\},z<-2\pi\delta}$, и $G_0(n\kappa, q, q_0)$, при $q, q_0 \in Q_{\{Y,Z\}}$ формулу Грина:

$$\begin{aligned} \iint_{Q_{\{Y,Z\},z>2\pi\delta}} \left([E_x - E_x^{\text{inc}}] \nabla^2 G_0 - G_0 \nabla^2 [E_x - E_x^{\text{inc}}] \right) dq_0 &= \int_{Q_{\{Y,Z\},z>2\pi\delta}} \left([E_x - E_x^{\text{inc}}] \frac{\partial G_0}{\partial \mathbf{n}} - G_0 \frac{\partial [E_x - E_x^{\text{inc}}]}{\partial \mathbf{n}} \right) dq_0, \\ \iint_{Q_{\{Y,Z\},|z|\leq 2\pi\delta}} \left(E_x \nabla^2 G_0 - G_0 \nabla^2 E_x \right) dq_0 &= \int_{Q_{\{Y,Z\},|z|\leq 2\pi\delta}} \left(E_x \frac{\partial G_0}{\partial \mathbf{n}} - G_0 \frac{\partial E_x}{\partial \mathbf{n}} \right) dq_0, \\ \iint_{Q_{\{Y,Z\},z<-2\pi\delta}} \left(E_x \nabla^2 G_0 - G_0 \nabla^2 E_x \right) dq_0 &= \int_{Q_{\{Y,Z\},z<-2\pi\delta}} \left(E_x \frac{\partial G_0}{\partial \mathbf{n}} - G_0 \frac{\partial E_x}{\partial \mathbf{n}} \right) dq_0, \quad n = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (32)$$

С учетом соотношений (31) получаем

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} E_x(n\kappa; q) - E_x^{\text{inc}}(n\kappa; q), q \in Q_{\{Y,Z\},z>2\pi\delta} \\ 0, q \in Q_{\{Y,Z\}} \setminus \partial Q_{\{Y,Z\},z>2\pi\delta} \end{array} \right\} &= \\ = - \int_{\partial Q_{\{Y,Z\},z>2\pi\delta}} \left([E_x(n\kappa; q_0) - E_x^{\text{inc}}(n\kappa; q_0)] \frac{\partial G_0(n\kappa; q, q_0)}{\partial \mathbf{n}} - G_0(n\kappa; q, q_0) \frac{\partial [E_x(n\kappa; q_0) - E_x^{\text{inc}}(n\kappa; q_0)]}{\partial \mathbf{n}} \right) dq_0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{array}{l} E_x(n\kappa; q), q \in Q_{\{Y,Z\}, |z| \leq 2\pi\delta} \\ 0, q \in Q_{\{Y,Z\}} \setminus Q_{\{Y,Z\}, |z| \leq 2\pi\delta} \end{array} \right\} = \\
 & = -(n\kappa)^2 \iint_{Q_{\{Y,Z\}, |z| \leq 2\pi\delta}} G_0(n\kappa; q, q_0) \left[1 - \varepsilon_{nk}(q_0, \alpha(q_0), E_x(\kappa; q_0), E_x(2\kappa; q_0), E_x(3\kappa; q_0)) \right] E_x(n\kappa; q_0) dq_0 + \\
 & + \delta_n^1 (n\kappa)^2 \iint_{Q_{\{Y,Z\}, |z| \leq 2\pi\delta}} G_0(n\kappa; q, q_0) \alpha(q_0) E_x^2(2\kappa; q_0) E_x^*(3\kappa; q_0) dq_0 + \\
 & + \delta_n^3 (n\kappa)^2 \iint_{Q_{\{Y,Z\}, |z| \leq 2\pi\delta}} G_0(n\kappa; q, q_0) \alpha(q_0) \left\{ \frac{1}{3} E_x^3(\kappa; q_0) + E_x^2(2\kappa; q_0) E_x^*(\kappa; q_0) \right\} dq_0 - \\
 & - \int_{\partial Q_{\{Y,Z\}, |z| \leq 2\pi\delta}} \left(E_x(n\kappa; q_0) \frac{\partial G_0(n\kappa; q, q_0)}{\partial \mathbf{n}} - G_0(n\kappa; q, q_0) \frac{\partial E_x(n\kappa; q_0)}{\partial \mathbf{n}} \right) dq_0; \\
 & \left\{ \begin{array}{l} E_x(n\kappa; q), q \in Q_{\{Y,Z\}, z < -2\pi\delta} \\ 0, q \in Q_{\{Y,Z\}} \setminus Q_{\{Y,Z\}, z < -2\pi\delta} \end{array} \right\} = - \int_{\partial Q_{\{Y,Z\}, z < -2\pi\delta}} \left(E_x(n\kappa; q_0) \frac{\partial G_0(n\kappa; q, q_0)}{\partial \mathbf{n}} - G_0(n\kappa; q, q_0) \frac{\partial E_x(n\kappa; q_0)}{\partial \mathbf{n}} \right) dq_0; \\
 & n = 1, 2, 3. \quad (33)
 \end{aligned}$$

Пусть $q \in Q_{\{Y,Z\}, |z| \leq 2\pi\delta}$, т. е. лежит внутри прямоугольника, содержащего нелинейную структуру. Тогда уравнения этой системы примут вид

$$\begin{aligned}
 0 & = - \int_{\partial Q_{\{Y,Z\}, z > 2\pi\delta}} \left(\left[E_x(n\kappa; q_0) - E_x^{\text{inc}}(n\kappa; q_0) \right] \frac{\partial G_0(n\kappa; q, q_0)}{\partial \mathbf{n}} - G_0(n\kappa; q, q_0) \frac{\partial \left[E_x(n\kappa; q_0) - E_x^{\text{inc}}(n\kappa; q_0) \right]}{\partial \mathbf{n}} \right) dq_0; \\
 E_x(n\kappa; q) & = -(n\kappa)^2 \iint_{Q_{\{Y,Z\}, |z| \leq 2\pi\delta}} G_0(n\kappa; q, q_0) \left[1 - \varepsilon_{nk}(q_0, \alpha(q_0), E_x(\kappa; q_0), E_x(2\kappa; q_0), E_x(3\kappa; q_0)) \right] \times \\
 & \times E_x(n\kappa; q_0) dq_0 + \delta_n^1 (n\kappa)^2 \iint_{Q_{\{Y,Z\}, |z| \leq 2\pi\delta}} G_0(n\kappa; q, q_0) \alpha(q_0) E_x^2(2\kappa; q_0) E_x^*(3\kappa; q_0) dq_0 + \\
 & + \delta_n^3 (n\kappa)^2 \iint_{Q_{\{Y,Z\}, |z| \leq 2\pi\delta}} G_0(n\kappa; q, q_0) \alpha(q_0) \left\{ \frac{1}{3} E_x^3(\kappa; q_0) + E_x^2(2\kappa; q_0) E_x^*(\kappa; q_0) \right\} dq_0 - \\
 & - \int_{\partial Q_{\{Y,Z\}, |z| \leq 2\pi\delta}} \left(E_x(n\kappa; q_0) \frac{\partial G_0(n\kappa; q, q_0)}{\partial \mathbf{n}} - G_0(n\kappa; q, q_0) \frac{\partial E_x(n\kappa; q_0)}{\partial \mathbf{n}} \right) dq_0; \\
 0 & = - \int_{\partial Q_{\{Y,Z\}, z < -2\pi\delta}} \left(E_x(n\kappa; q_0) \frac{\partial G_0(n\kappa; q, q_0)}{\partial \mathbf{n}} - G_0(n\kappa; q, q_0) \frac{\partial E_x(n\kappa; q_0)}{\partial \mathbf{n}} \right) dq_0; \quad n = 1, 2, 3. \quad (34)
 \end{aligned}$$

С ростом параметра $Z \rightarrow \infty$ интегралы по нижней $[(-Z, -Y), (-Z, Y)]$ и верхней $[(Z, Y), (Z, -Y)]$ границе $\partial Q_{\{Y,Z\}}$ в криволинейных интегралах первого и третьего (при каждом значении $n = 1, 2, 3$) уравнений (33) стремятся к нулю. Это непосредственно следует из того, что на каждой из частот $n\kappa$, $n = 1, 2, 3$, отраженное поле $E_x(n\kappa; q) - E_x^{\text{inc}}(n\kappa; q) = E_x^{\text{scat}}(n\kappa; q)$, задаваемое первым уравнением (34), а также прошедшее поле $E_x(n\kappa; q) = E_x^{\text{scat}}(n\kappa; q)$, описываемое третьим уравнением (35), удовлетворяют условию излучения (22); и асимптотических свойств канонической функции Грина (25). Интегралы вдоль $[(-Z, Y), (Z, Y)]$ и $[(Z, -Y), (-Z, -Y)]$ боковых границ $\partial Q_{\{Y,Z\}}$ в каждом из криволинейных интегралов системы уравнений (35) взаимно уничтожаются.

Рассмотрим компоненты полных полей $E_x(n\kappa; q)$ (т. е. $E_{\text{tg}}(n\kappa; q)$) и $\frac{\partial E_x(n\kappa; q)}{\partial \mathbf{n}}$ (т. е. $H_{\text{tg}}(n\kappa; q)$) на общих границах соприкасающихся прямоугольников. На верхней $z = 2\pi\delta$ и нижней $z = -2\pi\delta$ границах

нелинейной среды они непрерывны (см. граничное условие). Направления внешних нормалей в криволинейных интегралах системы (33) (для первого и второго уравнений, и для второго и третьего уравнений, при каждом значении $n = 1, 2, 3$) на этих общих границах противоположны. Сложив представленные в (33) уравнения, получаем

$$\begin{aligned}
E_x(n\kappa; q) = & -(n\kappa)^2 \iint_{Q_{\{Y,Z\}, |z| \leq 2\pi\delta}} G_0(n\kappa; q, q_0) [1 - \varepsilon_{n\kappa}(q_0, \alpha(q_0), E_x(\kappa; q_0), E_x(2\kappa; q_0), E_x(3\kappa; q_0))] \times \\
& \times E_x(n\kappa; q_0) dq_0 + \delta_n^1 (n\kappa)^2 \iint_{Q_{\{Y,Z\}, |z| \leq 2\pi\delta}} G_0(n\kappa; q, q_0) \alpha(q_0) E_x^2(2\kappa; q_0) E_x^*(3\kappa; q_0) dq_0 + \\
& + \delta_n^3 (n\kappa)^2 \iint_{Q_{\{Y,Z\}, |z| \leq 2\pi\delta}} G_0(n\kappa; q, q_0) \alpha(q_0) \left\{ \frac{1}{3} E_x^3(\kappa; q_0) + E_x^2(2\kappa; q_0) E_x^*(\kappa; q_0) \right\} dq_0 + \\
& + \int_{\underline{Q_{\{Y,Z=\infty\}, z > 2\pi\delta}}} \left(E_x(n\kappa; q_0) \frac{\partial G_0(n\kappa; q, q_0)}{\partial \mathbf{n}} - G_0(n\kappa; q, q_0) \frac{\partial E_x(n\kappa; q_0)}{\partial \mathbf{n}} \right) dq_0, \\
q \in & Q_{\{Y,Z\}, |z| \leq 2\pi\delta}; \quad n = 1, 2, 3.
\end{aligned} \tag{35}$$

В криволинейных интегралах (35) на каждой из частот $n\kappa$, $n = 1, 2, 3$, интегрирование проводится вдоль нижней границы $\underline{Q_{\{Y,Z=\infty\}, z > 2\pi\delta}}$ полуполосы $Q_{\{Y,Z=\infty\}, z > 2\pi\delta}$, нормаль \mathbf{n} направлена внутрь нелинейного слоя. Поменяв направление нормали и рассматривая криволинейный интеграл как интегралы вдоль верхней границы $\overline{Q_{\{Y,Z\}, z \leq 2\pi\delta}}$ области $Q_{\{Y,Z\}, z \leq 2\pi\delta}$, получаем

$$\begin{aligned}
E_x(n\kappa; q) = & -(n\kappa)^2 \iint_{Q_{\{Y,Z\}, |z| \leq 2\pi\delta}} G_0(n\kappa; q, q_0) [1 - \varepsilon_{n\kappa}(q_0, \alpha(q_0), E_x(\kappa; q_0), E_x(2\kappa; q_0), E_x(3\kappa; q_0))] \times \\
& \times E_x(n\kappa; q_0) dq_0 + \delta_n^1 (n\kappa)^2 \iint_{Q_{\{Y,Z\}, |z| \leq 2\pi\delta}} G_0(n\kappa; q, q_0) \alpha(q_0) E_x^2(2\kappa; q_0) E_x^*(3\kappa; q_0) dq_0 + \\
& + \delta_n^3 (n\kappa)^2 \iint_{Q_{\{Y,Z\}, |z| \leq 2\pi\delta}} G_0(n\kappa; q, q_0) \alpha(q_0) \left\{ \frac{1}{3} E_x^3(\kappa; q_0) + E_x^2(2\kappa; q_0) E_x^*(\kappa; q_0) \right\} dq_0 - \\
& - \int_{\overline{Q_{\{Y,Z\}, |z| \leq 2\pi\delta}}} \left(E_x(n\kappa; q_0) \frac{\partial G_0(n\kappa; q, q_0)}{\partial \mathbf{n}} - G_0(n\kappa; q, q_0) \frac{\partial E_x(n\kappa; q_0)}{\partial \mathbf{n}} \right) dq_0, \\
q \in & Q_{\{Y,Z\}, |z| \leq 2\pi\delta}; \quad n = 1, 2, 3.
\end{aligned} \tag{36}$$

Криволинейные интегралы в системе (36) есть значения величин падающих полей на частотах $n\kappa$, $n = 1, 2, 3$, в точках $q \in Q_{\{Y,Z\}, |z| \leq 2\pi\delta}$:

$$\begin{aligned}
E_x^{\text{inc}}(n\kappa; q) = & - \int_{\overline{Q_{\{Y,Z\}, |z| \leq 2\pi\delta}}} \left(E_x(n\kappa; q_0) \frac{\partial G_0(n\kappa; q, q_0)}{\partial \mathbf{n}} - G_0(n\kappa; q, q_0) \frac{\partial E_x(n\kappa; q_0)}{\partial \mathbf{n}} \right) dq_0, \\
q \in & Q_{\{Y,Z\}, |z| \leq 2\pi\delta}; \quad n = 1, 2, 3.
\end{aligned} \tag{37}$$

Действительно, применив формулу Грина к функциям $G(n\kappa; q, q_0)$ и $E_x^{\text{inc}}(n\kappa; q)$ в области $Q_{\{Y,Z\}, |z| \leq 2\pi\delta} \cup Q_{\{Y,Z\}, z < -2\pi\delta}$, считая, что $q \in Q_{\{Y,Z\}, |z| \leq 2\pi\delta} \cup Q_{\{Y,Z\}, z < -2\pi\delta}$, и устремив нижнюю границу $\underline{Q_{\{Y,Z\}, z < -2\pi\delta}} \rightarrow -\infty$, приходим к (37).

Подставив (37) в (36), приходим к системе нелинейных интегральных уравнений относительно искомых полных полей дифракции:

$$\begin{aligned}
 E_x(n\kappa; q) = & -(n\kappa)^2 \iint_{Q_{\{Y,Z\}, |z| \leq 2\pi\delta}} G_0(n\kappa; q, q_0) [1 - \varepsilon_{n\kappa}(q_0, \alpha(q_0), E_x(\kappa; q_0), E_x(2\kappa; q_0), E_x(3\kappa; q_0))] \times \\
 & \times E_x(n\kappa; q_0) dq_0 + \delta_n^1 (n\kappa)^2 \iint_{Q_{\{Y,Z\}, |z| \leq 2\pi\delta}} G_0(n\kappa; q, q_0) \alpha(q_0) E_x^2(2\kappa; q_0) E_x^*(3\kappa; q_0) dq_0 + \\
 & + \delta_n^3 (n\kappa)^2 \iint_{Q_{\{Y,Z\}, |z| \leq 2\pi\delta}} G_0(n\kappa; q, q_0) \alpha(q_0) \left\{ \frac{1}{3} E_x^3(\kappa; q_0) + E_x^2(2\kappa; q_0) E_x^*(\kappa; q_0) \right\} dq_0 + \\
 & + E_x^{\text{inc}}(n\kappa; q), \quad q \in Q_{\{Y,Z\}, |z| \leq 2\pi\delta}; \quad n = 1, 2, 3.
 \end{aligned}$$

Осуществив в полученных уравнениях системы предельный переход $Y \rightarrow \infty$ (правомерный в силу произвольности выбора параметра Y и асимптотического поведения функций под интегралом как $O(Y^{-1})$ (см. граничные условия и (25)), приходим к системе нелинейных интегральных уравнений для полных полей дифракции в полосе $Q_\delta \equiv Q_{\{Y=\infty, Z\}, |z| \leq 2\pi\delta} = \{q = \{y, z\} : -\infty < y < +\infty, |z| \leq 2\pi\delta\}$, заполненной нелинейным диэлектрическим слоем:

$$\begin{aligned}
 E_x(n\kappa; q) = & -(n\kappa)^2 \iint_{Q_\delta} G_0(n\kappa; q, q_0) [1 - \varepsilon_{n\kappa}(q_0, \alpha(q_0), E_x(\kappa; q_0), E_x(2\kappa; q_0), E_x(3\kappa; q_0))] E_x(n\kappa; q_0) dq_0 + \\
 & + \delta_n^1 (n\kappa)^2 \iint_{Q_\delta} G_0(n\kappa; q, q_0) \alpha(q_0) E_x^2(2\kappa; q_0) E_x^*(3\kappa; q_0) dq_0 + \\
 & + \delta_n^3 (n\kappa)^2 \iint_{Q_\delta} G_0(n\kappa; q, q_0) \alpha(q_0) \left\{ \frac{1}{3} E_x^3(\kappa; q_0) + E_x^2(2\kappa; q_0) E_x^*(\kappa; q_0) \right\} dq_0 + E_x^{\text{inc}}(n\kappa; q), \\
 & q \in Q_\delta; \quad n = 1, 2, 3.
 \end{aligned} \tag{38}$$

Интегральные представления полных полей дифракции $E_x(n\kappa; q)$, $n = 1, 2, 3$, для точек, расположенных вне слоя $q \notin Q_\delta$, выписываются аналогично изложенному выше (см. (25)–(38)). Нужно лишь при анализе искомым представлений в (33) рассмотреть точки, лежащие над слоем $q \in Q_{\{Y=\infty, Z=\infty\}, z > 2\pi\delta}$ и под ним $q \in Q_{\{Y=\infty, Z=\infty\}, z < -2\pi\delta}$. В результате приходим к тому, что интегральные представления (37) справедливы для всех точек пространства $q \in Q \equiv Q_{\{Y=\infty, Z=\infty\}, z > 2\pi\delta} \cup Q_\delta \cup Q_{\{Y=\infty, Z=\infty\}, z < -2\pi\delta}$:

$$\begin{aligned}
 E_x(n\kappa; q) = & -(n\kappa)^2 \iint_{Q_\delta} G_0(n\kappa; q, q_0) [1 - \varepsilon_{n\kappa}(q_0, \alpha(q_0), E_x(\kappa; q_0), E_x(2\kappa; q_0), E_x(3\kappa; q_0))] \times \\
 & \times E_x(n\kappa; q_0) dq_0 + \delta_n^1 (n\kappa)^2 \iint_{Q_\delta} G_0(n\kappa; q, q_0) \alpha(q_0) E_x^2(2\kappa; q_0) E_x^*(3\kappa; q_0) dq_0 + \\
 & + \delta_n^3 (n\kappa)^2 \iint_{Q_\delta} G_0(n\kappa; q, q_0) \alpha(q_0) \left\{ \frac{1}{3} E_x^3(\kappa; q_0) + E_x^2(2\kappa; q_0) E_x^*(\kappa; q_0) \right\} dq_0 + E_x^{\text{inc}}(n\kappa; q), \\
 & q \in Q; \quad n = 1, 2, 3.
 \end{aligned} \tag{39}$$

Представления (39) являются системой нелинейных интегральных уравнений для точек $q \in Q_\delta$. Отыскать решение системы интегральных уравнений (конечно, если оно существует) и подставив их в правую часть (39), получим интегральные представления для полных полей дифракции в точках, лежащих вне слоя $q \in Q_{\{Y=\infty, Z=\infty\}, z > 2\pi\delta}$ или $q \in Q_{\{Y=\infty, Z=\infty\}, z < -2\pi\delta}$.

Выражение (39) можно также получить, следуя итерационному подходу, развитому в [14]. Схематично он представим в следующем виде (см. также [1]): в пространстве Q строится последовательность функций $\{E_{x,p}(n\kappa; q)\}_{p=0}^\infty$, $n = 1, 2, 3$, (причем каждая функция, начиная с номера $p = 1$, удовлетворяет граничным условиям и (22)) такая, что предельные функции $E_x(n\kappa; q) = \lim_{p \rightarrow \infty} E_{x,p}(n\kappa; q)$ на частотах $n\kappa$, $n = 1, 2, 3$, удовлетворяют (21)–(23), т. е.:

$$\begin{aligned}
& (\nabla^2 + (n\kappa)^2)E_{x,0}(n\kappa; q) = 0, \quad (\nabla^2 + (n\kappa)^2)E_{x,1}(n\kappa; q) = [1 - \varepsilon_{n\kappa}(q, \alpha(q), E_{x,0}(\kappa; q), E_{x,0}(2\kappa; q), E_{x,0}(3\kappa; q))] \times \\
& \times (n\kappa)^2 E_{x,0}(n\kappa; q) - \delta_n^1 \alpha(q) (n\kappa)^2 E_{x,0}^2(2\kappa; q) E_{x,0}^*(3\kappa; q) - \delta_n^3 \alpha(q) (n\kappa)^2 \left\{ \frac{1}{3} E_{x,0}^3(\kappa; q) + E_{x,0}^2(2\kappa; q) E_{x,0}^*(\kappa; q) \right\}, \dots, \\
& (\nabla^2 + (n\kappa)^2)E_{x,p+1}(n\kappa; q) = [1 - \varepsilon_{n\kappa}(q, \alpha(q), E_{x,p}(\kappa; q), E_{x,p}(2\kappa; q), E_{x,p}(3\kappa; q))] (n\kappa)^2 E_{x,p}(n\kappa; q) - \\
& - \delta_n^1 \alpha(q) (n\kappa)^2 E_{x,p}^2(2\kappa; q) E_{x,p}^*(3\kappa; q) - \delta_n^3 \alpha(q) (n\kappa)^2 \left\{ \frac{1}{3} E_{x,p}^3(\kappa; q) + E_{x,p}^2(2\kappa; q) E_{x,p}^*(\kappa; q) \right\}, \dots; \quad n = 1, 2, 3. \quad (40)
\end{aligned}$$

Система уравнений (40) формально эквивалентна следующей:

$$\begin{aligned}
& E_{x,0}(n\kappa; q) \equiv E_x^{\text{inc}}(n\kappa; q), \\
& E_{x,1}(n\kappa; q) = -(n\kappa)^2 \iint_{Q_\delta} G_0(n\kappa; q, q_0) [1 - \varepsilon_{n\kappa}(q_0, \alpha(q_0), E_{x,0}(\kappa; q_0), E_{x,0}(2\kappa; q_0), E_{x,0}(3\kappa; q_0))] \times \\
& \times E_{x,0}(n\kappa; q_0) dq_0 + \delta_n^1 (n\kappa)^2 \iint_{Q_\delta} G_0(n\kappa; q, q_0) \alpha(q_0) E_{x,0}^2(2\kappa; q_0) E_{x,0}^*(3\kappa; q_0) dq_0 + \\
& + \delta_n^3 (n\kappa)^2 \iint_{Q_\delta} G_0(n\kappa; q, q_0) \alpha(q_0) \left\{ \frac{1}{3} E_{x,0}^3(\kappa; q_0) + E_{x,0}^2(2\kappa; q_0) E_{x,0}^*(\kappa; q_0) \right\} dq_0 + E_{x,0}(n\kappa; q), \dots, \\
& E_{x,p+1}(n\kappa; q) = -(n\kappa)^2 \iint_{Q_\delta} G_0(n\kappa; q, q_0) [1 - \varepsilon_{n\kappa}(q_0, \alpha(q_0), E_{x,p}(\kappa; q_0), E_{x,p}(2\kappa; q_0), E_{x,p}(3\kappa; q_0))] \times \\
& \times E_{x,p}(n\kappa; q_0) dq_0 + \delta_n^1 (n\kappa)^2 \iint_{Q_\delta} G_0(n\kappa; q, q_0) \alpha(q_0) E_{x,p}^2(2\kappa; q_0) E_{x,p}^*(3\kappa; q_0) dq_0 + \\
& + \delta_n^3 (n\kappa)^2 \iint_{Q_\delta} G_0(n\kappa; q, q_0) \alpha(q_0) \left\{ \frac{1}{3} E_{x,p}^3(\kappa; q_0) + E_{x,p}^2(2\kappa; q_0) E_{x,p}^*(\kappa; q_0) \right\} dq_0 + E_{x,0}(n\kappa; q), \dots; \\
& q \in Q; \quad n = 1, 2, 3. \quad (41)
\end{aligned}$$

В (41) устремляя p к бесконечности, получаем (39) – интегральные представления искомого поля дифракции в пространстве Q .

Рассмотрим изменение параметра q в полосе, занятой диэлектрическим слоем $q \in Q_\delta$. Тогда представления (39) преобразуются в систему нелинейных интегральных уравнений относительно искомого рассеянного в нелинейной структуре поля $E_x(n\kappa; q)$, $n = 1, 2, 3$, $q \in Q_\delta$ (см. (24)). При этом система уравнений (39) для искомого квазиоднородных (см. граничные условия) поля $E_x(n\kappa; q|_{q \in \{y, z\}}) = U(n\kappa; z) \exp(i\Phi_{n\kappa} y)$, $n = 1, 2, 3$, $|z| \leq 2\pi\delta$, после подстановки в (39) представления для канонической функции Грина (25) и выражения для диэлектрической проницаемости

$$\varepsilon_{n\kappa}(q_0, \alpha(q_0), E_x(\kappa; q_0), E_x(2\kappa; q_0), E_x(3\kappa; q_0)) \equiv \varepsilon_{n\kappa}(z_0, \alpha(z_0), U(\kappa; z_0), U(2\kappa; z_0), U(3\kappa; z_0))$$

примет вид

$$\begin{aligned}
& U(n\kappa; z) \exp(i\Phi_{n\kappa} y) = \\
& = - \lim_{Y \rightarrow \infty} \left(\frac{i(n\kappa)^2}{4Y\Gamma_{n\kappa}} e^{i\Phi_{n\kappa} y} \int_{-2\pi\delta - Y}^{2\pi\delta} \int_{-Y}^Y e^{i\Gamma_{n\kappa}|z - z_0|} [1 - \varepsilon_{n\kappa}(z_0, \alpha(z_0), U(\kappa; z_0), U(2\kappa; z_0), U(3\kappa; z_0))] U(n\kappa; z_0) dy_0 dz_0 \right) + \\
& + \lim_{Y \rightarrow \infty} \left(\delta_n^1 \frac{i(n\kappa)^2}{4Y\Gamma_{n\kappa}} \exp(i\Phi_{n\kappa} y) \int_{-2\pi\delta - Y}^{2\pi\delta} \int_{-Y}^Y \exp(i\Gamma_{n\kappa}|z - z_0|) \alpha(z_0) U^2(2\kappa; z_0) U^*(3\kappa; z_0) dy_0 dz_0 \right) + \\
& + \lim_{Y \rightarrow \infty} \left(\delta_n^3 \frac{i(n\kappa)^2}{4Y\Gamma_{n\kappa}} \exp(i\Phi_{n\kappa} y) \int_{-2\pi\delta - Y}^{2\pi\delta} \int_{-Y}^Y \exp(i\Gamma_{n\kappa}|z - z_0|) \alpha(z_0) \left\{ \frac{1}{3} U^3(\kappa; z_0) + U^2(2\kappa; z_0) U^*(\kappa; z_0) \right\} dy_0 dz_0 \right) + \\
& + U^{\text{inc}}(n\kappa; z) \exp(i\Phi_{n\kappa} y); \quad |z| \leq 2\pi\delta; \quad n = 1, 2, 3.
\end{aligned}$$

Проинтегрировав выражение в области Q_δ по координате y_0 , приходим к системе нелинейных интегральных уравнений Фредгольма второго рода относительно неизвестных функций $U(n\kappa; z) \in L_2([-2\pi\delta, 2\pi\delta])$:

$$\begin{aligned} U(n\kappa; z) + \frac{i(n\kappa)^2}{2\Gamma_{n\kappa}} \int_{-2\pi\delta}^{2\pi\delta} \exp(i\Gamma_{n\kappa}|z - z_0|) [1 - \varepsilon_{n\kappa}(z_0, \alpha(z_0), U(\kappa; z_0), U(2\kappa; z_0), U(3\kappa; z_0))] U(n\kappa; z_0) dz_0 = \\ = \delta_n^1 \frac{i(n\kappa)^2}{2\Gamma_{n\kappa}} \int_{-2\pi\delta}^{2\pi\delta} \exp(i\Gamma_{n\kappa}|z - z_0|) \alpha(z_0) U^2(2\kappa; z_0) U^*(3\kappa; z_0) dz_0 + \\ + \delta_n^3 \frac{i(n\kappa)^2}{2\Gamma_{n\kappa}} \int_{-2\pi\delta}^{2\pi\delta} \exp(i\Gamma_{n\kappa}|z - z_0|) \alpha(z_0) \left\{ \frac{1}{3} U^3(\kappa; z_0) + U^2(2\kappa; z_0) U^*(\kappa; z_0) \right\} dz_0 + U^{\text{inc}}(n\kappa; z); \\ |z| \leq 2\pi\delta; \quad n = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (42)$$

Здесь $U^{\text{inc}}(n\kappa; z) = a_{n\kappa}^{\text{inc}} \exp[-i\Gamma_{n\kappa}(z - 2\pi\delta)]$, $n = 1, 2, 3$.

Решение исходной задачи (21)–(22), представимое в виде (24). Согласно граничным условиям, оно может быть получено из (42) с использованием пересчетных формул

$$U(n\kappa; 2\pi\delta) = a_{n\kappa}^{\text{inc}} + a_{n\kappa}^{\text{scat}}, \quad U(n\kappa; -2\pi\delta) = b_{n\kappa}^{\text{scat}}; \quad n = 1, 2, 3. \quad (43)$$

Из вывода системы нелинейных интегральных уравнений (42) видим, что (42) можно рассматривать как интегральное представление искомых решений задачи (21)–(23), т. е. решений вида $E_x(n\kappa; y, z) = U(n\kappa; z) \exp(i\Phi_{n\kappa} y)$, $n = 1, 2, 3$ (см. (24)) для точек с координатами $\{(y, z) : -\infty < y < \infty; |z| > 2\pi\delta\}$ вне нелинейного слоя. Действительно, отыскав решение системы нелинейных интегральных уравнений (42) в области $|z| \leq 2\pi\delta$ и подставив его под знак интегралов в (42), получаем явные выражения искомых решений $U(n\kappa; z)$ для точек $|z| > 2\pi\delta$, лежащих вне нелинейного слоя на каждой из частот $n\kappa$, $n = 1, 2, 3$.

Заключение. В резонансной области частот проведен анализ задачи рассеяния пакетов волн на нелинейной слоистой кубически поляризуемой структуре. Рассмотрены пакеты волн, состоящие как из сильных электромагнитных полей, приводящих к генерации волн, так и из слабых полей, не приводящих к генерации кратных гармоник, но оказывающих влияние на процесс рассеяния и генерации волн нелинейной структурой. Проведенные исследования ориентированы на построение алгоритмов анализа резонансного рассеяния и генерации волн кубически нелинейными слоистыми структурами.

Литература

1. Яцик В. В. Задача дифракции на поперечно неоднородном диэлектрическом слое с нелинейностью типа Керра // Электромагнитные волны и электронные системы. 2007. Т. 12. № 1. С. 59–69.
2. Шестопалов Ю. В., Яцик В. В. Резонансное рассеяние электромагнитных волн диэлектрическим слоем с нелинейностью типа Керра // Радиотехника и электроника. 2007. Т. 52. № 11. С. 1285–1300.
3. Кравченко В. Ф., Яцик В. В. Эффекты резонансного рассеяния волн слоистой диэлектрической структурой с нелинейностью типа Керра // Электромагнитные волны и электронные системы. 2007. Т. 12. № 12. С. 17–40.
4. Ангерман Л., Яцик В. В. Математические модели анализа процессов резонансного рассеивания и генерации третьей гармоники при дифракции плоской волны на слоистой кубически поляризуемой структуре // Электромагнитные волны и электронные системы. 2010. Т. 15. № 1. С. 36–49.
5. Butcher, P. N., Nonlinear optical phenomena. Bulletin 200, Engineering Experiment Station. Ohio State University, Columbus. 1965.
6. Angermann, L. and Yatsyk, V. V., Numerical Simulation of the Diffraction of Weak Electromagnetic Waves by a Kerr-Type Nonlinear Dielectric Layer // Electromagnetic Waves and Electronic Systems. 2008. V. 13. № 12. P. 15–30.
7. Яцик В. В. Дифракция на слое и слоистой структуре с положительными и отрицательными восприимчивостями нелинейных сред типа Керра // Успехи современной радиоэлектроники. 2006. № 8. С. 68–80.
8. Schürmann, H. W., Serov, V., and Shestopalov, Y., Reflection and Transmission of a TE-plane Wave at a Lossless Nonlinear Dielectric Film // Physica D. 2001. V. 158. P. 197–215.
9. Smirnov, Y., Schürmann, H.W., and Shestopalov, Y., Propagation of TE-waves in cylindrical nonlinear dielectric waveguides // Physical Review E. 2005. V. 71. P. 0166141–10.
10. Serov, V., Schürmann, H. W., and Svetogorova, E., Integral Equation Approach to Reflection and Transmission of a Plane TE-wave at a (Linear/Nonlinear) Dielectric Film with Spatially Varying Permittivities // J. Phys. A: Math. Gen. 2004. V. 37. P. 3489–3500.
11. Ахмедиев Н. Н., Анкевич А. Солитоны. М.: Физматлит. 2003.
12. Kleinman, D. A., Nonlinear Dielectric Polarization in Optical Media // Phys. Rev. 1962. V. 126. P. 1977–1979.

13. Милославский В. К. Нелинейная оптика. Харьков: ХНУ им. В. Н. Каразина. 2008.
14. Шестопалов В. П., Сиренко Ю. К. Динамическая теория решеток. Киев: Наукова думка. 1989.
15. Сиренко Ю. К., Шестопалов В. П., Яцик В. В. Элементы спектральной теории решеток. Харьков. 1985. (Препр. / АН УССР. Ин-т радиофизики и электрон.; № 266).
16. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 4. Ч. 2. М.: Наука. 1981.

Поступила 15 января 2011 г.

Resonant Scattering and Generation of Waves by Isotropic Non-linear Cubically Polarisable Layered Structure. The Problem Statement

© Authors, 2011

V. V. Yatsyk

In resonant area of frequencies the analysis of a problem of scattering and generation of waves is carried out at excitation isotropic, not magnetic, linearly polarised (E polarisation), nonlinear layered dielectric structure with cubic polarizability of medium a package of the flat waves consisting of flat waves on multiple frequencies. Electromagnetic waves in the non-linear medium with a cubic polarisability are described by an infinite system of non-linear equations. At the study of particular non-linear effects it proves to be possible to restrict the examination to a finite number of equations, and also to leave certain terms in the representation of the polarisation coefficients, which characterize the physical problem under investigation. The analysis of excitation of transverse non-homogeneous nonlinear dielectric layered structure with a package of quasi-homogeneous electromagnetic fields has allowed receiving down a condition of phase synchronism of waves. Having added classical statement of a problem by a condition of phase synchronism, in strict statement the boundary-value problem diffraction of a package of flat waves on nonlinear layered dielectric structure taking into account generation of the third harmonic is considered. The investigated boundary-value problem is reduces to system one-dimensional (along structure height) nonlinear integrated Fredholm equations of the second sort concerning making complex Fourier amplitudes of the scattered and generated fields by a nonlinear layer.

Уважаемые читатели!

В Издательстве «Радиотехника» вышла в свет книга

В.Л. Гостюхин, В.Н. Трусов, А.В. Гостюхин

АКТИВНЫЕ ФАЗИРОВАННЫЕ АНТЕННЫЕ РЕШЕТКИ

Под редакцией доктора технических наук, профессора *В.Л. Гостюхина*

Издание 3-е, переработанное и дополненное

Книга посвящена общим вопросам теории активных фазированных антенных решеток. Приведены структурная и различные функциональные схемы построения приемопередающих АФАР. Решена задача синтеза оптимального амплитудного распределения по раскрытию АФАР в режиме передачи при наличии ограничений на максимальную амплитуду выходных сигналов активных модулей и энергетический потенциал. На основе синтеза канала приема определен коэффициент усиления активных модулей, обеспечивающий при различных амплитудных распределениях по раскрытию минимально возможное значение удельной спектральной плотности мощности шума. Разработаны методы электродинамического и статистического анализов АФАР с учетом электродинамических свойств антенного полотна и характеристик АМ, в общем случае – нелинейных. Рассмотрен метод спектрального (и спектрально-корреляционного) анализа пространственно-частотной (пространственно-временной) структуры поля излучения при наличии временных и частотных искажений непрерывных и импульсных сигналов. Проведено сравнение активных и пассивных ФАР по спектральным характеристикам, характеру распределения побочного излучения при наличии аддитивной и мультипликативной внутрисистемных помех, а также отношению шум/сигнал в режиме передача-прием. Показаны особенности использования математического моделирования на различных этапах проектирования АФАР. На основе метода экспертных оценок осуществлена структурная оптимизация одного из основных узлов АФАР – активных модулей. Изложены вопросы разработки математических моделей и численного моделирования процесса восстановления суммарных и разностных характеристик направленности АФАР в реальном масштабе времени при отказах активных модулей.

Для научных работников, инженеров, специализирующихся в области антенных систем. Может быть полезна аспирантам и студентам старших курсов радиотехнических специальностей вузов.

По вопросам заказа и приобретения книг обращаться по адресу:

107031 г. Москва, Кузнецкий мост, 20/6. Тел./факс: (495) 625-92-41, тел.: (495) 625-78-72, 621-48-37

R-функции, атомарные функции, вейвлеты, фракталы и хаос

УДК 519.63+517.95

Итерационные алгоритмы численного решения дифференциальных уравнений с линейно преобразованным аргументом

© Авторы, 2011

Я. Ю. Коновалов – ст. преподаватель, кафедра «Высшая математика» ФН-1, МГТУ им. Н.Э. Баумана
E-mail: kon20002000@mail.ru

Рассмотрен итерационный подход к отысканию финитных решений дифференциальных уравнений с линейно преобразованным аргументом; показано, что он применим для вычисления атомарных функций, которые также являются финитными решениями дифференциальных уравнений со смещенным аргументом; предложена процедура построения численных алгоритмов решения таких уравнений; приведены примеры применения алгоритмов к решению конкретных уравнений.

Ключевые слова: атомарные функции, итерационные методы, дифференциальные уравнения со смещенным аргументом.

Iterative approach to computation of compactly supported solutions of differential equations with linearly transformed argument is considered. It is applicable to computation of atomic functions which are compactly supported solutions of differential equations with linearly transformed argument too. Procedure of construction numerical methods for solving such equations is presented. Examples of application of algorithms to equations are demonstrated.

Keywords: atomic functions, iterative methods, differential equations with shifted argument.

Введение. Атомарные функции (АФ), предложенные в конце шестидесятих годов прошлого столетия В.Л. и В.А. Рвачевыми, нашли широкое применение в различных областях науки и техники [1–6]. Так как АФ не являются аналитическими, то для их вычисления нельзя использовать ряды Тейлора. Обычно для нахождения значений АФ применяется разложение в ряд Фурье. Кроме того, для вычисления АФ также можно использовать разложение в ряд Котельникова, ряды по базисным полиномам и ряды специального вида. Однако эти способы имеют определенные недостатки. Согласно [1–6] АФ являются финитными решениями дифференциальных уравнений со смещенным аргументом вида

$$L(y) = \sum_{n=0}^N c_n y(ax + b_n), \quad a > 1, \quad (1)$$

где $L(y)$ – обыкновенный дифференциальный оператор.

В работе предложен новый итерационный подход к нахождению финитных решений дифференциальных уравнений с линейно преобразованным аргументом следующего вида:

$$y' = \sum_{n=0}^N c_n y(a_n x + b_n), \quad a_n > 1. \quad (2)$$

Если $a_n = a$, $n = 0, \dots, N$, то решение уравнения (2) является АФ.

Вычисление атомарной функции $up(x)$ методом Фурье. Рассмотрим АФ $up(x)$ (рис. 1, а). Из [1–6] следует, что функция $up(x)$ определена на отрезке $[-1; 1]$, имеет максимум в точке $x = 0$, $up(0) = 1$ и удовлетворяет уравнению

$$y' = 2(y(2x + 1) - y(2x - 1)). \quad (3)$$

Для решения уравнения (3) применялся метод Фурье. Рассмотрим уравнение

$$y' = a(y(2x + 1) - y(2x - 1)). \quad (4)$$

Его преобразование Фурье имеет вид

$$it\hat{y}(t) = a \left(\frac{1}{2} \hat{y}\left(\frac{t}{2}\right) e^{i\frac{t}{2}} - \frac{1}{2} \hat{y}\left(\frac{t}{2}\right) e^{-i\frac{t}{2}} \right). \quad (5)$$

Выразим $\hat{y}(t)$ через $\hat{y}\left(\frac{t}{2}\right)$:

$$\hat{y}(t) = \frac{a}{it} \left(\frac{1}{2} e^{i\frac{t}{2}} - \frac{1}{2} e^{-i\frac{t}{2}} \right) \hat{y}\left(\frac{t}{2}\right) = F\left(\frac{t}{2}\right) \hat{y}\left(\frac{t}{2}\right),$$

где $F(t) = \frac{a}{2} \left(\frac{\sin(t)}{t} \right) = \frac{a}{2} \text{sinc}(t)$.

Так же $\hat{y}\left(\frac{t}{2}\right)$ выразим через $\hat{y}\left(\frac{t}{4}\right)$, при этом получим

$$\hat{y}(t) = F\left(\frac{t}{2}\right) \hat{y}\left(\frac{t}{2}\right) = F\left(\frac{t}{2}\right) F\left(\frac{t}{4}\right) \hat{y}\left(\frac{t}{4}\right) = F\left(\frac{t}{2}\right) F\left(\frac{t}{4}\right) F\left(\frac{t}{8}\right) \hat{y}\left(\frac{t}{8}\right) = \dots \quad (6)$$

Таким образом, $\hat{y}(t)$ представляется в виде бесконечного произведения

$$\hat{y}(t) = \hat{y}(0) \prod_{k=1}^{\infty} F(t \cdot 2^{-k}), \quad \hat{y}(0) = 1. \quad (7)$$

Для сходимости полученного бесконечного произведения необходимо, чтобы $a = 2$. В случае, если $a \neq 2$, решений нет. Используя преобразование Фурье (7), а также то, что АФ $\text{up}(x)$ является четной функцией с носителем $[-1; 1]$, составим для нее ряд Фурье вида

$$\text{up}(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{m=1}^{\infty} \text{sinc}(\pi k 2^{-m}) \cos(\pi k x).$$

Решение уравнений для других АФ осуществляется аналогичным способом.

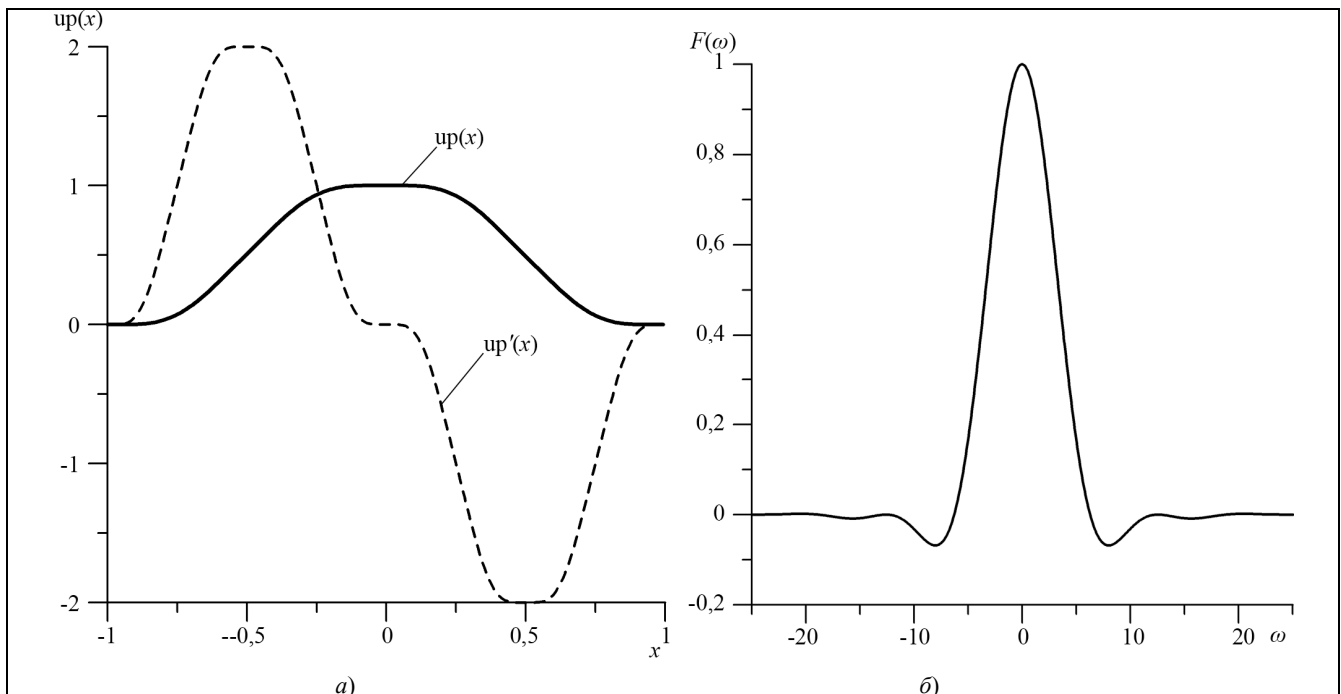


Рис. 1. АФ $\text{up}(x)$, ее производная (а) и преобразование Фурье (б)

Вычисление атомарной функции $\text{up}(x)$ итерационным методом. Опишем итерационный подход к решению уравнения (3). Рассмотрим оператор

$$A(y) = 2 \int_{-1}^x (y(2\eta + 1) - y(2\eta - 1)) d\eta. \quad (8)$$

Перечислим его основные свойства. Оператор A переводит четные функции в четные, обладает свойством сохранения площади, производные $\text{up}^{(n)}(x)$ являются собственными функциями оператора A с собственными значениями $\lambda_n = 2^{-n}$.

Так как оператор A – сжимающий [7–9], а АФ $\text{up}(x)$ – его неподвижная точка, то по принципу сжимающих отображений [10] последовательность $\{f_n\}$, где $f_{n+1} = A(f_n)$, будет сходиться к $\text{up}(x)$. Рассмотрим практические способы построения последовательности $\{f_n\}$.

При первом способе [7] на основе оператора (4) строится система совершенных сплайнов: $f_0 \equiv \frac{1}{2}$, f_n – сплайны степени n , состоящие из 2^n многочленов. Коэффициенты сплайнов вычисляются аналитически. Применение совершенных сплайнов для практических вычислений неудобно из-за быстрого роста степеней составляющих их многочленов.

Второй способ – численное интегрирование. Функция f_n задается своими значениями в точках сетки. Значения функции f_{n+1} находятся численно как значения интеграла (8). Важным недостатком этого способа является накопление погрешности численного интегрирования при приближении к концу отрезка. Это может приводить к искажению функции, нарушению ее симметрии и другим ошибкам. Преимуществом способа является простота его реализации для любой правой части.

Третьим способом является построение последовательностей специального вида и их суммирование. При этом вычисления осуществляются в целых числах и погрешность интегрирования не накапливается. Опишем применение третьего способа к уравнению (3). Пусть f_n – ступенчатая функция, заданная последовательностью длины k (тогда ширина одной ступеньки $2/k$). Назовем эту последовательность исходной. Пристроим к ней такую же последовательность, в которой знаки всех членов заменены на противоположные, затем просуммируем последовательность. Получим последовательность вдвое большей длины, которая после нормировки будет задавать f_{n+1} (с шириной ступеньки $1/k$). Операция нормировки представляет собой умножение на число, поэтому ее можно осуществить только на последнем шаге, а вычисления выполнять в целых числах. Пример работы алгоритма приведен в табл. 1. В [11–13] описан другой вариант алгоритма.

Таблица 1. Вычисление АФ $\text{up}(x)$ при помощи итерационного алгоритма

1																	
1	-1																
1	0																
1	0																
1	0	-1	0														
1	1	0	0														
1	1	0	0	-1	-1	0	0										
1	2	2	2	1	0	0	0										
1	2	2	2	1	0	0	0	-1	-2	-2	-2	-1	0	0	0	0	0
1	3	5	7	8	8	8	8	7	5	3	1	0	0	0	0	0	0

За n шагов алгоритм позволяет вычислить значения $\text{up}(x)$ в 2^n равноотстоящих точках, используя меньше чем 2^{n+1} операций сложения и 2^n операций умножения для нормировки на последнем шаге. Нормировочный коэффициент при этом равен $2^{1+2+\dots+(n-2)}$. Согласно оценке [7] максимум погрешности $\delta_n = \max|\text{up}(x) - f_n(x)|$ убывает как $C \cdot 4^{-n}$.

Далее рассматривается обобщение алгоритма на другие АФ. Отметим, что во всех случаях оператор, неподвижной точкой которого является искомая АФ, представляет собой композицию сложения сдвигов сжатий f_n в соответствии с правой частью уравнения и интегрирования. Соответственно, один шаг алгоритма состоит из преобразования исходной последовательности в соответствии со структурой правой части уравнения (операция продолжения последовательности) и ее суммирования. Для каждой АФ строится своя операция продолжения последовательности.

Вычисление атомарной функции $\text{up}_m(x)$ итерационным методом. АФ $\text{up}_m(x)$ является обобщением АФ $\text{up}(x)$ и представляет собой финитное решение уравнения

$$y' = 2 \sum_{k=1}^m (y(2mx + 2m - 2k + 1) - y(2mx - 2k + 1)) \tag{9}$$

с носителем $[-1,1]$, единичным максимумом и единичной площадью [1–6]. В соответствии с (9) $up_m(x)$ является неподвижной точкой оператора

$$A(y) = 2 \int_{-1}^x \sum_{k=1}^m (y(2mt + 2m - 2k + 1) - y(2mt - 2k + 1)) dt. \tag{10}$$

Отличие от АФ $up(x)$ состоит в том, что вместо одного положительного и одного отрицательного слагаемого правая часть уравнения (9) составлена из $2m$ слагаемых, первые m из которых берутся с плюсом, а оставшиеся с минусом. Определим операцию продолжения последовательности следующим образом. Пусть построена последовательность длины k (исходная). Составим новую последовательность длины $k \cdot 2m$ из m участков повторяющих исходную последовательность и m участков повторяющих исходную последовательность, взятую с противоположным знаком. Тогда оператору A будет соответствовать композиция этой операции и операции суммирования последовательности. Пример вычисления для АФ $up_2(x)$ приведен в табл. 2. Графики АФ $up_2(x)$ и $up_3(x)$ приведены на рис. 2.

Таблица 2. Вычисление АФ $up_2(x)$ при помощи итерационного алгоритма

1																
1	1	-1	-1													
1	2	1	0													
1	2	1	0	1	2	1	0	-1	-2	-1	0	-1	-2	-1	0	
1	3	4	4	5	7	8	8	7	5	4	4	3	1	0	0	

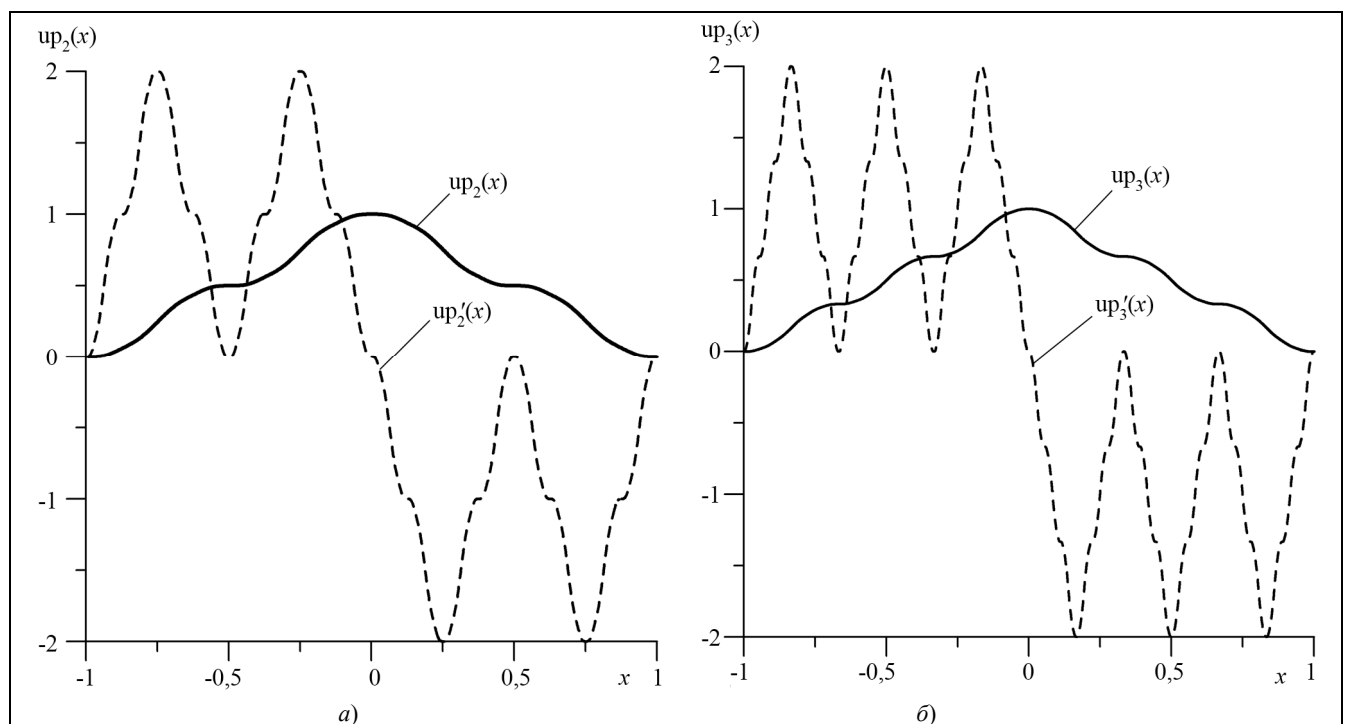


Рис. 2. АФ $up_2(x)$ и ее производная (а), АФ $up_3(x)$ и ее производная (б)

Вычисление атомарной функции $fup_n(x)$ итерационным методом. Важной АФ является $fup_n(x)$. По определению [1–6] $fup_n(x)$ – финитное решение дифференциального уравнения со смещенным аргументом

$$y' = 2^{1-n} \sum_{k=0}^{n+2} (C_{n+1}^k - C_{n+1}^{k-1}) y \left(2x + \frac{n+2}{2} - k \right) \tag{11}$$

с носителем $[-(n+2)/2; (n+2)/2]$.

Рассмотрим итерационный способ вычисления $fup_n(x)$ на примере функции $fup_2(x)$. По определению $fup_2(x)$ является решением уравнения (11) при $n = 2$:

$$y'(x) = \frac{1}{2} (y(2x+2) + 2y(2x+1) - 2y(2x-1) - y(2x-2)) \tag{12}$$

отрезок $[-1;1]$. Производная составлена из трех участков, первый из которых имеет длину 1, оставшиеся два – по 0,5. Пусть построена последовательность длины 4^n (исходная). Составим последовательность длины 4^{n+1} из трех участков. Первый состоит из дважды повторяющихся отсчетов исходной последовательности, второй и третий из отсчетов исходной последовательности, умноженных на -1 . Один шаг алгоритма будет представлять собой композицию описанной процедуры продолжения последовательности и суммирования. Пример вычислений представлен в табл. 6. Графики решения уравнения (19) и его производной изображены на рис. 6,а.

Таблица 6. Решение уравнения (19) при помощи итерационного алгоритма

1																			
1	1																		
		-1																	
			-1																
1	1	-1	-1																
1	2	1	0																
1	1	2	2	1	1	0	0												
								-1	-2	-1	0								
												-1	-2	-1	0				
1	1	2	2	1	1	0	0	-1	-2	-1	0	-1	-2	-1	0				
1	2	4	6	7	8	8	8	7	5	4	4	3	1	0	0				

исходная последовательность
 1-е слагаемое правой части
 2-е слагаемое правой части
 3-е слагаемое правой части
 правая часть уравнения
 результат суммирования

Рассмотрим еще один пример применения итерационного алгоритма к подобным уравнениям. Для уравнения

$$f'(x) = a \left(2f\left(\frac{5}{3}x\right) - 3f\left(\frac{5}{2}x - \frac{15}{2}\right) \right) \tag{21}$$

операция продолжения последовательности устроена следующим образом. Пусть построена последовательность длины l (исходная). Первое слагаемое правой части (21) представим последовательностью длины $3l$, состоящей из элементов исходной последовательности, повторенных 3 раза и умноженных на 2. Продолжим последовательность отсчетами исходной последовательности, повторенными дважды и умноженными на -3 . Получим последовательность длиной $5l$. Далее будем чередовать суммирование последовательности и продолжение по описанному выше правилу. Пример вычислений приведен в табл. 7. Графики решения уравнения (21) и его производной приведены на рис. 6,б.

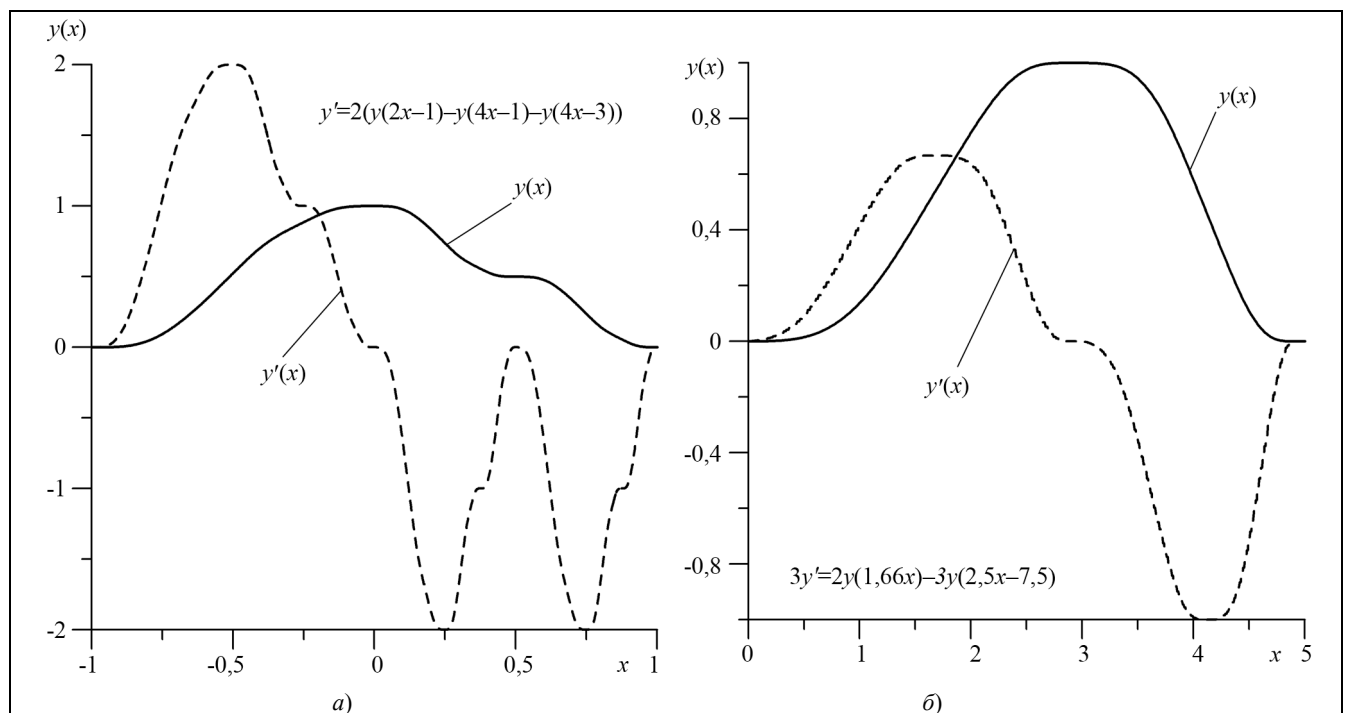


Рис. 6. Решения уравнений (19) (а) и (21) (б)

Миллиметровые и субмиллиметровые волны

УДК 621.372

Излучатель миллиметрового диапазона и его использование в диэлектromетрии

© Авторы, 2011

Н. Л. Евич – гл. конструктор, Институт проблем машиностроения НАН Украины.

E-mail: shuben@ipmach.kharkov.ua

Ю. В. Прокопенко – д.ф.-м.н., ст. науч. сотрудник, Институт радиофизики и электроники

им. А.Я. Усикова НАН Украины

E-mail: prokopen@ire.kharkov.ua

Приведены результаты расчетов поля, возбуждаемого радиоволновым излучателем с изменяемой геометрией, в объекте контроля в пределах промежуточной и дальней зон дифракции, а также результаты экспериментальной проверки степени адекватности математической модели излучателя макету реального физического устройства; определены условия, гарантирующие минимизацию погрешностей контроля при проведении измерений в промежуточной зоне дифракции.

Ключевые слова: радиоволновой контроль, диэлектromетрия, толщинометрия, промежуточная зона, дальняя зона.

The outcomes of calculations of a field provoked by the radiowave radiator with changing (variable, altering) geometry in object of the control within the limits of distant and intermediate zones of diffraction are adduced. The results of experimental check of the degree of adequacy by mathematical model of the radiator to the model of the actual physical device are submitted. The conditions which guarantee minimization of the measuring error at realization of the measurements in the intermediate zone of diffraction are determined.

Keywords: radiowave control, dielectric measurement, thickness measurement, intermediate zone, distant zone.

Введение. Расширение сферы применения в современном машиностроении новых прогрессивных конструкционных материалов (таких как полимерные композиционные материалы, стеклоорганопластики, пенные полимеры и им подобные) требует разрабатывать и создавать новые методы и средства радиоволнового неразрушающего контроля, учитывающие их специфику. Постоянное внимание уделяется задачам синтеза структур с заданными значениями коэффициентов пропускания или поглощения в определенном диапазоне электромагнитных волн при разработке радиопрозрачных или радиопоглощающих материалов и покрытий используемых, например, в рамках технологий типа «Стелс» [1]. Решение подобных задач невозможно без знания величин электрофизических параметров используемых конструкционных материалов и осложнено отсутствием их стандартных эталонов, особенно в миллиметровом диапазоне электромагнитных волн, что крайне затрудняет качественное метрологическое обеспечение перечисленных проблем. В связи с этим разработка элементной базы, исследование особенностей ее применения, разработка новых методов и метрологическое обеспечение измерений в миллиметровом диапазоне электромагнитных волн вызывают большой интерес [2, 3].

Радиоволновой неразрушающий технологический контроль обычно осуществляется в форме толщинометрии, дефектометрии или дефектоскопии [4–6]. Решение задач радиоволновой толщинометрии предполагает одновременное определение нескольких параметров объекта контроля, как геометрических (например, толщин), так и электрофизических величин (диэлектрической и магнитной проницаемостей материалов). Поэтому в настоящее время являются актуальными разработка метода радиоволновой диэлектromетрии, который мог бы использоваться для синтеза методов дефектометрии и дефектоскопии с последующей их адаптацией для решения конкретных задач технологического контроля, а также решение задач, ориентированных на автоматическое управление параметрами технологического процесса с целью устранения выявленных нарушений.

Очевидным способом уменьшения погрешностей контроля является уменьшение рабочей длины волны. Проведение измерений в полосе частот наряду с переходом в более высокочастотную область позволяет успешно решать не только задачи послойной интроскопии [7, 8], но и осуществлять контроль динамики различных физико-механических процессов [9]. Повышение точности и достоверности контроля, достигаемое таким образом, возможно только до определенных пределов, обусловленных появлением непредсказуемых дифракционных эффектов, вызываемых структурной неоднородностью полимерных композицион-

ных материалов и тензорным характером их электрофизических параметров. Решение задач контроля усредненных электрофизических параметров материалов возможно при использовании рабочей длины волны, превышающей характерную величину структурных неоднородностей и соответствующей методике измерений, обеспечивающей усреднение электромагнитного поля в пределах достаточно большого объема объекта контроля [10]. Такой подход позволяет проводить измерения с погрешностями $\sim 10\%$ в сантиметровом диапазоне длин электромагнитных волн ($f \approx 10$ ГГц), но при этом встречается все возрастающие проблемы при его реализации в более коротковолновой области.

Альтернативным способом, позволяющих повысить точность и достоверность контроля, является использование радиоволнового излучателя миллиметрового диапазона с изменяемой геометрией [11 – 13]. Рабочая длина волны и поляризация зондирующего поля при этом выбирается таким образом, чтобы диэлектрик со сложной гетерогенной структурой, в электродинамическом смысле, был эквивалентен однородному диэлектрику с некоторым эквивалентным значением проницаемостей. Кроме того, зона, в пределах которой проводится усреднение поля, имеет линейную протяженность $\sim 13\lambda_0$, где λ_0 – длина волны в свободном пространстве. Это обеспечивает получение воспроизводимых результатов.

Цель работы – анализ выражения для комплексного множителя диаграммы направленности предложенного радиоволнового излучателя в промежуточной и дальней зонах дифракции в приближении заданного тока; сопоставление теоретически рассчитанных данных с данными, полученными путем экспериментального моделирования; анализ возможности и определения условий максимально эффективного использования радиоволнового излучателя с изменяемой геометрией в целях радиоволновой диэлектromетрии.

Комплексный множитель диаграммы направленности излучателя в дальней и промежуточной зонах дифракции. Радиоволновой излучатель миллиметровых волн с изменяемой геометрией позволяет осуществлять сканирование диаграммой направленности (ДН) излучатель путем пропорционального изменения длины его плеч и разности фаз возбуждающих их полей. В результате этого поведение поля, формируемого излучателем в контролируемой диэлектрической структуре, имеет такие особенности, которые позволяют успешно решать задачи ε -метрии, толщинометрии, дефектометрии и дефектоскопии, а также могут служить основой для синтеза других радиоволновых методов неразрушающего контроля и диагностики. К таким особенностям поведения поля следует отнести, в первую очередь, наличие функциональной зависимости между величиной периода вариации поля и углом съема электромагнитного излучения, прошедшего через объект контроля. Излучатель, осуществляющий такое сканирование ДН, выполнен на основе диэлектрического волновода (ДВ) [11]. Предложенный излучатель представляет собой, по сути, преобразователь неоднородной поверхностной волны ДВ в объемную [14, 15], один из вариантов реализации которого, когда контролируемый диэлектрик имеет прямой двугранный угол, схематически изображен на рис. 1. Отмеченная специфика поведения поля обусловлена изменением величины плеча и фазировки возбуждающего излучателем поля только вдоль одной координаты, отсчитываемой вдоль оси антенны, что позволяет упростить его математическое моделирование.

Постановка задачи. Однородный изотропный магнитнеактивный ($\mu = 1$) диэлектрик с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon''$ (где ε' и ε'' – действительная и мнимая части диэлектрической проницаемости соответственно) занимает полупространство $z > 0$ (рис. 2).

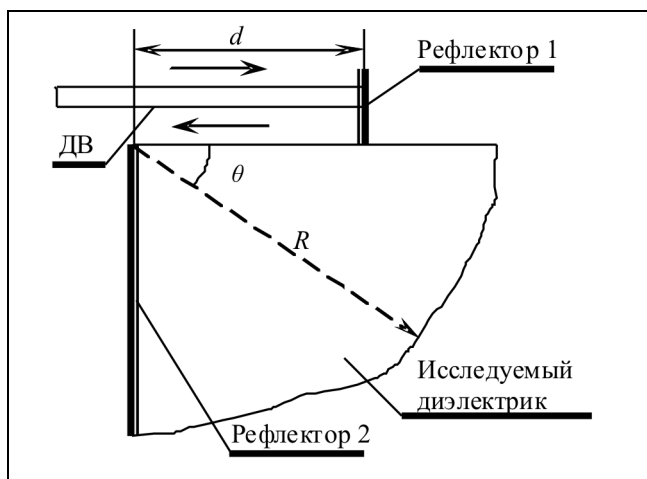


Рис. 1. Излучатель с изменяемой геометрией

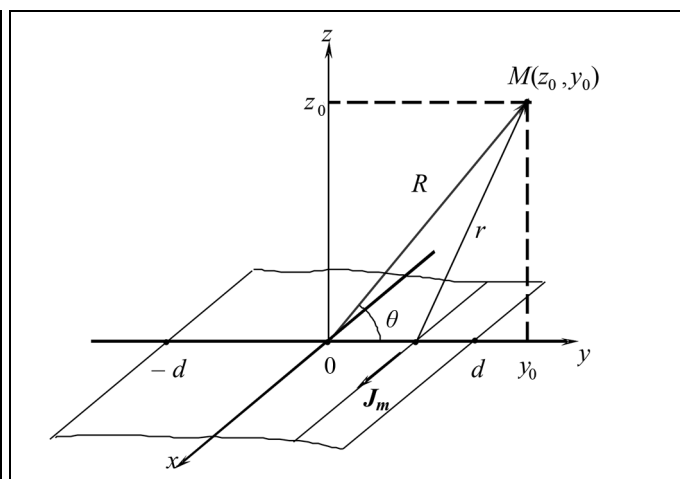


Рис. 2. Геометрия задачи

Поле в диэлектрике возбуждается излучателем, находящемся в плоскости $z = 0$, представляющем собой две ленты с непрерывно распределенными на них элементарными излучателями – нитями магнитного тока с постоянной линейной плотностью $\rho(y) \equiv 1$, направление которых совпадает с направлением оси OX , а фаза может быть записана в виде

$$\begin{cases} F_1(y) = i\eta y, \\ F_1'(y) = 2i\eta d - i\eta y \end{cases} \text{ для ленты } 0 \leq y \leq d, \quad \begin{cases} F_2(y) = -i\eta y, \\ F_2'(y) = 2i\eta d + i\eta y \end{cases} \text{ для ленты } -d \leq y \leq 0, \quad (1)$$

где $\eta = \frac{2\pi}{\lambda_b}$ и $k = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ – волновые числа; λ_0 и λ_b – длины волн в свободном пространстве и в возбуждающем излучателе в виде диэлектрического волновода соответственно;

Зависимость полей и токов от времени считаем пропорциональной $e^{-i\omega t}$. Решение внешней задачи – нахождение поля такого излучателя в некоторой точке $M(z_0, y_0)$ во внешней по отношению к излучателю области в приближении заданных токов [16], приводит к следующему выражению:

$$U = \frac{J_m e^{i\eta d}}{2d} \left\{ \int_{-d}^0 H_0^{(1)} \left[k \sqrt{z_0^2 + (y_0 - y)^2} \right] \left[e^{i\eta(y+d)} + e^{-i\eta(y+d)} \right] dy + \int_0^d H_0^{(1)} \left[k \sqrt{z_0^2 + (y_0 - y)^2} \right] \left[e^{i\eta(y-d)} + e^{-i\eta(y-d)} \right] dy \right\}, \quad (2)$$

где J_m – амплитуда элементарного магнитного тока; d – длина плеча излучателя; $H_0^{(1)}$ – функция Ханкеля первого рода нулевого порядка; y_0, z_0 – координаты точки наблюдения, находящейся в плоскости $x = 0$ в области $z > 0$, заполненной диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε , y – координата точки, находящейся на апертуре антенны в плоскости $x = 0$.

По выражению (2) можно рассчитать амплитуду и фазу электромагнитного поля излучателя с изменяемой геометрией в любой точке полупространства $z > 0$.

Специфика задач толщинометрии, дефектометрии и дефектоскопии заключается в том, что взаимодействие зондирующего поля с гранью объекта контроля или с дефектом его структуры зачастую происходит в промежуточной зоне дифракции. Поэтому представляет интерес сопоставительный анализ поведения поля, возбуждаемого излучателем в контролируемом диэлектрике на расстояниях, соответствующих как дальней, так и промежуточной зонам дифракции.

Представления полей, соответствующие промежуточной и дальней зонам, получаются из выражения (2) путем соответствующих предельных переходов. Так, для случая дальней зоны, зоны дифракции Фраунгофера, цилиндрические функции заменяем их асимптотическими представлениями [17], в которых при определении фазы из ряда Маклорена для вектора \mathbf{r} , проведенного от некоторой точки, находящейся на апертуре антенны, до точки наблюдения, удерживаем два, а при определении амплитуды – один член разложения. Из теории антенн известно, что поле излучателя в дальней зоне представимо в виде произведения поля элементарного излучателя, находящегося в центре антенны, на комплексный множитель системы [16], который в представлении для дальней зоны может быть записан в виде

$$F(\theta, d, \varepsilon, R) = \frac{I_m \left[\sqrt{\varepsilon} \left(\frac{R}{\lambda_0} - \frac{1}{8} \right) \right]}{\sqrt{\pi^2 \varepsilon \left(\frac{R}{\lambda_0} \right)}} e^{\frac{2\pi i}{\beta} \left(\frac{d}{\lambda_0} \right)} \left[\Phi_+(\theta, d, \varepsilon, R) + \Phi_-(\theta, d, \varepsilon, R) \right], \quad (3)$$

где

$$\Phi_{\pm}(\theta, d, \varepsilon, R) = \sin \left\{ \pi \left(\frac{1}{\beta} \pm \sqrt{\varepsilon} \cos \theta \right) \left(\frac{d}{\lambda_0} \right) \right\} \cos \left\{ \pi \left(\frac{1}{\beta} \mp \sqrt{\varepsilon} \cos \theta \right) \left(\frac{d}{\lambda_0} \right) \right\} / \pi \left(\frac{1}{\beta} \pm \sqrt{\varepsilon} \cos \theta \right) \left(\frac{d}{\lambda_0} \right); \quad \beta = \frac{\lambda_b}{\lambda_0}.$$

Для случая промежуточной зоны дифракции аргументы функций Ханкеля достаточно велики, что позволяет заменить функции асимптотическими представлениями. При определении амплитуды и фазы необходимо использовать точное выражение для \mathbf{r} . В результате поле излучателя с изменяемой геометрией в промежуточной зоне может быть записано следующим образом:

$$F(\theta, d, \varepsilon, R) = \frac{e^{\frac{2\pi i}{\beta} \left(\frac{d}{\lambda_0} \right) \left(\frac{d}{\lambda_0} \right)}}{\left(\frac{d}{\lambda_0} \right)} \int_0^{\left(\frac{d}{\lambda_0} \right)} \left[F_+(\theta, d, \varepsilon, R) + F_-(\theta, d, \varepsilon, R) \right] \cos \frac{2\pi}{\beta} \left[\left(\frac{y}{\lambda_0} \right) - \left(\frac{d}{\lambda_0} \right) \right] d \left(\frac{y}{\lambda_0} \right), \quad (4)$$

где

$$F_{\pm}(\theta, d, \varepsilon, R) = \exp \left\{ 2\pi i \sqrt{\varepsilon} \left(\frac{R}{\lambda_0} \right) \left[\sqrt{1 + \left(\frac{y}{R} \right)^2} \pm 2 \left(\frac{y}{R} \right) \cos \theta - 1 \right] \right\} / \sqrt{1 + \left(\frac{y}{R} \right)^2} \pm 2 \left(\frac{y}{R} \right) \cos \theta.$$

По формулам, приведенным выше, были проделаны соответствующие численные расчеты. В расчетах учитывалось наличие мнимой части диэлектрической проницаемости $\varepsilon = 2,557 \cdot (1 + i \cdot 3,27 \cdot 10^{-3})$ (данные взяты из [18]), а при построении рельефов использовалась двумерная кубическая сплайновая интерполяция. На рис. 3 и 4 представлен общий вид поверхностей квадрата модуля комплексного множителя ДН излучателя, описываемых функцией $d^2 |F(\theta, d, \varepsilon, R)|^2$, соответствующих выражению (4) и учитывающих линейное нарастание суммарного потока мощности, излучаемой в контролируемый диэлектрик с ростом плеча излучателя d , которая вычислена в точках наблюдения на расстояниях $38\lambda_0$ и $18\lambda_0$. Эти расстояния соответствуют промежуточной зоне дифракции. Кроме того, для этих расстояний проведены соответствующие экспериментальные исследования макета реального физического устройства с использованием объекта контроля, изготовленного из плексигласа, величина диэлектрической проницаемости которого достаточно хорошо измерена различными методами [18].

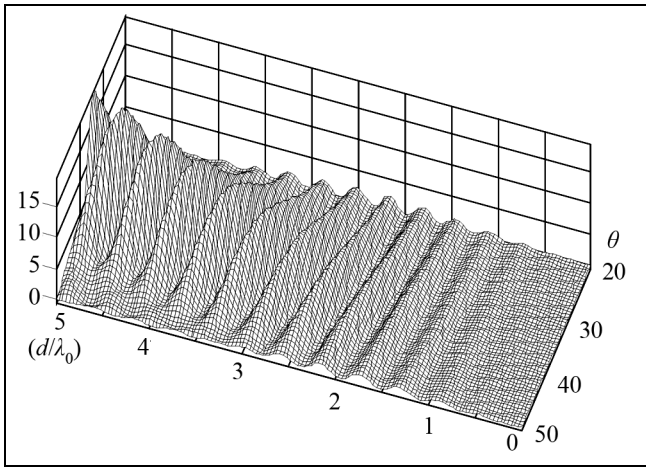


Рис. 3. Общий вид рельефа функции $d^2 |F(\theta, d, \varepsilon, R)|^2$ при параметрах $\beta = 0,7745$; $\lambda_0 = 3,9713$ мм; $\varepsilon = 2,557 \cdot (1 + i \cdot 3,27 \cdot 10^{-3})$; $R = 38\lambda_0$ в координатах θ и (d/λ_0)

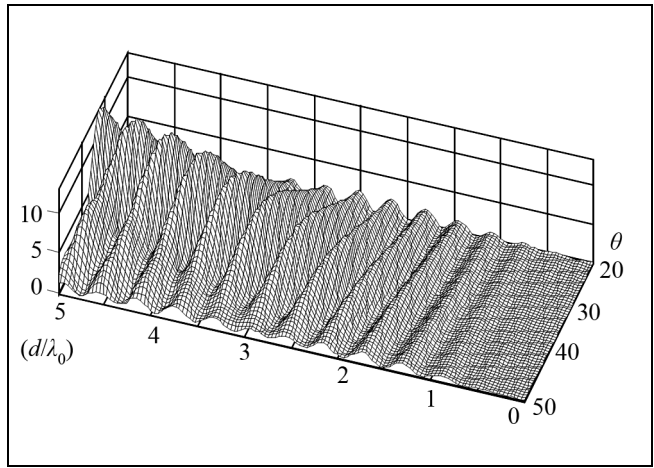


Рис. 4. Общий вид рельефа функции $d^2 |F(\theta, d, \varepsilon, R)|^2$ при параметрах $\beta = 0,7745$; $\lambda_0 = 3,9713$ мм; $\varepsilon = 2,557 \cdot (1 + i \cdot 3,27 \cdot 10^{-3})$; $R = 18\lambda_0$ в координатах θ и (d/λ_0)

На рис. 5 в координатах θ и (d/λ_0) приводится картина положения минимумов функции $d^2 |F(\theta, d, \varepsilon, R)|^2$, рассчитанной теоретически, для расстояний до точки наблюдения в $1000\lambda_0$ (дальняя зона), $38\lambda_0$ и $18\lambda_0$ соответственно. Как видно из рис. 3–5, уменьшение расстояния до точки наблюдения приводит, во-первых, к тому, что минимумы функции $d^2 |F(\theta, d, \varepsilon, R)|^2$ с некоторого значения (d/λ_0) перестают достигать нуля, и, во-вторых, к сдвигу положения минимумов, соответствующих промежуточной зоне дифракции относительно их положений, соответствующих дальней зоне.

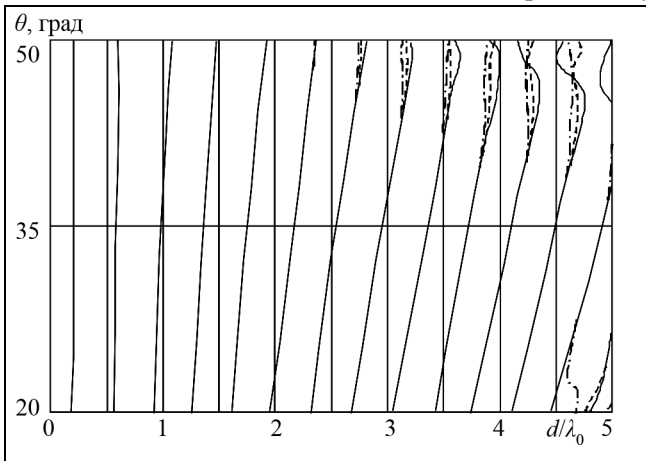


Рис. 5. Положения минимумов функции $d^2 |F(\theta, d, \varepsilon, R)|^2$, соответствующих расстояниям до точки наблюдения в $1000\lambda_0$, $38\lambda_0$ и $18\lambda_0$ в координатах θ и (d/λ_0)

«Приподнимание» минимумов объясняется тем, что в промежуточной зоне дифракции амплитуды полей элементарных излучателей в разных плечах антенны оказываются неравными из-за неравенства соответствующих им радиус-векторов, а сдвиги положения минимумов по координате (d/λ_0) объясняются биениями, возникающими при сложении гармонических функций (3) с соизмеримыми периодами в областях малых сигналов. Поэтому даже в случае сложения полей элементарных излучателей в

противофазе, результирующее поле может не достигать нуля в минимуме, причем тенденция усугубляется по мере увеличения мнимой части ε'' .

Формирование поля радиоволнового излучателя с изменяемой геометрией в среде распространения. Одна из задач настоящей работы – установить степень соответствия описанной теоретической модели реальному макету излучателя с изменяемой геометрией.

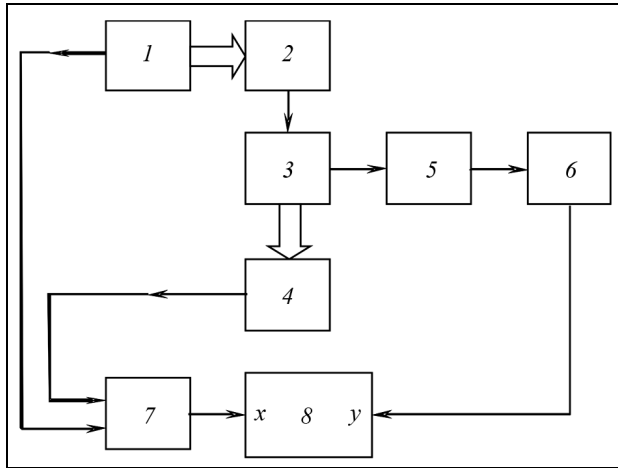


Рис. 6. Схема лабораторной экспериментальной установки

Также необходимо определить условия максимально эффективного его использования в целях ε -метрии, толщинометрии, дефектоскопии, дефектометрии и других способов неразрушающего радиоволнового контроля, основанных на использовании исследуемого метода. Для решения поставленной задачи была собрана экспериментальная установка, блок-схема которой приведена на рис. 6.

Излучатель с изменяемой геометрией [11] представляет собой двухзеркальную диэлектрическую антенну 2, снабженную устройством измерения величины плеча l , которое преобразует величину поступательного движения диэлектрического волновода, являющегося элементом излучателя, в электрический сигнал, пропорциональный длине плеча излучателя. Для этой цели

использовался прецизионный проволочный потенциометр с нелинейностью характеристики 0,1%. Электрический сигнал, пропорциональный величине плеча, через переключатель режимов работы 7 подавался на вход абсцисс двухкоординатного графопостроителя типа Н-306. Исследуемые образцы 3 представляли собой 90-градусные секторы диска, изготовленные из диэлектрика с известной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 2,557 \cdot (1 + i \cdot 3,27 \cdot 10^{-3})$ (плексиглас), толщиной 40 мм ($\sim 10\lambda_0$) и радиусом 70 мм ($\sim 18\lambda_0$) и 150 мм ($\sim 38\lambda_0$). Для исследования жидких диэлектриков применялась полая плексигласовая кювета аналогичных размеров с радиусом 70 мм ($\sim 18\lambda_0$). Электромагнитное излучение, прошедшее через объект контроля 3, принималось дипольным приемником с СВЧ-детекторной секцией 5. Для обеспечения возможности снятия зависимости принимаемого поля от угловой координаты в состав установки был введен угловой сканатор 4, также снабженный прецизионным реохордом, преобразующем угловую координату в пропорциональное ей напряжение. Кроме того, в состав сканатора 4 входило отсчетное устройство с нониусной шкалой, позволявшее измерять величину угла с точностью до 15 мин. СВЧ-сигнал, принятый дипольным приемником и продетектированный СВЧ-детектором, поступал в измерительный усилитель 6, а с него – на вход ординат двухкоординатного графопостроителя Н-306.

На рис. 7,а приведен общий вид рельефа квадрата модуля принимаемого сигнала в координатах θ и (d/λ_0) , полученного экспериментально в точке наблюдения на расстоянии $R = 18\lambda_0$, а на рис. 7,б – аналогичный рельеф, соответствующий $R = 38\lambda_0$.

Измерения проводились преимущественно в пределах основного лепестка ДН излучателя, поскольку эта область является наиболее предпочтительной с энергетической точки зрения. При этом угол θ отсчитывался от продольной оси излучателя и менялся от 20° до 52° с шагом 2° , а параметр (d/λ_0) – в пределах от 0 до 5,4. Измерения коэффициента замедления ДВ производились в процессе сканирования путем записи картины стоячей волны, существующей в волноводе, по которой определялась $\lambda_{\text{в}}$. Положительный эффект, выражающийся в повышении точности измерения $\lambda_{\text{в}}$, обеспечивался усреднением по не менее чем 13 вариациям поля. В результате длину волны в волноводе $\lambda_{\text{в}}$ удалось измерить с погрешностью, не превышающей 0,1%. Длина волны в свободном пространстве λ_0 измерялась резонансным волномером типа Ч2-26, обеспечивающим максимальную погрешность измерения частоты в 0,1%.

На рис. 8 приведена картина минимумов принимаемого сигнала в координатах θ и (d/λ_0) , соответствующих расстоянию до точки наблюдения в $38\lambda_0$ и $18\lambda_0$ соответственно, построенная по результатам измерений, представленных на рис. 7. Сравнение рис. 5 и 8 позволяет констатировать хорошее совпадение результатов теоретического моделирования с результатами экспериментального исследования физического макета устройства.

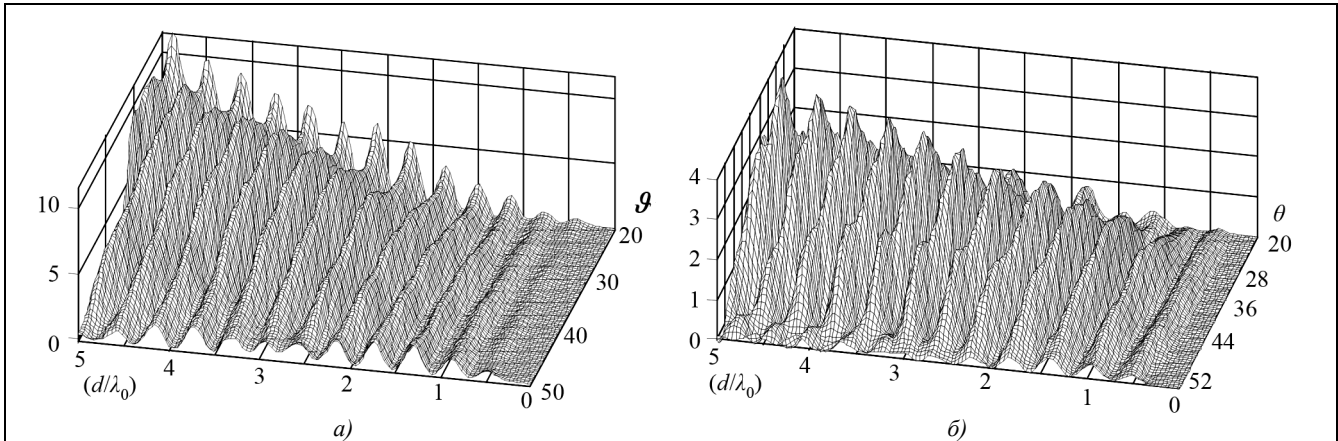


Рис. 7. Общий вид рельефа распределения квадрата амплитуды сигнала в координатах θ и (d/λ_0) , полученного экспериментально: $a - R=18\lambda_0$; $b - R=38\lambda_0$

Определение диэлектрических проницаемостей веществ. Один из вариантов практического использования излучателя с изменяемой геометрией в целях ε -метрии, толщинометрии или дефектметрии предполагает осуществление измерения величины периода вариации поля, наблюдаемого под некоторым углом θ . В частности, для измерения величины диэлектрической проницаемости достаточно измерить период следования минимумов сигнала Δ , принятого под углом θ .

После этого величина диэлектрической проницаемости может быть вычислена по формуле [11, 12]

$$\varepsilon' = \frac{\lambda_0^2}{\cos^2 \theta} \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\lambda_b} \right)^2 \quad (5)$$

Очевидно, что от точности измерения величины периода зависит погрешность контроля диэлектрической проницаемости исследуемого материала. Повышение точности контроля величины периода следования минимумов обеспечивается усреднением по 12...13 вариациям принимаемого поля. Из (5) следует, что для периода вариации поля справедливо выражение

$$\Delta = \frac{\lambda_0}{\frac{1}{\beta} + \sqrt{\varepsilon'} \cos \theta} \quad (6)$$

Поэтому для минимизации погрешностей контроля с использованием излучателя с изменяемой геометрией измерения необходимо производить в пределах именно этой области, границы которой естественно контролировать по периоду вариации принимаемого поля Δ :

$$\Delta = \frac{\beta \lambda_0}{2} \pm \frac{14\%}{27\%} \quad (7)$$

Из рис. 8 следует, что минимальная погрешность контроля обеспечивается при измерении периода Δ , соответствующего θ , меняющемся от $\theta_m + 5^\circ$ до $\theta_m - 10^\circ$, где $\theta_m = \arccos(1/\beta\sqrt{\varepsilon'})$, (в случае исследования плексигласа $\theta_m \approx 36^\circ$). При этом величины периодов, соответствующие как дальней, так и промежуточной зонам дифракции, практически совпадают, и вычисление диэлектрической проницаемости по выражению (5), полученному для дальней зоны, обеспечивает погрешность 0,1 – 0,3%. В таблице приведены результаты оценок погрешностей определения абсолютной величины диэлектрической проницаемости плексигласа, которые характерны для предложенного метода.

Как видно из таблицы, максимальная погрешность измерения абсолютной величины диэлектрической проницаемости не превышает 2,24%, причем основной вклад в суммарную погрешность вносят по-

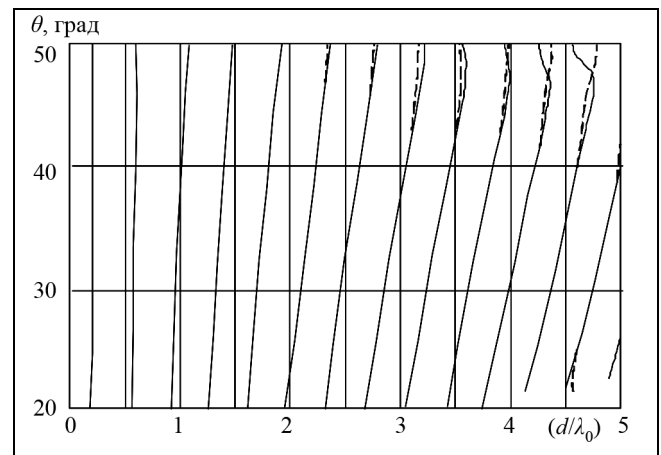


Рис. 8. Положения минимумов функции распределения квадрата амплитуды сигнала в координатах θ и (d/λ_0) (сплошная линия – $R=38\lambda_0$; пунктирная линия – $R=38\lambda_0$)

грешности измерения периода вариации поля Δ и угла наблюдения θ . Уменьшение погрешности измерения периода до 0,1 % приводит к уменьшению суммарной погрешности определения ε' до 1,44 %.

Результаты расчетов влияния погрешностей измерения параметров на погрешности измерения абсолютной величины диэлектрической проницаемости плексигласа

Варьируемый параметр	Относительное отклонение параметра, %, (град)	$\varepsilon' + \delta\varepsilon'$; $\varepsilon' - \delta\varepsilon'$	$\frac{+\delta\varepsilon'}{\varepsilon'} \cdot 100, \%$; $\frac{-\delta\varepsilon'}{\varepsilon'} \cdot 100, \%$
λ_0 ,	+0,1; -0,1	2,5621; 2,5519	+0,2; 0,2
$\lambda_{\text{в}}$	+0,1; -0,1	2,5621; 2,5519	+0,2; -0,2
θ	(+0,25); (-0,25)	2,5734; 2,5408	+0,6426; -0,6327
Δ	+0,3; -0,3	2,5265; 2,5879	-1,1928; +1,2072

Очевидно, что все вышеизложенное справедливо для диэлектриков с относительно небольшим значением величины диэлектрических потерь. Кроме того, естественным ограничением на величину измеряемой диэлектрической проницаемости является условие «нарушения» полного внутреннего отражения собственных волн диэлектрического волновода при приближении к нему поверхности контролируемого диэлектрика $\varepsilon'_\text{в} < \varepsilon'$, где $\varepsilon'_\text{в}$ – диэлектрическая проницаемость ДВ.

Следует заметить, что информация об электрофизических параметрах материала объекта контроля, заключенная в зависимости квадрата амплитуды принимаемого сигнала от параметра сканирования, используется весьма не эффективно, поскольку измерения ε по выражению (5) осуществляются только по параметру Δ – периоду следования минимумов в зависимости квадрата модуля амплитуды от параметра сканирования. При этом не учитывается форма и характер поведения принимаемого сигнала. Учет этой дополнительной информации позволяет контролировать не только абсолютную величину ε , но также и тангенс угла диэлектрических потерь путем минимизации некоторой целевой функции Φ [19], характеризующей разность между экспериментально измеренными значениями и значениями, полученными прямым расчетом математической модели для некоторого набора параметров. В этом случае алгоритм определения величины ε и $\text{tg}\delta$ состоит из следующих этапов:

- 1) формирование одномерного массива экспериментальных значений, соответствующего определенному углу приема θ ;
- 2) вычисление двумерных массивов в циклах по ε' и $\text{tg}\delta$;
- 3) вычисление двумерного массива целевой функции Φ , соответствующего массивам входных данных ε'_l , $\text{tg}\delta_m$ (где l и m – номера элементов массивов);
- 4) определение методом последовательных уточнений величин ε' и $\text{tg}\delta$, соответствующих минимуму целевой функции Φ .

Массивы экспериментальных значений были взяты из массивов экспериментальных данных, измеренных при $R=18\lambda_0$ и различных углах θ . Решение, полученное методом глобальной минимизации, следующее: $\varepsilon' = 2,565 \pm 0,029$ и $\text{tg}\delta = 0,0064 \pm 0,0012$. Сравнение результатов, представленных в [20], с имеющимися наиболее достоверными данными измерений ε' и $\text{tg}\delta$ в диапазоне миллиметровых электромагнитных волн, представленных в [18], позволяет констатировать хорошее совпадение представленных и ранее опубликованных данных.

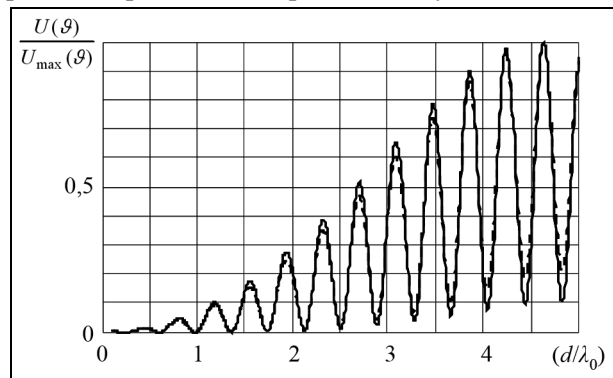


Рис. 9. Нормированные зависимости квадрата модуля амплитуды сигнала, принятого под углом $\theta = 38^\circ$, соответствующего моторному маслу, бывшему в эксплуатации, и исходному материалу от (d/λ_0) (сплошная линия – исходный материал; пунктирная линия – масло, бывшее в эксплуатации)

Проведенные экспериментальные исследования показали высокую эффективность метода при контроле качества смазывающих материалов в процессе эксплуатации. На рис. 9 приведена зависимость сигналов, принятых под углом $\theta = 38^\circ$, соответствующих моторному маслу, бывшему в эксплуатации, и исходному материалу от параметра сканирования (d/λ_0) . Для исследования жидких диэлектриков использовалась полая кювета.

Для величин действительной части диэлектрической проницаемости и тангенса угла диэлектрических потерь моторного масла, бывшего в эксплуатации и для исходного смазочного материала методом глобальной минимизации получены следующие оценки:

для исходного смазочного материала –

$$\varepsilon' = 2,811 \pm 0,032; \operatorname{tg} \delta = 0,024 \pm 0,0045;$$

для масла бывшего в эксплуатации –

$$\varepsilon' = 2,832 \pm 0,032; \operatorname{tg} \delta = 0,038 \pm 0,0071.$$

Из приводимых оценок следует, что использованный метод может применяться для контроля качества моторных масел по тангенсу угла диэлектрических потерь.

Заключение. Проведенные экспериментальные исследования позволяют констатировать хорошее не только качественное, но и количественное совпадение квадратов модулей коэффициента передачи, рассчитанных теоретически и полученных экспериментальным путем. Это говорит о том, что, несмотря на определенные упрощения, принятые на стадии математического моделирования, предложенная математическая модель в достаточной мере адекватна своему физическому прототипу и точно отражает его особенности. Так, вычисленное теоретически «приподнимание» и сдвиг минимумов, характерные для промежуточной зоны дифракции, подтверждаются результатами экспериментальной проверки.

Подтверждена возможность определения абсолютного значения величины диэлектрической проницаемости контролируемого диэлектрика по периоду вариации поля, наблюдаемого под некоторым углом.

Результатом экспериментальной проверки соответствия теоретической модели реальному физическому устройству явилось формулирование условий, позволяющих минимизировать погрешность контроля величины периода вариации принимаемого поля, являющегося исходным при использовании излучателя с изменяемой геометрией в целях ε -метрии.

Максимальная погрешность измерения абсолютной величины диэлектрической проницаемости с использованием радиоволнового излучателя миллиметровых волн с изменяемой геометрией не превышает 2,24%, что вполне достаточно для использования метода в целях технологического контроля диэлектрической проницаемости вещества;

Чувствительность предложенного метода измерения с использованием излучателя с изменяемой геометрией к изменениям мнимой части ε'' позволяет использовать метод для измерения как действительной, так и мнимой части диэлектрической проницаемости. Наиболее предпочтительным для этой цели представляется использование методики глобальной минимизации.

Литература

1. Масалов С. А., Рыжак А. В., Сухаревский В. М., Шкиль В. М. Физические основы диапазонных технологий типа «Стелс». СПб.: ВИКУ им. А. Ф. Можайского. 1999.
2. Мериакри В. В., Пангонис Л. И., Пархоменко М. П. и др. Создание нового поколения антенно-фидерных устройств коротковолновой части ММ-диапазона на основе диэлектрических и спиральных волноводов, а также управляемых квазиоптических структур // Сб. отчетов по научным проектам МНТП России «Физика микроволн». Н. Новгород. 1996. С. 137–142.
3. Мериакри В. В. Состояние и перспективы развития линий передачи субмиллиметрового диапазона волн и устройства на их основе // Зарубежная радиоэлектроника. 2002. № 12. С. 3–7.
4. Методы неразрушающих испытаний / под ред. Р. Шарпа: пер. с англ. / под ред. Л. Г. Дубицкого. М.: Мир. 1972.
5. Завьялов А. С., Дунаевский Г. Г. Измерение параметров материалов на СВЧ. Томск: Томский госуниверситет. 1985.
6. Birch J. R., Simmons G. J., Afsar M. N., et al., An intercomparison of measurement techniques for the determination of the dielectric properties of solids at near millimeter wavelengths // IEEE Trans. Microwave Theory Tech. 1994. June. V. 42. P. 956–965.
7. Ахметшин А. М. Широкополосная интроскопия слоистых диэлектрических структур // Методы и средства диагностики несущей способности изделий из композитов: состояние и задачи. Рига. 1983. С. 206–210.
8. Барташевский Е. Л., Дробахин О. О., Славин И. В. Методы интерпретации результатов многочастотных измерений при контроле параметров многослоистых диэлектрических структур // Измерительная техника. 1984. № 6. С. 31–33.
9. Ахметшин А. М. Возможности контроля параметров диэлектрических сред, закрытых защитным диэлектрическим слоем, радиоинтерференционным методом переменной частоты // Дефектоскопия. 1987. № 10. С. 29–35.
10. Калачев А. А., Куколев И. В., Матыцин С. М., Розанов К. Н., Сарычев А. К. Способ определения эффективных значений диэлектрической проницаемости неоднородных листовых материалов в СВЧ-диапазоне // Дефектоскопия. 1991. № 6. С. 64–69.
11. Буданов В. Е., Евич Н. Л., Суслов Н. Н. Метод измерения диэлектрической проницаемости неоднородных диэлектрических материалов // Радиофизика и электроника: сб. науч. тр. (Ин-т радиофизики и электроники НАН Украины). Харьков. 2002. Т. 7. № 2. С. 328–334.
12. Пат. 1800333 РФ. МКИ4 G01 22/00. Способ определения диэлектрической проницаемости и устройство для его осуществления / В. Е. Буданов, Н. Л. Евич, Н. Н. Суслов. Оpubл. 07.03.93 г. Бюл. № 9.

13. Пат. 2003991 РФ. МКИ4 G01 P27/04, 27/26. Устройство для определения диэлектрической проницаемости материала / В. Е. Буданов, Н. Л. Евич, О. Б. Калмыкова, Н. Н. Суслов. Оpubл. 30.11.93 г. Бюл. № 43–44.
14. Андренко С. Д., Беляев В. Г., Провалов С. А., Сидоренко Ю. Б., Шестопалов В. П. Преобразование поверхностных волн в объемные в физике и технике миллиметровых и субмиллиметровых волн // Вестник АН УССР. 1977. № 1. С. 8–12.
15. Провалов С. А. Преобразователи поверхностных волн в объемные на базе связанных линий // Электромагнитные волны и электронные системы. 2010. Т. 15. № 4. С. 40–45.
16. Шубарин Ю. В. Антенны сверхвысоких частот. Харьков: Харьковский университет. 1960.
17. Грей Э., Мэтьюз Г. Б. Функции Бесселя и их приложения к физике и механике. М.: Изд-во ин. лит-ры. 1949.
18. Афсар М. Н. Баттон К. Дж. Измерение диэлектрических характеристик материалов в диапазоне миллиметровых волн // ТИИЭР. 1985. Т. 73. № 1. С. 143–166.
19. Колодий И. Б. Ляцук О. Б., Федорчук Б. И. Радиоволновая толщинометрия плоскостойких диэлектрических материалов на основе метода глобальной минимизации // Дефектоскопия. 1990. № 9. С. 67–71.
20. Евич Н. Л. Радиоволновая диэлектрометрия с использованием геометро-фазового сканирования // Радиофизика и электроника: сб. науч. тр. (Ин-т радиофизики и электроники НАН Украины). Харьков. 2007. Т. 12. № 3. С. 482–488.

Поступила 5 июля 2011 г.

Millimeter-Wave Radiator and its Using in Dielectric Permittivity Measurement

© Authors, 2011

N. L. Yevich, Yu. V. Prokopenko

The work is dedicated to research of the features of the field which formed by the radiowave radiator of millimeter band. In an approximation of a given current the expressions describing the fields formed by the radiator in object of the control within the limits of intermediate and distant zones of diffraction are obtained. The capability of the permittivity value measurement of object of the control by the period of variation of a field which received under some definite angle is demonstrated. The results of experimental researches are submitted. The estimations of errors of measurements conforming to the realized techniques are adduced. The comparison of results of experimental researches of features of the fields excited by the radiator with a variable geometry with the data, obtained by a way of the mathematical modelling is submitted. The range of angles is determined, within the limits of which one the minimization of errors of the control is provided. The maximum effective usage conditions of the radiator with the purposes of radiowave permittivity measurement are determined. The maximum measuring error of the permittivity absolute value by a radiowave method, which proposed, does not exceed 2,24 %, that it is quite enough for usage of a method with the purposes of a non-destructive technological testing, defectoscopy and defectometry. The results of measurement of the real part of dielectric permittivity value and tangent of the loss angle of plexiglas and engine oils obtained by a global minimization method are adduced. The presented data well agreed with the most authentic earlier published data. The possibility of the engine oils quality control on the tangent of the loss angle is demonstrated.

Уважаемые читатели!

В Издательстве «Радиотехника» вышла в свет книга



Меркишин Г.В.

**Системы наблюдения:
новые принципы построения**

ISBN 978-5-88070-265-7

Рассмотрены новые принципы построения фотоприемных систем, а также радиосистем с малой длиной волны, предназначенных для приема как пространственной, так и временной информации.

Для специалистов в области радиоэлектроники и оптоэлектроники, может быть полезна аспирантам и студентам вузов соответствующих направлений.

По вопросам заказа и приобретения книг обращаться по адресу:
107031 г. Москва, Кузнецкий мост, 20/6.

Тел./факс: (495) 625-92-41, тел.: (495) 625-78-72, 621-48-37
<http://www.radiotec.ru>; e-mail: info@radiotec.ru

Цифровая обработка сигналов и изображений

УДК 621.391

Структура и характеристики алгоритмов оценки угла прихода и углового рассеяния волн от случайного кластера рассеивателей

© Авторы, 2011

Ю. С. Радченко – д. ф.-м. н., профессор, кафедра радиофизики, Воронежский государственный университет (ВГУ)
E-mail: ysradchenko@yandex.ru

Р. В. Титов – аспирант, кафедра радиофизики, ВГУ
E-mail: rvtitov@yandex.ru

Рассмотрена пространственно-временная обработка сверхширокополосного сигнала, поступающего на антенную решетку после его взаимодействия со случайным кластером рассеивателей; получено статистическое описание рассеянного сигнала; синтезирован алгоритм максимального правдоподобия оценки угла прихода и углового рассеяния волны; найдены теоретически и с помощью моделирования характеристики алгоритма (смещение, дисперсия, граница Крамера–Рао); показаны особенности характеристик оценок, обусловленные влиянием априорных ограничений.

Ключевые слова: сверхширокополосный сигнал, многолучевость, антенная решетка, пространственно-временная обработка.

Time-space processing of ultra wide band signal received by antenna array from a random cluster of scatterers is considered. Statistical description of the signal is given. A maximum likelihood algorithm of signal angle of arrival and angle spread estimation is synthesized. The main algorithm characteristics such as offset, variance and Cramer-Rao bound are obtained theoretically and by simulation. Other special features of the algorithm are also provided. These features are due to a priori limitations of the estimated parameters.

Keywords: ultrawideband signal, multipath, antenna array, space-time processing.

Введение. При использовании сверхширокополосных сигналов (сигналов с шириной полосы более 200 МГц и несущей частотой в несколько гигагерц и более) внутри зданий и т.п. неизбежно приходится сталкиваться с проблемой многолучевого распространения данных сигналов. Типичный объект, на котором рассеивается сигнал, как правило, является протяженным, зачастую с дискретной кластерной структурой [1–4].

Одним из способов борьбы с явлением многолучевости является пространственная обработка с помощью *Smart-антенн*. Под Smart-антеннами подразумеваются антенны, которые позволяют менять свою диаграмму направленности (ДН) в зависимости от структуры волнового фронта, формируемого кластером. Для этого требуется оценить угол прихода сигнала и угловое рассеяние волнового фронта для формирования ДН антенны.

При ширине спектра сигнала в несколько сотен мегагерц пространственный элемент разрешения составляет более 1 м. Поскольку размеры рассеивающего кластера и приемной антенной решетки обычно не превосходят этой величины, допустима модель поля, узкополосного в пространственно – временном смысле, при которой временная и пространственная обработка рассеянного поля разделяются [5,6]. В [6] разработана общая спектрально-корреляционная модель поля, широкополосного в пространственно-временном смысле, приводящая к неразделимой обработке такого поля.

Модель поля, рассеянного случайным кластером. В качестве приемной антенны будем рассматривать линейную эквидистантную антенную решетку (АР), на которую поступает векторный сигнал, описываемый в виде

$$\mathbf{x}(t) = S_0 s(t) \sum_{n=1}^L \gamma_n(t) \mathbf{U}(\theta_0 + \alpha_n) + \mathbf{n}(t). \quad (1)$$

Предполагается, что кластер состоит из случайного числа L точечных рассеивателей, находящихся в дальней зоне АР, и при этом от каждого из них на АР приходит плоская волна, характеризуемая углом прихода $\theta_0 + \alpha_n$, где θ_0 – некоторое общее направление на кластер, а α_n – отклонение от него для n -й волны, являющееся случайной величиной с нулевым средним и дисперсией σ_α^2 . Также каждый луч характеризует-

ся комплексной случайной амплитудно-фазовой модуляцией (Федингом) $\gamma_n(t)$. Решетка имеет m элементов, шаг Δ , длину волны λ_0 , вектор некоррелированных гауссовских шумов $\mathbf{n}(t)$. В формуле (1)

$$\mathbf{U}(\theta) = [G_1(\theta)a_1(\theta), G_2(\theta)a_2(\theta), \dots, G_m(\theta)a_m(\theta)]^T, \quad a_k(\theta) = \exp(j2\pi \frac{\Delta}{\lambda_0}(k-1)\sin(\theta)), \quad k = 0, \dots, m-1. \quad (2)$$

Здесь $G_k(\theta)$ определяет направленные свойства k -го элемента АР. Шумы $\mathbf{n}(t)$ имеют следующие статистические характеристики: $\langle n_k(t) \rangle = 0$, $\langle n_k(t_1)n_m(t_2) \rangle = \sigma_n^2 \delta_{k,m} \delta(t_1 - t_2)$, где $\delta_{k,m}$ – символ Кронекера, $\langle \rangle$ – символ статистического усреднения. Фединг $\gamma_n(t)$ – комплексный гауссовский процесс с моментами $\langle \gamma_n(t_1)\gamma_k(t_2) \rangle = 0$, $\langle \gamma_n(t_1)\gamma_k^*(t_2) \rangle = \sigma_\gamma^2 \delta_{k,n} \rho(t_1 - t_2)$, $\langle \gamma_n(t) \rangle = 0$.

Таким образом, сигнал (1) является условным гауссовским случайным процессом с нулевым средним, со случайными параметрами L , $\gamma_n(t)$, α_n и неизвестным пространственным параметром θ_0 . Еще одним пространственным параметром, неявно входящим в (1), является величина σ_α , которую будем принимать за характеристику углового рассеяния сигнала.

Для получения статистического описания сигнала (1) достаточно ввести корреляционную матрицу

$$\mathbf{R}_s(t_1 - t_2) = \langle \mathbf{S}(t_1)\mathbf{S}^H(t_2) \rangle = S_0^2 s(t_1)s^*(t_2) \left\langle \sum_{n=1}^L \gamma_n(t_1)\gamma_n^*(t_2)\mathbf{U}(\theta_0 + \alpha)\mathbf{U}^H(\theta_0 + \alpha) \right\rangle_{L, \gamma, \alpha}, \quad (3)$$

где верхний индекс H означает эрмитовское сопряжение матриц.

Будем считать, что α, γ, L статистически независимы между собой и их статистические характеристики не зависят от номера луча n . Пусть угловое рассеяние α имеет распределение $P(\alpha)$. Если обозначить матрицу взаимных корреляций элементов в (2) как

$$R_{k,i}^{(a)}(\theta_0, \sigma_\alpha) = \langle U_k(\theta_0 + \alpha)U_i^*(\theta_0 + \alpha) \rangle, \quad i, k = 1, \dots, m, \quad (4)$$

то

$$\mathbf{R}_s(t_1 - t_2) = P_s \rho(t_1 - t_2) s(t_1)s^*(t_2) \mathbf{R}^{(a)}(\theta_0, \sigma_\alpha). \quad (5)$$

Здесь $P_s = S_0^2 \sigma_\gamma^2 \langle L \rangle$ – средняя мощность поля в некоторой точке апертуры, $\langle L \rangle$ – среднее число лучей.

В формуле (4) элемент матрицы выражается как

$$R_{k,i}^{(a)}(\theta_0, \sigma_\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} P(\alpha) G_k(\theta_0 + \alpha) G_i(\theta_0 + \alpha) \exp(j2\pi \frac{\Delta}{\lambda_0}(k-i)\sin(\theta_0 + \alpha)) d\alpha. \quad (6)$$

Аналитические и численные расчеты (6) упрощаются, если разложить $\sin(\theta_0 + \alpha)$ в ряд Тейлора по степеням α и ограничиться первым приближением $\sin(\theta_0 + \alpha) \approx \sin(\theta_0) + \cos(\theta_0)\alpha$. В этом случае получаем

$$\begin{aligned} R_{k,i}^{(a)}(\theta_0, \sigma_\alpha) &= \exp\left(j2\pi \frac{\Delta}{\lambda_0}(k-i)\sin(\theta_0)\right) \int_{-\infty}^{\infty} P(\alpha) G_k(\theta_0 + \alpha) G_i(\theta_0 + \alpha) \exp\left(j2\pi \frac{\Delta}{\lambda_0}(k-i)\cos(\theta_0)\alpha\right) d\alpha = \\ &= a_k(\theta_0)a_i^*(\theta_0) K_{k,i}(u_{k,i}, \Omega). \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь

$$u_{k,i} = 2\pi(\Delta/\lambda_0)(k-i)\cos(\theta_0), \quad \Omega = \{\theta_0, \sigma_\alpha\},$$

$$K_{k,i}(u_{k,i}, \Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} P(\alpha) G_k(\theta_0 + \alpha) G_i(\theta_0 + \alpha) \exp\left(j2\pi \frac{\Delta}{\lambda_0}(k-i)\cos(\theta_0)\alpha\right) d\alpha. \quad (8)$$

Таким образом, элемент матрицы $K_{k,i}(u_{k,i}, \Omega)$ (8) является преобразованием Фурье от достаточно гладкой функции $W_{k,i}(\alpha) = P(\alpha)G_k(\theta_0 + \alpha)G_i(\theta_0 + \alpha)$.

Дальнейшие упрощения получим, если использовать разложение в ряд Тейлора $G(\theta + \alpha) = G(\theta) + G'(\theta)\alpha$. Учитывая только первую производную $G'(\theta)$, можно записать

$$K_{k,i}(u_{k,i}, \Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} [G_k G_i + (G_k G_i' + G_k' G_i)\alpha + G_k' G_i' \alpha^2] P(\alpha) \exp(ju_{k,i}\alpha) d\alpha. \quad (9)$$

Интеграл (9) можно вычислить аналитически, используя соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} \alpha^q P(\alpha) \exp(ju\alpha) d\alpha = (-j)^q \frac{d^q B(u|\Omega)}{du^q},$$

где $B(u|\Omega)$ – характеристическая функция распределения $P(\alpha)$.

Тогда для (9) имеем

$$K_{k,i}(u_{k,i}, \Omega) = G_k G_i B(u_{k,i}|\Omega) - j(G_i G_k' + G_k G_i') B'(u_{k,i}|\Omega) - G_k' G_i' B''(u_{k,i}|\Omega). \quad (10)$$

Вводя диагональную матрицу $\mathbf{A}(\theta_0) = \text{diag}(a_1(\theta_0), a_2(\theta_0), \dots, a_m(\theta_0))$, можно корреляционную матрицу $\mathbf{R}_s(t_1, t_2)$ (5) записать в виде

$$\mathbf{R}_s(t_1, t_2; \Omega) = P_S \rho(t_1 - t_2) s(t_1) s^*(t_2) \mathbf{A}(\theta_0) \mathbf{K}(\Omega) \mathbf{A}^H(\theta_0). \quad (11)$$

Если в разложении Тейлора для ДН $G(\theta + \alpha)$ можно считать, что $G(\theta + \alpha) \approx G(\theta)$, то корреляционная матрица $\mathbf{R}_s(t_1, t_2)$ принимает вид

$$\mathbf{R}_s(t_1, t_2; \Omega) = P_S \rho(t_1 - t_2) s(t_1) s^*(t_2) \mathbf{F}(\theta_0) \mathbf{B}(\Omega) \mathbf{F}^H(\theta_0). \quad (12)$$

Здесь $\mathbf{F}(\theta_0) = \mathbf{A}(\theta_0) \mathbf{G}(\theta_0)$, $\mathbf{G}(\theta_0) = \text{diag}(G_1(\theta_0), G_2(\theta_0), \dots, G_m(\theta_0))$, $\mathbf{B}(\Omega) = [B_{k,i}(u_{k,i}|\Omega)]$.

При таком допущении рассматриваемая модель сигнала имеет следующие особенности: временная и пространственная обработки разделяются; в пространственной области сигнал является стохастическим. Поскольку в задаче анализируются только пространственные параметры поля, то будем предполагать, что за время наблюдения конфигурация кластера остается замороженной и выполняется условие $\rho(t_1 - t_2) = 1$.

В предельном случае $\sigma_\alpha = 0$ матрица $\mathbf{B}(\Omega)$ становится вырожденной. Т. е. поле точечного источника является полностью когерентным на апертуре антенной решетки. В этом случае

$$\mathbf{R}_s(t_1, t_2; \Omega) = P_S \rho(t_1 - t_2) s(t_1) s^*(t_2) \mathbf{U}(\theta_0) \mathbf{U}^H(\theta_0). \quad (13)$$

Вырождение матрицы (13) возникает в случае, когда кластер рассеивающих точек наблюдается ФАР как одна блестящая точка, т. е. выполняется условие

$$\theta_S \ll \lambda_0 / (m-1) / \Delta, \quad (14)$$

где θ_S – угол, под которым виден кластер из области наблюдения.

Вероятность вырождения определяется следующими условными вероятностями:

1) $P[L=1]$ – число рассеивающих точек $L=1$;

2) $P_{0\alpha} = P[\{\alpha_1 \dots \alpha_L\} < \delta_\alpha]$ – реализация случайного кластера такова, что рассеивающая область удовлетворяет условию (14).

Для оценки указанных вероятностей можно использовать рекомендации стандарта IEEE 802.15.3.

Оценка максимального правдоподобия (ОМП) с учетом априорных ограничений. Один из вариантов логарифма функционала отношения правдоподобия (ЛФОП) по пространственным параметрам сигнала имеет вид

$$\begin{aligned} L(\theta, \sigma) &= \ln \frac{F(\mathbf{X} | S_0 \neq 0)}{F(\mathbf{X} | S_0 = 0)} = \ln \left\{ \exp \left(\frac{1}{2} \mathbf{X}^H (\mathbf{R}_N^{-1} - \mathbf{R}_X^{-1}(\Omega)) \mathbf{X} \right) \sqrt{\frac{\det \mathbf{R}_N}{\det \mathbf{R}_X(\Omega)}} \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\mathbf{X}^H}{\sigma_N} \mathbf{K}(\Omega) (\varepsilon \mathbf{I} + \mathbf{K}(\Omega))^{-1} \frac{\mathbf{X}}{\sigma_N} + \frac{1}{2} m \ln(\varepsilon) - \frac{1}{2} \ln(\det(\varepsilon \mathbf{I} + \mathbf{K}(\Omega))), \end{aligned} \quad (15)$$

где $F(\mathbf{X})$ – функция правдоподобия пространственной выборки – \mathbf{X} на элементах решетки; $\sigma_N^2 = \sigma_n^2 \int_0^T |s(t)|^2 dt$,

$\varepsilon = \sigma_N^2 / \sigma_S^2$; $\sigma_S^2 = P_S \int_0^T |s(t)|^2 dt$; $\mathbf{K}(\Omega) = \mathbf{F}(\theta_0) \mathbf{B}(\Omega) \mathbf{F}^H(\theta_0)$.

Здесь и далее используется обозначение $\sigma_\alpha \equiv \sigma$.

Выражение (15) удобно для рассмотрения последовательности операций над сигналом на выходе АР. Однако анализ ЛФОП и характеристик оценок проводить удобнее, если выражение для него переписать в терминах собственных значений λ_k , $k=1, \dots, m$ нормированной пространственной корреляционной матрицы $\mathbf{K}(\Omega)$. Пусть $\mathbf{P} \equiv \mathbf{P}\{\Omega\}$ – матрица собственных векторов $\mathbf{K}(\Omega)$. Тогда $\mathbf{K}(\Omega) = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^T$, $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}\{\lambda_k\}$, $k=1, \dots, m$. Используя матричные соотношения $\Psi = \text{diag}\left\{\frac{\lambda_1}{\varepsilon + \lambda_1}, \dots, \frac{\lambda_m}{\varepsilon + \lambda_m}\right\}$, $\mathbf{K}(\varepsilon\mathbf{I} + \mathbf{K})^{-1} = \mathbf{P}\Psi\mathbf{P}^H$, $\det(\varepsilon\mathbf{I} + \mathbf{K}) = \prod_{k=1}^m (\varepsilon + \lambda_k)$ и введя обозначение $\mathbf{Y} = \mathbf{X}^H\mathbf{P}$, выражение (15) для ЛФОП можно переписать в виде

$$L(\Omega) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \frac{\lambda_k(\Omega)/\varepsilon}{1 + \lambda_k(\Omega)/\varepsilon} \frac{|Y_k|^2}{\sigma_N^2} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \ln(1 + \lambda_k(\Omega)/\varepsilon). \quad (16)$$

Будем рассматривать отдельные оценки пространственных параметров сигнала (1) по методу максимального правдоподобия с учетом физических ограничений $\sigma \geq 0$, $|\cos(\theta)| \leq 1$. Таким образом, ОМП является результатом условной оптимизации ЛФОП с ограничениями в виде неравенств [8]. В предположении монотонности функций $M(\theta) = \partial L(\theta|\sigma)/\partial \theta$ и $M(\sigma) = \partial L(\sigma|\theta)/\partial \sigma$ на соответствующих априорных интервалах экстремумы условных ЛФОП $L(\theta|\sigma)$ и $L(\sigma|\theta)$ могут достигаться как внутри, так и на границах априорных интервалов. Т. е. ОМП является смешанной случайной величиной, плотность вероятности которой имеет δ -образные компоненты на границах интервала [8].

Методом статистического моделирования формировались условные ЛФОП $L(\theta|\sigma)$ и $L(\sigma|\theta)$, находились ОМП параметров $\Omega = \{\theta, \sigma\}$. По циклу из $N = 10^3$ испытаний строились гистограммы соответствующих оценок и находились их характеристики: смещение и дисперсия. На рис. 1 приведены гистограммы оценки угла прихода θ при двух значениях $\theta_0 = 0$ град, $\theta_0 = 80$ град и $\sigma = 5$ град. На рис. 2 приведены гистограммы оценки углового рассеяния при $\sigma_0 = 2$ град, и $\theta_0 = 0$ град. Моделирование происходило при следующих параметрах: $1/\varepsilon = 316$ (+ 25 дБ); $m = 3$; $\Delta/\lambda_0 = 2/7$; величина L – целая, равномерно распределена на интервале [7...13]; $\langle L \rangle = 10$; $P(\alpha) = \exp(-\alpha^2/2\sigma^2)/\sqrt{2\pi\sigma^2}$.

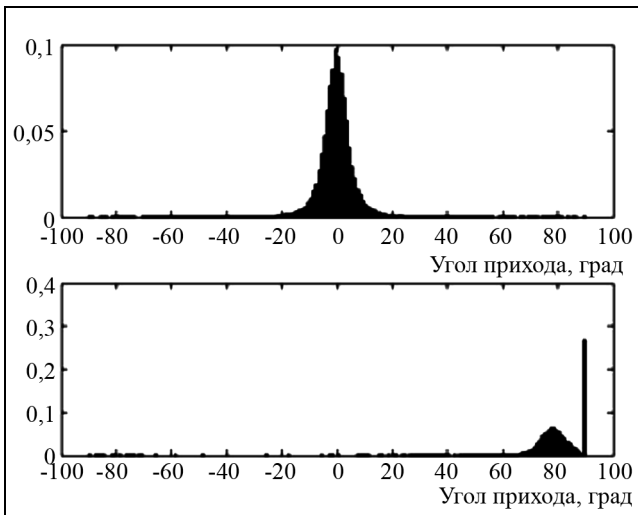


Рис. 1. Гистограммы угла прихода θ при $\theta_0 = 0$ и 80 град и $\sigma = 5$ град

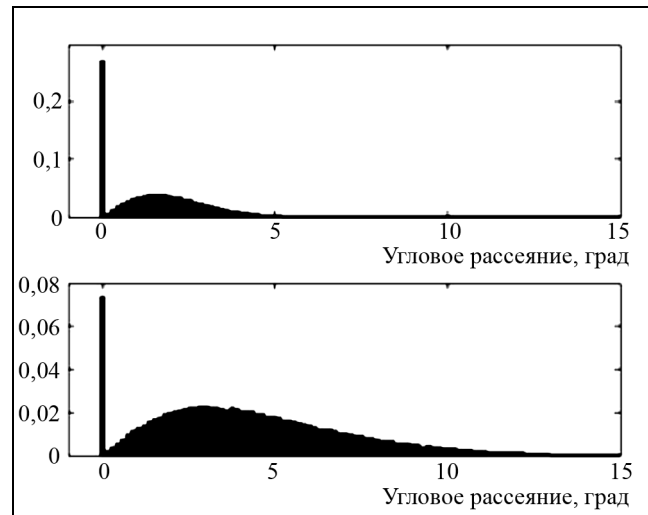


Рис. 2. Гистограммы оценки углового рассеяния при $\sigma_0 = 2$ град и $\theta_0 = 0$ град

Как видно из рис. 1 и 2, моделирование подтвердило появление δ -образных компонент в распределениях ОМП. Анализ гистограмм показал, что распределение оценки угла прихода может быть аппроксимировано выражением

$$W(\theta) = W_g(\theta)I\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\left(1 - I\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\right) + P_1\delta\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + P_2\delta\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right). \quad (17)$$

Здесь $W_g(\theta) = \left(1/\sqrt{2\pi\sigma_\theta^2}\right)\exp\left(-\frac{(\theta - \theta_0)^2}{2\sigma_\theta^2}\right)$; $I(z) = \begin{cases} 1, & z \geq 0, \\ 0, & z < 0; \end{cases}$

$$P_1 = 1 - \Phi\left(\frac{0,5\pi + \theta_0}{\sigma_\theta}\right); P_2 = 1 - \Phi\left(\frac{0,5\pi - \theta_0}{\sigma_\theta}\right); \Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt. \quad (18)$$

На основе (17) и (18) нетрудно найти первые моменты оценки угла прихода. Так, среднее значение оценки $\bar{\theta}$ имеет вид

$$\bar{\theta} = 0,5\pi(P_2 - P_1) + \theta_0 \left[\Phi\left(\frac{0,5\pi + \theta_0}{\sigma_\theta}\right) + \Phi\left(\frac{0,5\pi - \theta_0}{\sigma_\theta}\right) - 1 \right] + \frac{\sigma_\theta}{\sqrt{2\pi}} \left[\exp\left(-\frac{(0,5\pi + \theta_0)^2}{2\sigma_\theta^2}\right) - \exp\left(-\frac{(0,5\pi - \theta_0)^2}{2\sigma_\theta^2}\right) \right]. \quad (19)$$

Из (19) можно найти смещение оценки $b_\theta = \bar{\theta} - \theta_0$. Как видно из выражений (18), (19), при пренебрежении априорными границами $P_1 = P_2 = 0$. Учитывая асимптотическое поведение функций в (19), получаем $\bar{\theta} = \theta_0$ и $b_\theta = 0$.

Распределение оценки углового рассеяния хорошо аппроксимируется выражением

$$W(\sigma) = \frac{1}{\beta} \left(P_0 \delta(\sigma/\beta) + (1 - P_0) (\sigma/\beta)^a \exp(-\sigma/\beta) / \Gamma(a + 1) \right), \quad (20)$$

где $\beta = \sigma_c^2 / m_c$, $a = m_c^2 / \sigma_c^2 - 1$, $m_c = (a + 1)\beta$ и $\sigma_c^2 = (a + 1)\beta^2$ – среднее и дисперсия непрерывной составляющей.

Появление дельта-составляющей в распределении (20) объясняется вырождением корреляционной матрицы поля на АР (14) с вероятностью P_0 . Непрерывная составляющая имеет вид гамма-распределения. На основе (20) можно рассчитать среднее $\bar{\sigma}$ и дисперсию D_σ оценки углового рассеяния: $\bar{\sigma} = (1 - P_0)m_c$, $D_\sigma = (1 - P_0)(1 + P_0(a + 1))\sigma_c^2$. Видно, что среднее значение уменьшается при появлении дельта – составляющей, а дисперсия может увеличиваться или уменьшаться в зависимости от P_0 и a .

Статистическое моделирование оценки угла прихода и углового рассеяния позволило получить зависимости смещений $\{b_\theta, b_\sigma\}$ от истинных значений указанных параметров $\Omega = \{\theta_0, \sigma_{0\alpha}\}$. На рис. 3 приведены зависимости $b_\theta(\theta_0)$ при $\sigma = 2$ и 5 град, а на рис. 4 – зависимости $b_\sigma(\sigma_{0\alpha})$ при $\theta_0 = 0$ и 45 град.

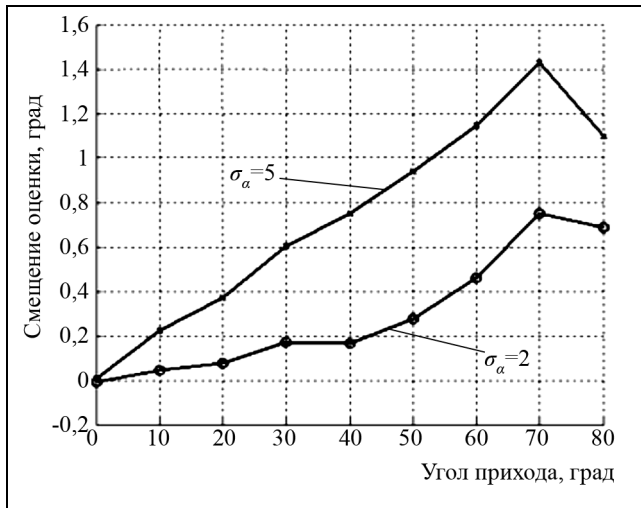


Рис. 3. Зависимости $b_\theta(\theta_0)$ при $\sigma = 2$ и 5 град

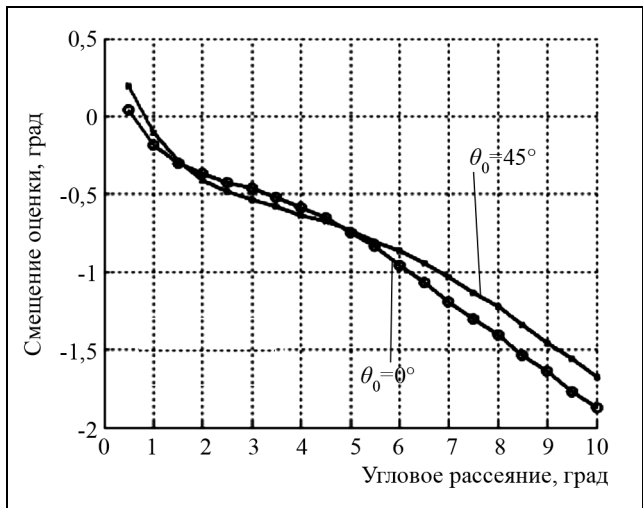
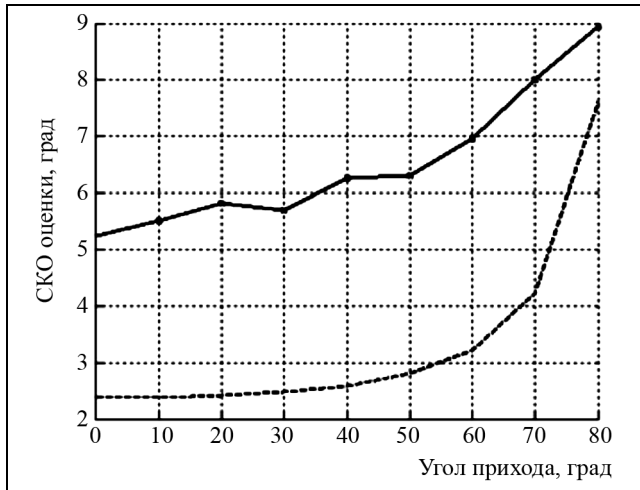
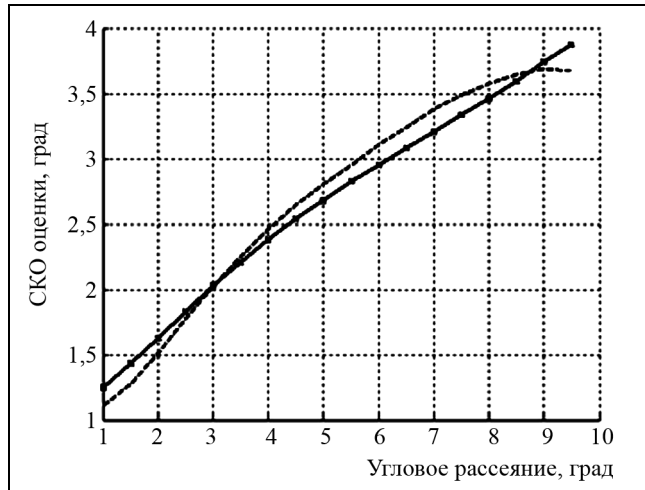


Рис. 4. Зависимости $b_\sigma(\sigma_{0\alpha})$ при $\theta_0 = 0$ и 45 град

Как видно из рис. 3 смещением b_θ можно пренебречь, поскольку $b_\theta \ll \theta_0$. Смещение b_σ на рис. 4 заметно меняется с ростом σ_α , при этом меняется его знак. На рис. 5 и 6 приведены зависимости СКО $\sqrt{D_\theta}$ и $\sqrt{D_\sigma}$ совместно со значением границы Крамера – Рао (последняя показана пунктиром) $\sqrt{D_E} = |1 + b'| \left(- \left\langle (L(\Omega))^n \right\rangle \right)^{-1/2}$. Здесь b' – производная смещения раздельной оценки одного из параметров, вторая производная от ЛФОП берется по одному из параметров при фиксированном втором. Как видно из рис. 5 и 6, СКО оценок отличаются от границы Крамера – Рао, что указывает на необходимость учета их поведения на границах априорных интервалов.

Рис. 5. Зависимости СКО при $\sigma_{\sigma} = 2$ градРис. 6. Зависимости СКО при $\theta_0 = 0$ град

Закключение. Предложенная математическая модель поля формируемого случайным кластером рассеивателей была использована при дальнейшем синтезе алгоритмов пространственной обработки поля – оценке его угла прихода и углового рассеяния. Исследования алгоритмов показали, что у оценки угла прихода смещение пренебрежимо мало, СКО лежит выше границы Крамера–Рао.

У оценки углового рассеяния смещение достаточно велико, ее производную необходимо учитывать при расчете границы Крамера–Рао. Граница Крамера–Рао лежит вблизи графика СКО, пересекаясь с ним. Такое поведение границы Крамера–Рао может быть обусловлено как ограничением априорного интервала, так и вероятностью вырождения корреляционной матрицы поля в раскрытие AP.

Литература

1. Forrester, J. (ed), Channel Modeling Sub-Committee Report Final // IEEE802.15-02/490 ,re – Sc3a. 2007
2. Dabin, J., Haimovich, A., Grebel, H., A statistical ultra-wideband indoor channel model and the effects of antenna directivity on path loss and multipath propagation // IEEE Journal of Selected Areas in Communications. 2006. Т. 24. № 4. P. 752–758.
3. Geng, S, Kivinen, J., Zhao, X., Vainikainen, P., Millimeter-Wave Propagation Channel Characterization for Short-Range Wireless Communication // IEEE Trans. on Veh. Technol. 2009. V. 58. № 1. P. 3–13.
4. Zwang, Y., Broun A. K., Malik, W. Q., Edwards, D. J. High Resolution 3-D Angle of Arrival Determination for Indoor UWB Multipath Propagation // IEEE Trans. on Wir. Comm. 2008. V. 7. № 8. P. 3047–3055.
5. Фалькович С. Е., Пономарев В. И., Шкварко Ю. В. Оптимальный прием пространственно-временных сигналов в радиоканалах с рассеянием / под ред. С. Е. Фальковича. М.: Радио и связь. 1989.
6. Волосюк В. К., Кравченко В. Ф. Статистическая теория радиотехнических систем дистанционного зондирования и радиолокации. М.: Физматлит. 2008.
7. Реклейтис Г., Рейвиндер А., Рэксдэл К. Оптимизация в технике. В 2-х томах. М.: Мир. 1986.
8. Куликов Е. И., Трифонов А. П. Оценка параметров сигналов на фоне помех. М.: Сов. радио. 1978.

Поступила 15 марта 2011 г.

Structure and Characteristics of Algorithms Estimating Angle of Arrival and Angle Spread of the Wave Formed by Random Cluster of Scatterers

© Authors, 2011

Yu. S. Radchenko, R. V. Titov

While using indoor ultra-wide band signals one needs to cope with their multipath propagation. A typical object from which the signal scatters often has a cluster structure.

A mathematical model of the field received by the antenna array is a conditional Gaussian process. At small values of signal angle of arrival (AOA) fluctuations caused by cluster structure of the scatterer it is possible to obtain a rather simple equation for the signal correlation matrix. The elements of this matrix are proportional to the characteristic function of AOA fluctuations. The signal model considered in this case has some special features i.e. time and space processing can be separated and the signal is stochastic in the space domain. Moreover, in the extreme case the received signal can degenerate into one plain wave.

The signal space processing algorithm is synthesized. This algorithm estimates two parameters i.e. signal AOA and signal angle spread. Because of a priori limitations of estimated parameters the algorithm has some special features i.e. delta components of the probability densities of the estimates appear at the boundaries of a priori range. Their appearance is confirmed by statistical simulation. In addition, approximations of the probability densities of the estimates are suggested.

Estimations offsets are also obtained during simulation. For AOA the offset is rather small and changes slowly as the AOA changes. For angle spread it is vice versa. First offsets derivatives are considered in the Cramer-Rao bound calculation. When Cramer-Rao bounds were compared with standard deviations of the estimates obtained during simulation it appeared that they do not match. The standard deviation of AOA is much higher than its bound, while the standard deviation of the angle spread estimate crosses its bound. It shows that it is necessary to consider the behavior of these AOA and angle spread estimates at their a priori range boundaries as well as the possibility of signal degeneration.