Л. р. №5. Исследование законов распределения случайных сигналов

В каждом пункте работы необходимо заполнить табл. 1. По таблицам требуется построить гистограммы распределения, рассчитать выборочные значения мат. ожидания и среднеквадратического отклонения (СКО).

1. Равномерное распределение

2. Гауссовское распределение
2.1. $m = 130$, $\sigma = 35$
2.2. $m = 90$, $\sigma = 15$

3. Распределение Релея
3.1. $\sigma = 65$
3.2. $\sigma = 35$

4. Распределение значений гармонического сигнала
4.1. $m = 130$, $A = 130$
4.2. $m = 70$, $A = 68$

Табл. 1

Интервал	x	Количество попаданий	p^*
a	10		
b	30		
c	50		
d	70		
e	90		
f	110		
g	130		
h	150		
i	170		
j	190		
k	210		
l	230		
m	250		

Частость: $p^* = \dfrac{\text{количество попаданий в данный интервал}}{\text{сумма попаданий по всем интервалам}}$.

Мат. ожидание: $m = \sum\limits_i x_i p_i^*$.

СКО: $\sigma = \sqrt{\sum\limits_i x_i^2 p_i^* - m^2}$.

РАБОТА # 5

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ

ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

1. Получить наглядное представление о законах распределения случайных чисел.

2. Изучить основные методы моделирования законов распределения случайных чисел.

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ ПО РАБОТЕ

Теорией вероятностей называется математическая наука, изучающая закономерности в случайных явлениях. Одним из важнейших понятий теории вероятностей является понятие случайной величины. Под СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНОЙ понимается величина, которая в результате опыта со случайным исходом принимает то или иное значение.

ЗАКОНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ случайной величины называется любое правило (таблица, функция), позволяющая находить вероятности всевозможных событий, связанных со случайной величиной (например, вероятность того, что она примет какое-то значение или попадает в какой-то интервал).

Наиболее общей формой закона распределения, пригодной для всех случайных величин (как дискретных, так и не дискретных), является функция распределения.

ФУНКЦИЕЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ случайной величины X называют вероятность того, что она примет значение меньше, чем заданное x

$$F(x) = P\{X < x\}. \qquad (5.1)$$

Геометрически функция распределения интерпретируется как вероятность того, что случайная точка попадает левее заданной точки x (рис.5.1).

Из геометрической интерпретации можно вывести основные свойства функции распределения:

1) $F(x)$ - неубывающая функция своего аргумента,

2) $F(-\infty) = 0$,

3) $F(+\infty) = 1$.

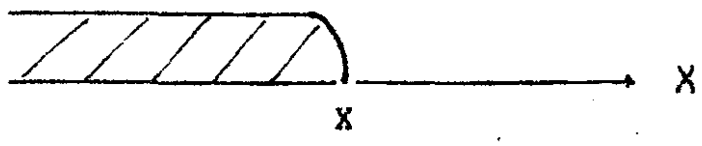


Рис.5.1.

ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТИ (плотностью распределения) непрерывной случайной величины X в точке x называется производная ее функции распределения в этой точке

$$\omega(x) = F'(x) = \frac{d}{dx} F(x). \tag{5.2}$$

График плотности вероятности $\omega(X)$ называется кривой распределения.

На основании (5.1) и (5.2) имеем

$$F(x) = P(X < x) = P(-\infty < X < x) = \int_{-\infty}^{x} \omega(x)dx. \tag{5.3}$$

В геометрической интерпретации функция распределения равна площади, ограниченной сверху кривой распределения и лежащей левее точки x (заштрихованная область) (рис.5.2)

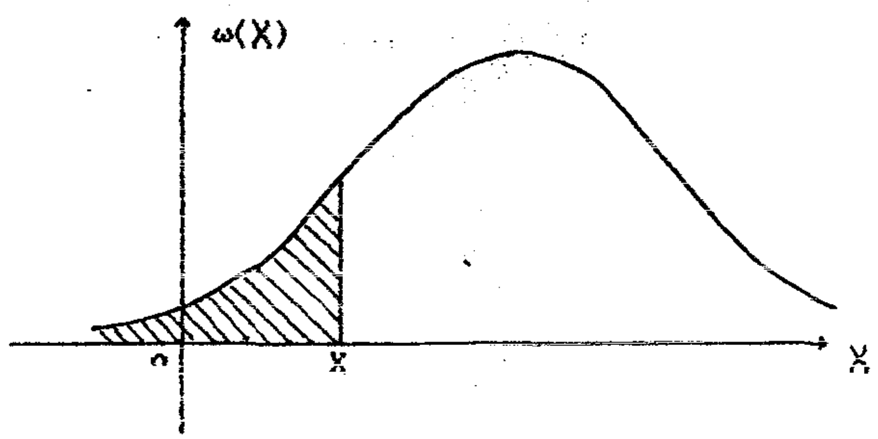


Рис.5.2.

Основные свойства плотности вероятности.

1. Плотность вероятности - неотрицательная функция, т.е. вся кривая распределения лежит не ниже оси абсцисс.

2. Интеграл в бесконечных пределах от плотности вероятности равен единице

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega(x)dx = 1, \tag{5.4}$$

т.е. полная площадь, ограниченная кривой распределения и осью абсцисс, равна единице.

Одномерные плотности вероятности мгновенных значений флуктуационного шума (нормальное распределение), гармонического колебания со случайной равномерно-распределенной фазой и их суммы определяются соответственно следующими выражениями:

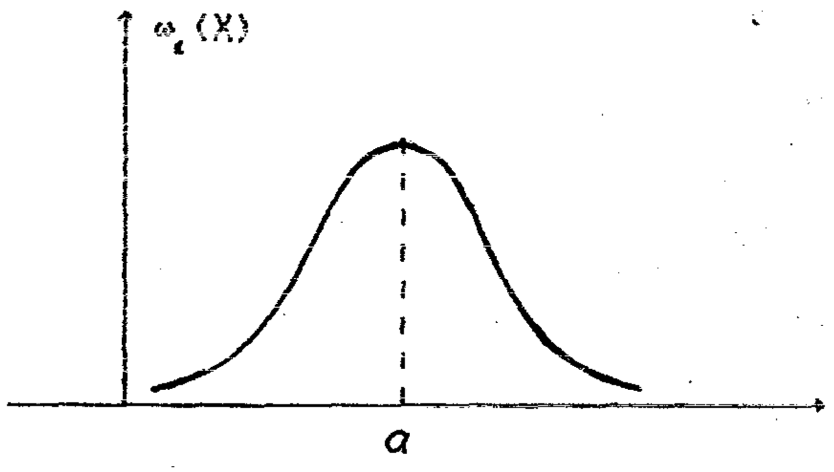
$$1.\ \omega_1(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left[-\frac{(X-a)^2}{2\sigma^2}\right]; \tag{5.5}$$

$$2.\ \omega_1(X) = \frac{1}{\pi\sqrt{A^2-(X-m_X)^2}}, \qquad m_X - A \le X \le m_X + A; \tag{5.6}$$

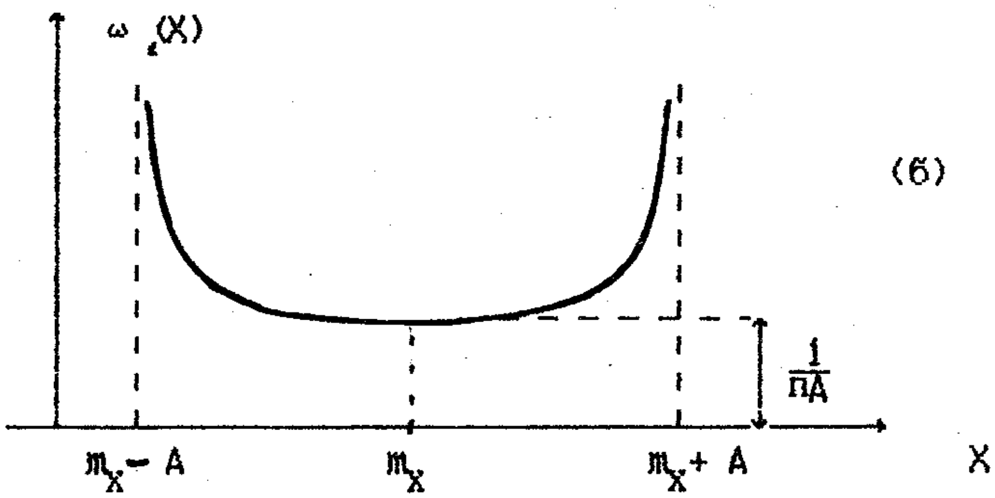
$$3.\ \omega_1(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma\pi} \int_0^{\pi} \exp\left[-\frac{(X - A\cos\varphi)^2}{2\sigma^2}\right]d\varphi, \tag{5.7}$$

где a и σ^2 – математическое ожидание и дисперсия флуктуационного шума,

A и φ – амплитуда и фаза гармонического колебания. Соответствующие графики приведены на рис.5.3 (а,б,в).



(а)



(б)

Рис.5.3. Однокерные плотности вероятности

а – плотность вероятности нормального шума;
б – плотность вероятности гармонического колебания
со случайной равновероятностной фазой;

Плотность вероятности огибающей нормального ценрированного процесса (распределение Рэлея) (рис.5.4) и фазы нормального центрированного процесса (рис.5.5)

$$1.\ \omega(a) = \frac{a}{2}\exp\left[-\frac{a^2}{2}\right], \quad a \geq 0, \tag{5.8}$$

$$2.\ \omega(\varphi) = \frac{1}{2\pi}, \quad 0 < \varphi < 2\pi. \tag{5.9}$$

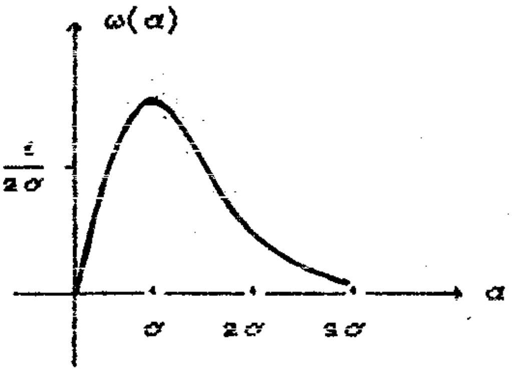


Рис.5.4.

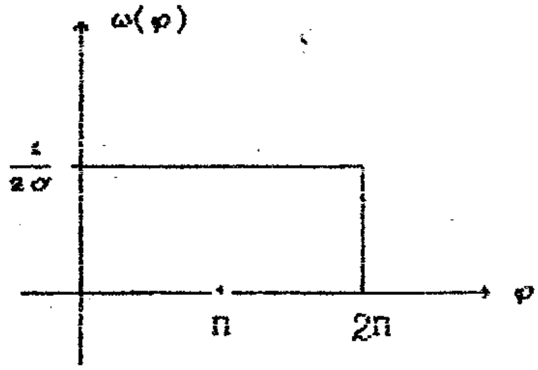


Рис.5.5.

НЕКОТОРЫЕ СПЕЦИАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Исходным материалом для формирования на ЭВМ случайных величин с различными законами распределения служат равномерно-распределенные в интервале (0,1) случайные числа, которые вырабатываются ЭВМ программными или же физическими датчиками случайных чисел.

Существуют различные приемы преобразования случайных чисел с равномерным законом распределения в случайные числа с заданным законом распределения.

Так, например, в качестве нормально распределенных случайных чисел можно использовать сумму нескольких независимых случайных чисел с равномерным распределением.

Для моделирования случайных чисел с заданным законом распределения можно использовать и другие свойства преобразования случайных чисел. Известно, например, что распределение произведения двух независимых случайных величин, одна из которых имеет рэлеевское распределение, у которого плотность вероятности, функция распределения, среднее значение и дисперсия имеют соответственно вид:

$$\omega(\rho) = \frac{\rho}{\sigma^2} \exp\left[-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}\right], \qquad \rho \geq 0. \tag{5.10}$$

$$F(\rho) = 1 - \exp\left[-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}\right], \qquad \rho \geq 0. \tag{5.11}$$

$$m_\rho = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\sigma, \tag{5.12}$$

$$\sigma_\rho^2 = \left[2 - \frac{\pi}{2}\right]\sigma^2. \tag{5.13}$$

а другая распределена по закону арксинуса

$$\omega(e) = \frac{1}{\pi b\sqrt{1-\left[e-a\right]^2 / b^2}}. \tag{5.14}$$

$$F(e) = \frac{1}{\pi}\arcsin\frac{e-a}{b} + \frac{1}{2}. \tag{5.15}$$

$$m_e = a. \tag{5.16}$$

$$\sigma_\theta^2 = \frac{b^2}{a}. \qquad (5.17)$$

с параметрами (0, 1/2), т.е. с нулевым средним значением и дисперсией равной 1/2, является НОРМАЛЬНЫМ, $y = \rho \cdot \theta$.

Это позволяет формировать нормальную случайную величину путем следующего преобразования системы двух независимых равномерно распределенных в интервале (0,1) случайных чисел x_1, x_2

$$y = \sigma \sqrt{-2 \ln X_1} \cdot \sin 2\pi X_2. \qquad (5.18)$$

Параметры полученной этим способом нормально распределенной случайной величины будут $(0, \sigma^2)$.

Для моделирования случайных величин с некоторыми законами распределения иногда удобно использовать преобразования нормально распределенных случайных чисел. Так, например, случайные величины с рэлеевским (5.10 - 5.13) и показательным законами распределения

$$\omega(y) = \lambda \cdot e^{-\lambda y}, \qquad y \geq 0; \qquad (5.19)$$

$$F(y) = \lambda - e^{-\lambda y}, \qquad y \geq 0; \qquad (5.20)$$

$$m_y = \sigma_y = \frac{1}{\lambda}, \qquad (5.21)$$

можно получить путем преобразования системы двух независимых нормальных случайных чисел X_1 и X_2 с параметрами $(0, \sigma^2)$ в виде

$$y = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}, \qquad (5.22)$$

$$y = X_1^2 + X_2^2 \qquad (5.23)$$

соответственно.

При этом для рэлеевского распределения параметр σ будет совпадать с параметром σ исходного нормального распределения, а для показательного распределения параметр λ связан с параметром σ исходного нормального распределения соотношением

$$\lambda = \frac{1}{2\sigma^2}. \qquad (5.24)$$

Алгоритмы (5.22) и (5.23) основаны на известных свойствах преобразований нормальных случайных величин. Немного изменив эти алгоритмы, можно моделировать случайные величины с другими распространенными законами распределения. Так, обобщая формулы (5.22) и (5.23) в виде

$$y = \sqrt{\left[X_1 + a\right]^2 + X_2^2}, \qquad y = \sum_{k=1}^{m} X_k^2, \tag{5.25}$$

где X_k - нормальные случайные числа, с параметрами $(0, \sigma^2)$, получим алгоритмы для моделирования случайных величин с законом распределения Райса и законом распределения χ с m - степенями свободы соответственно:

$$\omega(y) = \frac{y}{\sigma^2} \exp\left[- \frac{y^2 + a^2}{2\sigma^2}\right] \cdot I_0\left[\frac{ay}{\sigma^2}\right], \qquad y \geq 0; \tag{5.26}$$

$$\omega(y) = \frac{1}{2^{m/2}\, \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \sigma^2} \left[\frac{y}{\sigma^2}\right]^{\frac{m}{2}-1} \cdot e^{\frac{-y}{2\sigma^2}}, \qquad y \geq 0, \tag{5.27}$$

где $I_0(x)$ - модифицированная функция Бесселя нулевого порядка,

$\Gamma(x)$ - гамма-функция.

В данной лабораторной работе из массива равномерно распределенных случайных чисел получают случайные числа, распределенные по нормальному и рэлеевскому законам, используя следующие алгоритмы преобразования, соответственно:

$$y = \sigma \sqrt{-2 \ln X_1} \cdot \sin 2\pi X_2, \tag{5.28}$$

$$y = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}. \tag{5.29}$$

КРИТЕРИИ СОГЛАСИЯ

Для сравнения экспериментальных данных с теоретическими используют КРИТЕРИИ СОГЛАСИЯ.

Рисунок 5.6 поясняет этот метод.

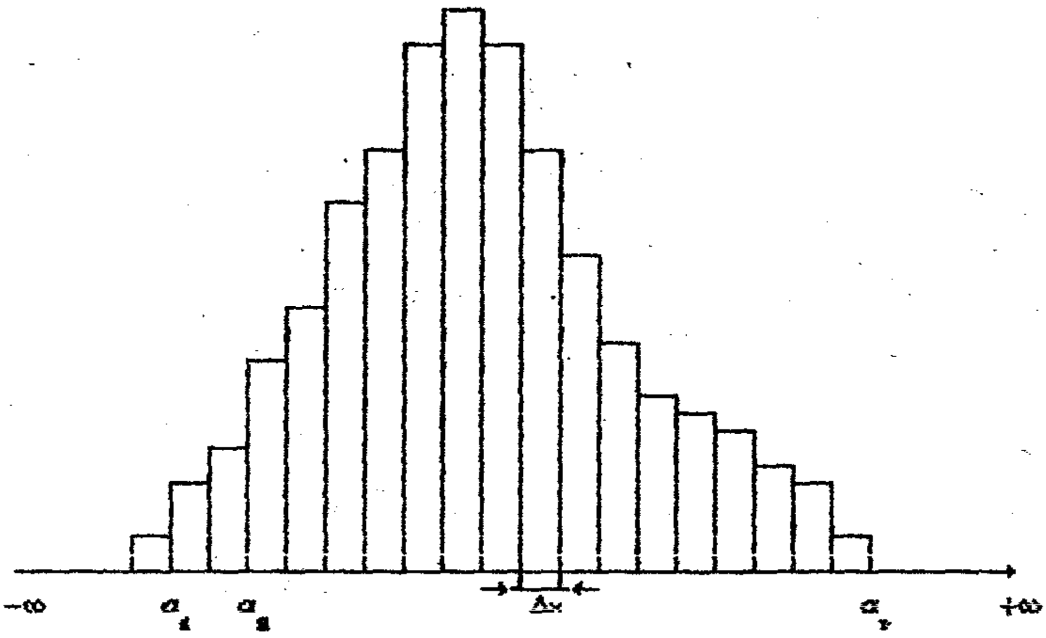


Рис.5.6.

Для этого числовую ось разбиваем на r разрядов

$$(-\infty,\ a_1),\ (a_1,\ a_2),\ \ldots,\ (a_{r-1},\ a_r),\ (a_r,\ +\infty), \qquad (5.30)$$

где $a_1 < a_2 < \ldots < a_{r-1} < a_r$.

При справедливой гипотезе i-му разряду $\left[a_{i-1},\ a_i\right]$ соответствует вероятность P_i, где

$$P_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{(x-\langle x\rangle)^2}{2\sigma^2}}\,\Delta x. \qquad (5.31)$$

Из n выбранных значений $\left[X_1,\ X_2,\ \ldots\ X_n\right]$ случайной величины X в i-ый разряд попадает случайное число n_i значений.

Тогда отношение n_i/n представляет собой частоту попаданий выбранных значений в i-ый разряд. Близость частот n_i/n к вероятности P_i свидетельствует в пользу основной гипотезы. Случайная величина

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{\left[n_i - np_i\right]^2}{np_i} \qquad (5.32)$$

характеризует согласованность гипотезы с опытными данными.

Рассчитывается экспериментальное значение x^2 и сравнивается с табличными x^2_α, если $x^2 < x^2_\alpha$, то гипотеза не противоречит опытным данным.

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

1. Изучить рекомендуемую литературу.
2. Вычертить графики плотности вероятности
   а) гармонического процесса со случайной равномерно распределенной фазой, с постоянной составляющей 1В и амплитудой 1В;
   б) нормального случайного процесса с дисперсией σ^2=1 В^2 и нулевым средним значением;
3. Вычертить графики
   а) по п.2 а, но с вдвое большей постоянной составляющей;
   б) по п.2 а, но с увеличенной вдвое амплитудой;
   в) по п.2 б, но с увеличенной в 4 раза дисперсией.

Таблица значений ХИ-квадрат.

Число степеней свободы	Значение ХИ-квадрат	Число степеней свободы	Значение ХИ-квадрат
К	x^2	К	x^2
1	3.84	14	23.7
2	5.99	15	25.0
3	7.82	16	26.3
4	9.49	17	27.6
5	11.07	18	28.9
6	12.59	19	30.1
7	14.07	20	31.4
8	15.51	21	32.7
9	16.92	22	33.9
10	18.31	23	35.2
11	19.68	24	36.4
12	21.00	25	37.7
13	22.40	26	38.9

ПОДГОТОВКА К РАБОТЕ

При подготовке к выполнению лабораторной работы и ее защите необходимо изучить соответствующие разделы литературы, конспект лекций, теоретическое приложение к работе, выполнить домашнее задание, заготовить бланк отчета по лабораторной работе.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполняется на микро ЭВМ ПК 8000 "Сура".

Вся работа делится на 3 части:

1. Допуск к выполнению работы.
2. Выполнение работы.
3. Защита работы.

1. Разрешение на выполнение работы дает ЭВМ. Она тестирует каждого студента, задавая ему вопросы. При большинстве правильных ответов студент получает допуск к выполнению лабораторной работы.

2. При выполнении работы ЭВМ запрашивает об исходных данных и выдает на экране дисплея гистограммы различных законов распределения, производит необходимые расчеты, делает выводы по ним.

3. К защите необходимо ответить на контрольные вопросы и составить отчет по выполнению работы.

<u>Равномерный закон</u>

Количество испытаний: N = 400

<u>Нормальный закон</u>

Количество испытаний: N = 300

	1 эксперимент	2 эксперимент	3 эксперимент
Математическое ожидание M	5	-6	0
Дисперсия D	3	2	1

<u>Биноминальный закон</u>

Количество испытаний: N = 500

СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

1. Выполненное домашнее задание.
2. Гистограммы всех исследованных законов распределения.
3. Анализ полученных результатов.
4. Выводы по работе.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что называется интегральной функцией распределения (одномерной и многомерной) случайного процесса, каковы ее свойства?

2. Что называется плотностью вероятности (дифференциальной функцией распределения) случайного процесса, каковы ее свойства?

3. Как найти вероятность пребывания случайного процесса в заданном интервале, пользуясь интегральной функцией распределения и плотностью вероятности?

4. Как определить основные числовые характеристики случайного процесса на основе усреднения по ансамблю реализаций процесса и на основе усреднения по времени.

5. Напишите выражение для нормального распределения. Каковы его параметры и их физический смысл?

6. Как распределены мгновенные значения гармонического колебания со случайной равномерно-распределенной начальной фазой? Нарисуйте соответствующий график и дайте необходимые пояснения.

7. Дайте определение стационарного процесса в узком и широком смысле. В чем состоит эргодическое свойство стационарного случайного процесса?

8. Что называется корреляционной функцией случайного процесса, каковы ее свойства?

9. Какой случайный процесс называется узкополосным? Выразите математически его мгновенные значения через огибающую и фазу, а также через квадратурные компоненты.

10. По каким законам распределены огибающая и фаза узкополосного нормального случайного процесса.

11. Какие вероятностные характеристики случайного процесса можно определить по заданной плотности вероятности?

12. Изобразите реализации двух центрированных нормальных случайных процессов, отличающихся средней мощностью в 4 раза и их плотности вероятности.

13. Изобразите реализации двух случайных процессов с одинаковой дисперсией, но с различными математическими ожиданиями. Изобразите кривые плотности вероятности.

14. Как распределены мгновенные значения случайного сигнала в виде гармонического колебания с постоянной амплитудой и случайной равномерно распределенной начальной фазой?

15. Напряжение, поданное на резистор с сопротивлением 5 Ом, представляет собой случайный процесс с математическим ожиданием m_x = 2 В, дисперсией σ_x = 4 В^2. Какова мощность, выделяемая на резисторе?

16. Напишите выражение плотности вероятности равномерного распределенного случайного процесса в диапазоне напряжений (-4, +4) В. Вычислите математическое ожидание и дисперсию этого процесса. Изобразите график плотности вероятности.

17. Напишите аналитическое выражение для плотности вероятности нормально распределенной случайной величины с параметрами m_x = 3 В, σ_x^2 = 5В^2. Определите вероятность того, что случайная величина Х не превысит значение 10 В. Ответ поясните графически.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кловский Д.Д. Теория передачи сигналов. Учебник для вузов. - М.: Связь, 1973.

2. Теория передачи сигналов. Зюко А.Г., Кловский Д.Д. и др. Учебник для вузов. - М.: Радио и связь, 1986.

3. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. - М.: Наука, 1988.

4. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. - М.: Мир, 1978.