

Государственное образовательное учреждение высшего
профессионального образования
«Поволжская государственная академия телекоммуникаций
и информатики»

Кафедра ТОРС

Одобрено методическим советом ГОУВПО ПГАТИ

Методическая разработка
к лабораторной работе № 6 (2)
по дисциплинам «Теория электрической связи»
и «Радиотехнические цепи и сигналы»

«Дискретизация непрерывных сигналов»

(для студентов 2 курса специальностей 200700, 200900, 201000, 201100,
201800, 550400)

Составитель: асс. Чингаева А.М.

Редактор: д.т.н. проф. Николаев Б.И.

Рецензент: к.т.н. доц. Алексеев Г.П.

Самара, 2006

Лабораторная работа №6 (2)
Дискретизация непрерывных сигналов

Цель работы: изучение вопросов дискретизации и восстановления непрерывных сигналов.

Краткие теоретические сведения

1. Временные и спектральные характеристики дискретного сигнала

В ряде задач бывает необходимо представить непрерывный сигнал $x(t)$ в виде набора его значений (*отсчётов*), взятых через равные интервалы времени Δt (см. рис. 1).

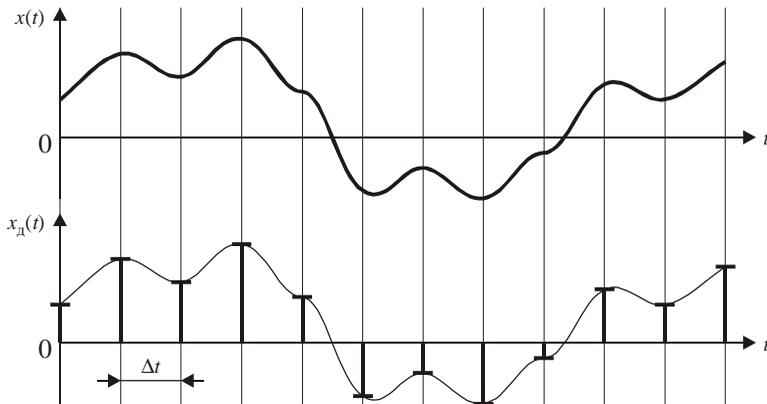


Рис. 1. Непрерывный сигнал $x(t)$ и дискретный сигнал $x_d(t)$

Процесс перехода от сигнала, непрерывного во времени, к сигналу, дискретному во времени, называется *дискретизацией сигнала*. Математически процесс дискретизации можно описать как умножение непрерывного сигнала $x(t)$ на решётчатую функцию $\alpha(t)$, представляющую собой последовательность δ -функций с весом Δt , следующих с интервалом Δt (см. рис. 2):

$$\alpha(t) = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta t).$$

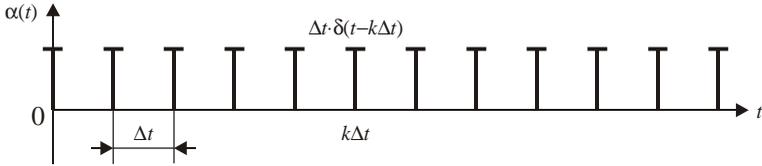


Рис. 2. Решётчатая функция $\alpha(t)$

Тогда выражение для $x_d(t)$ можно записать в виде:

$$x_d(t) = x(t) \alpha(t). \quad (1)$$

Найдём выражение для спектра $\dot{S}_d(f)$ дискретного сигнала $x_d(t)$. Функция времени (сигнал) и её спектр связаны парой преобразований Фурье:

$$\dot{S}_d(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x_d(t) e^{-j2\pi ft} dt, \quad (2)$$

$$x_d(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_d(f) e^{j2\pi ft} df. \quad (3)$$

Здесь (2) – прямое, а (3) – обратное преобразование Фурье.

Прежде, чем приступить непосредственно к отысканию выражения для $\dot{S}_d(f)$, докажем полезное соотношение, имеющее самостоятельное значение.

Пусть некоторый сигнал $z(t)$ равен произведению двух других сигналов $x(t)$ и $y(t)$:

$$z(t) = x(t) y(t).$$

Спектр сигнала $x(t)$

$$\dot{S}_x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt,$$

а спектр сигнала $y(t)$

$$\dot{S}_y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j2\pi ft} dt.$$

Найдём спектр $z(t)$:

$$\dot{S}_z(f) = \int_{-\infty}^{\infty} z(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y(t) e^{-j2\pi ft} dt .$$

Запишем для сигнала $x(t)$ обратное преобразование Фурье:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_x(f_1) e^{j2\pi f_1 t} df_1 .$$

Подставим это выражение в выражение для $\dot{S}_z(f)$:

$$\begin{aligned} \dot{S}_z(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_x(f_1) e^{j2\pi f_1 t} df_1 \right] y(t) e^{-j2\pi ft} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_x(f_1) e^{j2\pi f_1 t} y(t) e^{-j2\pi ft} df_1 dt . \end{aligned}$$

Поменяем порядок интегрирования:

$$\begin{aligned} \dot{S}_z(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_x(f_1) e^{j2\pi f_1 t} y(t) e^{-j2\pi ft} dt df_1 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_x(f_1) \left[\int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j2\pi ft} e^{j2\pi f_1 t} dt \right] df_1 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_x(f_1) \left[\int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j2\pi(f-f_1)t} dt \right] df_1 . \end{aligned}$$

Выражение в квадратных скобках есть спектр сигнала $y(t)$, сдвинутый по оси частот на величину f_1 :

$$\dot{S}_y(f-f_1) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j2\pi(f-f_1)t} dt .$$

Отсюда

$$\dot{S}_z(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_x(f_1) \dot{S}_y(f-f_1) df_1 . \quad (4)$$

Из полученного выражения видно, что спектр произведения двух функций $\dot{S}_z(f)$ представляет собой свёртку спектров $\dot{S}_x(f)$ и $\dot{S}_y(f)$.

Как было сказано выше, дискретный сигнал $x_d(t)$ представляет собой произведение непрерывного сигнала $x(t)$ на решётчатую функцию $\alpha(t)$. Значит, спектр $\dot{S}_d(f)$ сигнала $x_d(t)$ можно найти, исполь-

зую выражение (4). Спектр $\dot{S}(f)$ сигнала $x(t)$ считается известным (он связан с сигналом $x(t)$ прямым преобразованием Фурье). Найдём спектр $\alpha(t)$.

Функция $\alpha(t)$ является периодической с периодом Δt , поэтому её можно разложить в ряд Фурье:

$$\alpha(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \dot{C}_i e^{j2\pi f_i t},$$

где

$$\dot{C}_i = \frac{1}{\Delta t} \Delta t \int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} \delta(t) e^{-j2\pi f_i t} dt = 1$$

(при интегрировании использовано фильтрующее свойство δ -функции), $f_i = i/\Delta t$. Тогда

$$\alpha(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi f_i t}.$$

Спектральная плотность $\dot{S}_\alpha(f)$ функции $\alpha(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{S}_\alpha(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{i=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi f_i t} \right] e^{-j2\pi f t} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi(f-f_i)t} dt. \end{aligned}$$

Изменим порядок суммирования и интегрирования:

$$\dot{S}_\alpha(f) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi(f-f_i)t} dt.$$

Интеграл в этом выражении представляет собой спектр функции $s_1(t) \equiv 1$ (см. рис. 3), сдвинутый по оси частот на величину f_i :

$$\dot{S}_1(f - f_i) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) e^{-j2\pi(f-f_i)t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi(f-f_i)t} dt = \delta(f - f_i).$$

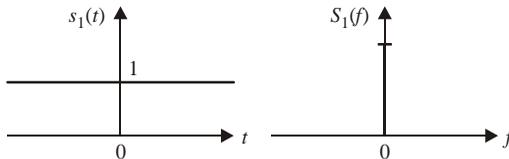


Рис. 3. Функция $s_1(t) \equiv 1$ и её спектр $\dot{S}_1(f) = \delta(f)$

Тогда спектр функции $\alpha(t)$ запишется в виде

$$\dot{S}_\alpha(f) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(f - f_i). \quad (5)$$

Теперь, используя (4) и (5), найдём $\dot{S}_\Delta(f)$:

$$\begin{aligned} \dot{S}_\Delta(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(f_1) S_\alpha^*(f - f_1) df_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(f_1) \left[\sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(f - f_1 - f_i) \right] df_1 = \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(f - f_1 - f_i) \dot{S}(f_1) df_1 = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \dot{S}(f - f_i) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \dot{S}\left(f - \frac{i}{\Delta t}\right). \end{aligned}$$

Величину Δt называют *интервалом дискретизации*, а обратную ей величину $F_\Delta = 1/\Delta t$ – *частотой дискретизации*.

Таким образом, спектр $\dot{S}_\Delta(f)$ дискретного во времени сигнала $x_\Delta(t)$:

$$\dot{S}_\Delta(f) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \dot{S}(f - iF_\Delta). \quad (6)$$

Сигналы $x(t)$, $x_\Delta(t)$, а также соответствующие им амплитудные спектры $S(f)$ и $S_\Delta(f)$ показаны на рис. 4.

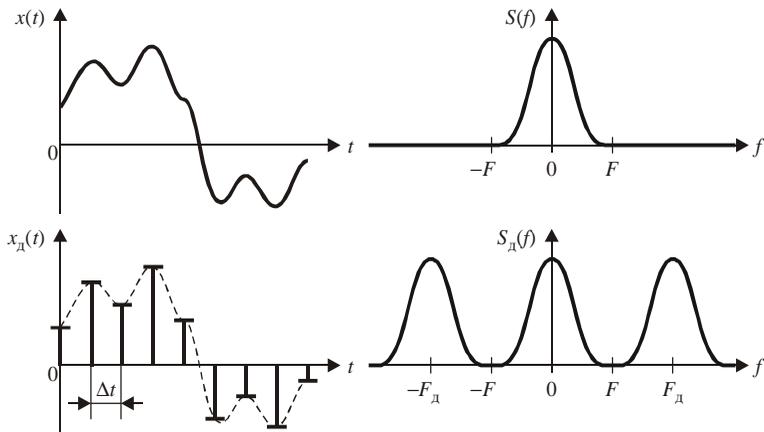


Рис. 4. Непрерывный во времени $x(t)$ и дискретный $x_\Delta(t)$ сигналы и их амплитудные спектры $S(f)$ и $S_\Delta(f)$

Из формулы (6) и рис. 4 видно, что спектр $\dot{S}_d(f)$ дискретного сигнала $x_d(t)$ является периодической функцией частоты с периодом, равным частоте дискретизации F_d . Из сравнения спектров видно, что спектр дискретного сигнала представляет собой спектр непрерывного сигнала, периодически продолженный вправо и влево по оси частот. Таким образом, в спектре дискретного сигнала $x_d(t)$ содержится информация о спектре непрерывного сигнала, а следовательно (в силу однозначности преобразования Фурье), и о самом непрерывном сигнале $x(t)$.

2. Теорема Котельникова

Теорема

Непрерывный сигнал $x(t)$, спектр которого ограничен частотой F_B , однозначно определяется своими отсчётами, взятыми через интервал времени $\Delta t = \frac{1}{F_d} = \frac{1}{2F}$, где $F \geq F_B$.

Доказательство

Рассмотрим спектр $\dot{S}_d(f)$ дискретного сигнала $x_d(t)$, показанный на рис. 4. Спектр $\dot{S}_d(f)$ является периодической функцией частоты f (из формулы (6) и рис. 4), которую можно разложить в ряд Фурье в частотной области:

$$\dot{S}_d(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{D}_k e^{j2\pi f \frac{k}{F_d}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{D}_k e^{j2\pi k \Delta t f}. \quad (7)$$

Коэффициенты разложения

$$\dot{D}_k = \frac{1}{2F} \int_{-F}^F \dot{S}_d(f) e^{-j2\pi k \Delta t f} df.$$

Здесь $F = F_d/2$. Из рис. 4 видно, что на интервале $[-F; F]$ спектр $\dot{S}_d(f)$ дискретного сигнала и спектр $\dot{S}(f)$ непрерывного сигнала одинаковы. Значит, можно записать:

$$\dot{D}_k = \frac{1}{2F} \int_{-F}^F \dot{S}(f) e^{-j2\pi k \Delta t f} df.$$

Последний интеграл представляет собой обратное преобразование Фурье сигнала $x(t)$, при $t = -k\Delta t$:

$$x(-k\Delta t) = \int_{-F}^F \dot{S}(f) e^{-j2\pi f k \Delta t} df.$$

Тогда

$$\dot{D}_k = \frac{1}{2F} x(-k\Delta t). \quad (8)$$

Подставляя (8) в (7), получим

$$\dot{S}_\pi(f) = \frac{1}{2F} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(-k\Delta t) e^{j2\pi f k \Delta t}$$

или, после замены k на $-k$,

$$\dot{S}_\pi(f) = \frac{1}{2F} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) e^{-j2\pi f k \Delta t}.$$

Как было сказано выше, на интервале $[-F; F]$ спектры дискретного и непрерывного сигнала одинаковы. Значит, можно записать:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-F}^F \dot{S}(f) e^{j2\pi f t} df = \int_{-F}^F \dot{S}_\pi(f) e^{j2\pi f t} df = \\ &= \int_{-F}^F \left[\frac{1}{2F} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) e^{-j2\pi f k \Delta t} \right] e^{j2\pi f t} df = \\ &= \frac{1}{2F} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-F}^F x(k\Delta t) e^{j2\pi f(t-k\Delta t)} df = \frac{1}{2F} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \int_{-F}^F e^{j2\pi f(t-k\Delta t)} df. \end{aligned}$$

В полученном выражении

$$\begin{aligned} \int_{-F}^F e^{j2\pi f(t-k\Delta t)} df &= \frac{1}{j2\pi(t-k\Delta t)} e^{j2\pi f(t-k\Delta t)} \Big|_{-F}^F = \\ &= \frac{e^{j2\pi F(t-k\Delta t)} - e^{-j2\pi F(t-k\Delta t)}}{j2\pi(t-k\Delta t)} = \frac{\sin[2\pi F(t-k\Delta t)]}{\pi(t-k\Delta t)}. \end{aligned}$$

С учётом этого

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2F} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \frac{\sin[2\pi F(t-k\Delta t)]}{\pi(t-k\Delta t)} = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \frac{\sin[2\pi F(t-k\Delta t)]}{2\pi F(t-k\Delta t)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \frac{\sin[\pi F_\pi(t-k\Delta t)]}{\pi F_\pi(t-k\Delta t)}. \end{aligned}$$

Выражение

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \frac{\sin[\pi F_\pi(t-k\Delta t)]}{\pi F_\pi(t-k\Delta t)}. \quad (9)$$

называют *рядом Котельникова*.

Ряд Котельникова представляет собой *разложение функции* $x(t)$ по *базисным функциям*

$$\Psi_k(t) = \frac{\sin[\pi F_d(t - k\Delta t)]}{\pi F_d(t - k\Delta t)}.$$

Величины $x(k\Delta t)$ представляют собой *коэффициенты* этого *разложения*, которые полностью определяют исходную функцию $x(t)$, что и требовалось доказать.

Вид базисных функций $\Psi_k(t)$ показан на рис. 5.

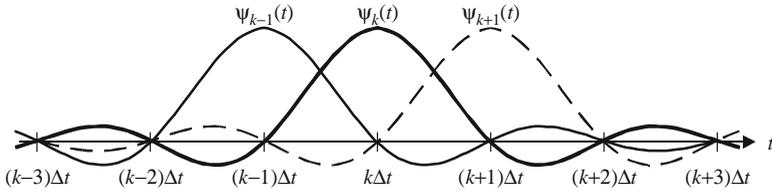


Рис. 5. Вид базисных функций $\Psi_k(t)$

В ходе рассуждений мы воспользовались тем фактом, что спектры дискретного и непрерывного сигнала одинаковы на интервале $[-F; F]$ (см. рис. 4). Однако, это справедливо лишь для $F \geq F_b$. При уменьшении частоты дискретизации $F_d = 2F$ отдельные составляющие («лепестки») спектра $\dot{S}_d(f)$ начинают перекрываться, и утверждение об одинаковости спектров дискретного и непрерывного сигнала на интервале $[-F; F]$ становится несправедливым. Именно по этой причине частота дискретизации F_d по теореме Котельникова выбирается большей или равной удвоенной верхней частоте F_b в спектре непрерывного сигнала $x(t)$. Отсюда же становится ясно, почему теорема Котельникова справедлива лишь для сигналов со строго ограниченным спектром. При дискретизации неограниченных по спектру сигналов неизбежно возникновение погрешности (см. п. 4).

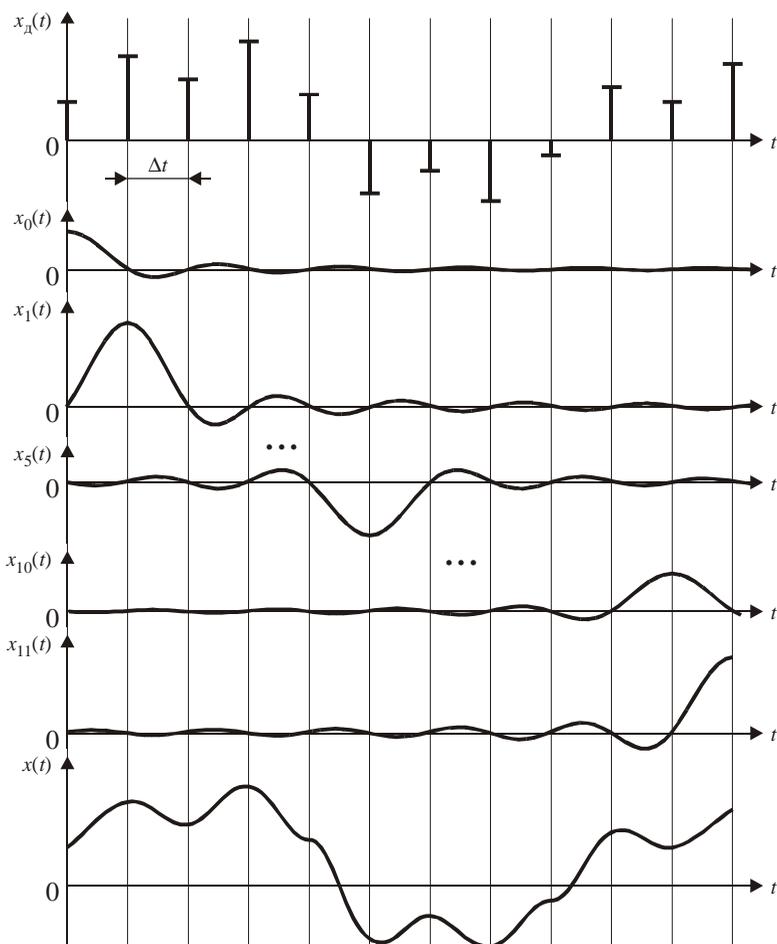


Рис. 6. Иллюстрация процесса восстановления непрерывного сигнала $x(t)$ по его дискретным отсчётам

3. Восстановление непрерывного сигнала по его дискретным значениям

Из записи ряда Котельникова (формула (9)) следует, что для восстановления исходного непрерывного сигнала $x(t)$ по его дискретным отсчётам необходимо помножить каждый отсчёт на соответствующую базисную функцию $\psi_k(t)$ и сложить полученные произведения $x_k(t)$:

$$x_k(t) = x(k\Delta t) \frac{\sin[\pi F_d(t - k\Delta t)]}{\pi F_d(t - k\Delta t)}, \quad (10)$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k(t). \quad (11)$$

На практике бесконечное число отсчётов учесть невозможно. Кроме того, все реальные сигналы ограничены во времени ($t \in [0; T]$), поэтому при их восстановлении берутся $N = T/\Delta t = 2FT$ отсчётов:

$$x(t) \approx \sum_{k=0}^{N-1} x_k(t). \quad (12)$$

Величину $2FT$ часто называют *базой сигнала*: $B = 2FT$. Погрешности такого представления обсуждаются в п. 4.

На рис. 6 показан дискретный сигнал $x_d(t)$, внешний вид $x_k(t)$ для отсчётов с номерами 0, 1, 5, 10 и 11 и восстановленный сигнал $x(t)$, представляющий собой сумму всех $x_k(t)$.

На практике для восстановления сигнала часто используют фильтр нижних частот (ФНЧ). Вернёмся к рис. 4. Как уже говорилось, в полосе частот $[-F; F]$ спектры дискретного и непрерывного сигналов совпадают. Если в спектре дискретного сигнала оставить только ту часть, которая попадает в полосу частот $[-F; F]$, а всё остальное подавить, получим спектр исходного непрерывного сигнала (см. рис. 7). Поскольку преобразование Фурье однозначно, т.е. одинаковые сигналы всегда имеют одинаковые спектры и наоборот, в результате получим исходный непрерывный сигнал.

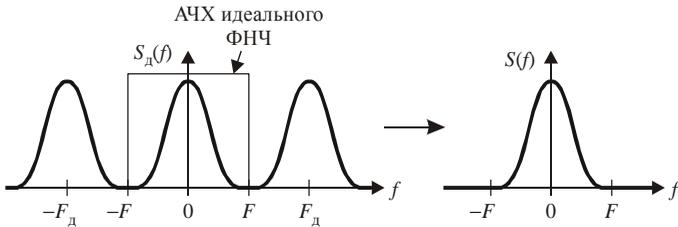


Рис. 7. Спектры сигналов на входе и выходе идеального ФНЧ

Докажем, что при помощи идеального ФНЧ можно точно восстановить исходный непрерывный сигнал.

Найдём импульсную характеристику $g(t)$ идеального ФНЧ с частотой среза $F_c = F$ (т.е. реакцию фильтра на δ -функцию, поданную в момент времени $t = 0$). Для этого воспользуемся обратным преобразованием Фурье:

$$g(t) = \int_{-F}^F 1 \cdot e^{j2\pi ft} df = \int_{-F}^F e^{j2\pi ft} df.$$

Подобный интеграл был решён выше при доказательстве теоремы Котельникова:

$$g(t) = 2F \frac{\sin(2\pi Ft)}{2\pi Ft}.$$

Графики амплитудно-частотной (АЧХ) и импульсной (ИХ) характеристик идеального ФНЧ показаны на рис. 8.

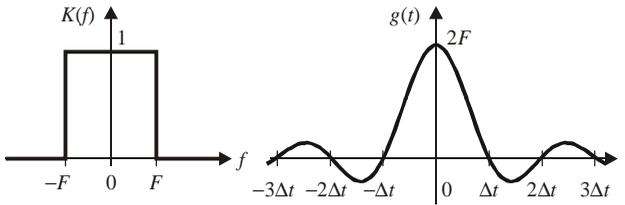


Рис. 8. АЧХ и ИХ идеального ФНЧ

Из рис. 8 видно, что форма ИХ идеального ФНЧ (с точностью до постоянного коэффициента $2F$) совпадает с формой базисных функций ряда Котельникова $\psi_k(t)$ (рис. 5).

Согласно формуле (1)

$$x_d(t) = x(t) \alpha(t).$$

Отсчёт сигнала в момент времени $k\Delta t$:

$$x_d(k\Delta t) = x(k\Delta t) \alpha(k\Delta t) = x(k\Delta t) \cdot \Delta t \cdot \delta(t - k\Delta t).$$

Подадим этот отсчёт на вход идеального ФНЧ. Поскольку $\delta(t - k\Delta t)$ – δ -функция, сдвинутая по оси времени на величину $k\Delta t$, а $x(k\Delta t) \cdot \Delta t$ – её вес, то реакция ФНЧ на $x_d(k\Delta t)$ будет представлять собой импульсную характеристику, сдвинутую по оси времени на величину $k\Delta t$ и взятую с весом $x(k\Delta t) \cdot \Delta t$:

$$y_k(t) = x(k\Delta t) \cdot \Delta t \cdot g(t - k\Delta t) = 2F \cdot \Delta t \cdot x(k\Delta t) \frac{\sin[2\pi F(t - k\Delta t)]}{2\pi F(t - k\Delta t)}.$$

По определению $\Delta t = 1/2F$, следовательно,

$$y_k(t) = x(k\Delta t) \frac{\sin[2\pi F(t - k\Delta t)]}{2\pi F(t - k\Delta t)}.$$

Как видно из этой записи, выражение для $y_k(t)$ совпадает с k -м слагаемым ряда Котельникова (см. выражение (9)).

Поскольку ФНЧ является линейным фильтром, для него справедлив принцип суперпозиции. Значит, реакцию на сигнал $x_d(t)$, представляющий собой сумму δ -функций с весами, можно найти как сумму реакций на соответствующие отсчеты $x_d(k\Delta t)$:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \frac{\sin[2\pi F(t - k\Delta t)]}{2\pi F(t - k\Delta t)}. \quad (13)$$

Из сравнения выражений (9) и (13) видно, что (13) представляет собой ряд Котельникова. Значит, реакция на выходе идеального ФНЧ при подаче на его вход дискретного сигнала $x_d(t)$ представляет собой исходный непрерывный сигнал $x(t)$:

$$y(t) \equiv x(t),$$

что и требовалось доказать.

Для доказательства был выбран ФНЧ с частотой среза $F_c = F = F_d/2$. Рассмотрим более общий случай, когда $F_c \neq F$. Это возможно, если частота дискретизации выбрана «с запасом», и частоту среза ФНЧ можно взять больше или меньше, чем $F_d/2$. Из рис. 7 видно, что и в этом случае спектр сигнала на выходе ФНЧ будет совпадать со спектром исходного сигнала. Импульсная характеристика ФНЧ для этого случая будет иметь вид:

$$g(t) = 2F_c \frac{\sin(2\pi F_c t)}{2\pi F_c t},$$

а сигнал на выходе ФНЧ запишется как

$$y(t) = \frac{F_c}{F} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \frac{\sin[2\pi F_c(t - k\Delta t)]}{2\pi F_c(t - k\Delta t)}.$$

ФНЧ, который используется для восстановления непрерывного сигнала по дискретному, часто называют *фильтром-восстановителем* или *котельниковским фильтром*.

4. Погрешности, возникающие при дискретизации и восстановлении непрерывного сигнала

Теорема Котельникова справедлива лишь для сигналов со строго ограниченным спектром, однако на практике чаще всего встречаются сигналы, спектр которых не ограничен по частоте. Тем не менее, и такой сигнал можно представить в дискретной форме, а затем восстановить, но в этом случае неизбежно возникновение погрешностей.

Рассмотрим сигнал $x(t)$, имеющий неограниченный спектр $\dot{S}(f)$. Если основная часть энергии этого сигнала сосредоточена в полосе $[-F; F]$, то часть спектра, выходящую за пределы этой полосы, можно отсечь при помощи идеального ФНЧ (рис. 9).

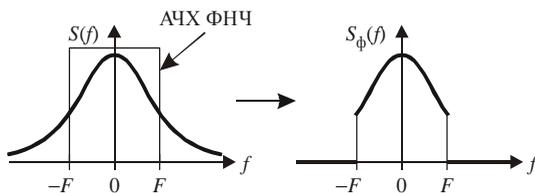


Рис. 9. Усечение спектра исходного сигнала с помощью ФНЧ

Сигнал $x_\phi(t)$ на выходе ФНЧ будет иметь ограниченный спектр, следовательно, будет удовлетворять условию теоремы Котельникова. Погрешность дискретизации будет определяться отличием сигнала $x_\phi(t)$ от исходного сигнала $x(t)$:

$$\varepsilon_1(t) = x(t) - x_\phi(t).$$

Из рис. 9 видно, что относительная величина этой погрешности определяется площадью отсечённой части спектра сигнала:

$$\delta_1 = \frac{\overline{\varepsilon_1^2(t)}}{\overline{x^2(t)}} = \frac{\int_{-F}^{\infty} |\dot{S}_0(f)|^2 df}{\int_0^{\infty} |\dot{S}_0(f)|^2 df}. \quad (14)$$

Здесь $|\dot{S}_0(f)| = S_0(f) = 2S(f)$ – амплитудный спектр сигнала на положительных частотах.

Сигнал с неограниченным спектром можно подвергнуть дискретизации и без предварительного усечения спектра. В этом случае при

дискретизации происходит перекрытие (наложение) соседних лепестков спектра дискретного сигнала (рис. 10).

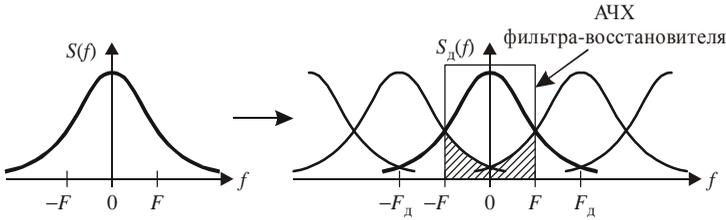


Рис. 10. Возникновение погрешностей при дискретизации без предварительного усечения спектра исходного сигнала

Из рис. 10 видно, что в этом случае итоговая погрешность будет складываться из двух составляющих.

Первая составляющая возникает из-за усечения спектра восстанавливающим ФНЧ и равна $\epsilon_1(t)$.

Вторая составляющая $\epsilon_2(t)$ возникает из-за проникновения в полосу $[-F; F]$ соседних лепестков спектра дискретного сигнала. Относительная величина этой составляющей погрешности (в силу симметрии спектра исходного сигнала)

$$\delta_2 = \frac{\overline{\epsilon_2^2(t)}}{\overline{x^2(t)}} \approx \frac{\int_{-F}^{\infty} |\dot{S}_0(f)|^2 df}{\int_0^{\infty} |\dot{S}_0(f)|^2 df} = \delta_1. \quad (15)$$

Итоговая погрешность будет представлять собой сумму погрешностей $\epsilon_1(t) + \epsilon_2(t)$. Таким образом, поскольку $\delta_2 \approx \delta_1$, итоговая погрешность будет примерно в два раза больше по сравнению с рассмотренным выше случаем предварительного усечения спектра исходного сигнала.

Ещё один вид погрешности связан с неидеальностью фильтра-восстановителя, что эквивалентно усечению ряда Котельникова при цифровой реализации:

$$x'(t) = \sum_{k=-N}^N x(k\Delta t) \frac{\sin[\pi F_d(t - k\Delta t)]}{\pi F_d(t - k\Delta t)}, \quad (16)$$

$$\epsilon_3(t) = x(t) - x'(t).$$

Если исходный сигнал $x(t)$ не ограничен во времени, то погрешность $\varepsilon_3(t)$ равна нулю в отсчётных точках ($t = k\Delta t$) и максимальна по модулю в середине между ними (рис. 11).

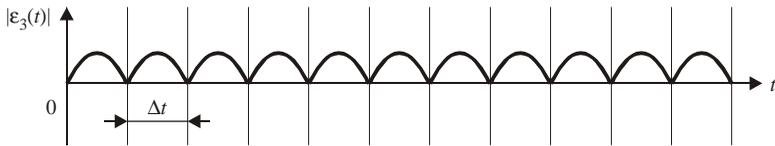


Рис. 11. Характер зависимости модуля погрешности $|\varepsilon_3(t)|$ для неограниченного во времени сигнала $x(t)$

Если же исходный сигнал $x(t)$ ограничен во времени (отличен от нуля на интервале $[0; T]$), как это и бывает на практике, то погрешность $|\varepsilon_3(t)|$ будет выглядеть так, как показано на рис. 12.

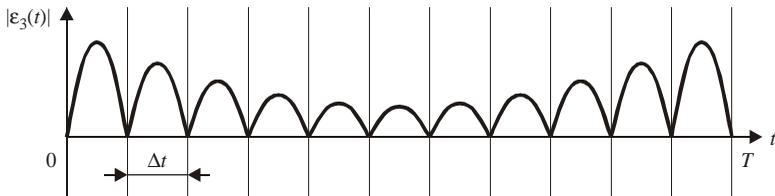


Рис. 12. Характер зависимости погрешности $|\varepsilon_3(t)|$ для ограниченного во времени сигнала $x(t)$

Если для восстановления используется аналоговый ФНЧ, то его импульсная характеристика может существенно отличаться от импульсной характеристики идеального фильтра, и этот случай уже не будет эквивалентен случаю усечения ряда Котельникова. Характер зависимости погрешности в этом случае не будет таким, как показано на рис. 11 и 12. Погрешность восстановления сигнала будет определяться отклонением АЧХ фильтра-восстановителя от единицы в полосе $[-F; F]$ и её отклонением от нуля за пределами этой полосы (рис. 13).

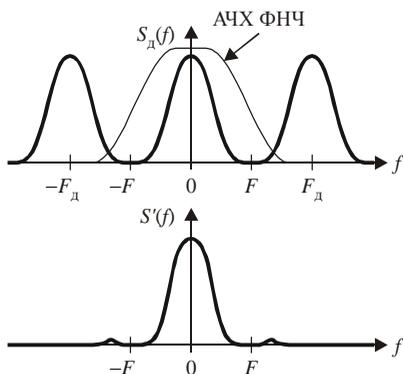


Рис. 13. Возникновение погрешностей при использовании неидеального аналогового ФНЧ

На рис. 13 $K(f)$ – АЧХ фильтра-восстановителя, $S'(f)$ – спектр восстановленного сигнала. Видно, что спектр восстановленного сигнала, во-первых, отличается по форме от спектра исходного сигнала из-за отличия АЧХ фильтра-восстановителя от единицы в полосе $[-F; F]$, а во-вторых, в нём присутствуют высокочастотные составляющие, возникшие из-за отличия АЧХ фильтра-восстановителя от нуля вне полосы $[-F; F]$.

Реальные сигналы финитны во времени ($t \in [0; T]$) и, как следствие, имеют неограниченный спектр. После восстановления такой сигнал, во-первых, будет выходить за пределы $[0; T]$, а во-вторых, он будет искажён по форме в пределах этого интервала. Если не учитывать первое обстоятельство, то остаточная погрешность будет складываться из уже рассмотренных погрешностей $\varepsilon_1(t)$ и $\varepsilon_2(t)$, а также погрешности $\varepsilon_3(t)$, возникающей из-за неидеальности фильтра-восстановителя (усечения ряда Котельникова при цифровой реализации).

Домашнее задание

Внимание! Все временные диаграммы следует располагать друг под другом и строить в едином масштабе!

В домашнем задании необходимо осуществить дискретизацию и восстановление непрерывного сигнала, представляющего собой сумму двух гармонических колебаний:

$$x(t) = A_1 \cos(2\pi f_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(2\pi f_2 t + \varphi_2).$$

Амплитуда A_1 выбирается равной $(M_1 + 1) B$, где M_1 – последняя цифра студенческого билета (зачётной книжки), $A_2 = 0,5 \cdot A_1$. Частота f_1 выбирается равной $(M_2 M_1 + 1) \cdot 100$ Гц, где $M_2 M_1$ – две последние цифры студенческого билета (зачётной книжки), $f_2 = 2f_1$. Начальная фаза $\varphi_1 = M_1 \cdot \pi/4$ рад, а $\varphi_2 = M_2 \cdot \pi/3$ рад, где M_1 – последняя, а M_2 – предпоследняя цифра студенческого билета.

При дискретизации сигнала следует:

1. Построить временную диаграмму исходного непрерывного сигнала $x(t)$. При построении можно ограничиться одним периодом сигнала.

Замечания:

- Следует помнить, что сумма периодических сигналов с кратными частотами даёт периодический сигнал. Причём период суммарного сигнала будет равен наибольшему периоду среди составляющих суммы.
- Период и частота связаны обратным соотношением: $T = 1/f$.
- Функция $\cos(\cdot)$ является периодической с периодом 2π . Это означает, что за один период, равный T секунд, набег фазы составляет 2π радиан. Таким образом, чтобы правильно учесть начальную фазу (смещение по оси времени), следует составить пропорцию: $\frac{T}{2\pi} = \frac{x}{\varphi}$, где T и φ – известные период (в секундах) и начальная фаза (в радианах), а x – искомое смещение по оси времени t (в секундах).
- Построения лучше всего проводить на миллиметровой бумаге или на развороте тетрадного листа в клетку. За один период удобно взять 24 клетки.

2. Выбрать интервал дискретизации Δt .

Замечания:

- Интервал дискретизации взять равным $\Delta t = 1/(3F_{\text{в}})$, где $F_{\text{в}}$ – верхняя (наибольшая) частота в спектре сигнала.
 - Следует помнить, что для сигнала, представляющего сумму гармонических колебаний, верхняя частота в спектре $F_{\text{в}}$ будет равняться наибольшей частоте среди составляющих суммы.
3. Построить временную диаграмму дискретного сигнала $x_{\text{д}}(t)$.

Замечания:

- Отсчёты следует брать начиная с момента времени $t = 0$.
- Шаг между отсчётами равен интервалу дискретизации Δt .
- Общее число отсчётов должно получиться равным $N = (1 + T/\Delta t)$.

При восстановлении сигнала следует:

4. По формуле (10) построить N слагаемых ряда Котельникова $x_k(t)$.

Замечания:

- Построение следует ограничить временным интервалом $[0; T]$ (один период исходного непрерывного сигнала $x(t)$).
- Пример построения дан на рис. 6.

5. По формуле (12) найти восстановленный сигнал на интервале $[0; T]$ как сумму N построенных в предыдущем пункте слагаемых.

6. Сравнить исходный и восстановленный сигналы. Сделать выводы о точности восстановления непрерывного сигнала $x(t)$.

Порядок выполнения работы

Замечание

В данной лабораторной работе для моделирования процессов дискретизации и восстановления используется алгоритм быстрого преобразования Фурье. По этой причине, для корректного отображения спектра периодических сигналов величина $TF_{\text{д}}$ привязана к степеням 2.

Внимание!

В лабораторной работе исследуются вопросы дискретизации и восстановления ограниченных и не ограниченных по спектру сигналов. Перед выполнением очередного пункта не забудьте выбрать соответст-

вующий сигнал в меню выбора сигналов (номер варианта выбирается в соответствии с номером рабочего места). Обратите внимание, что для удобства восприятия предусмотрена возможность переключать отображение спектра сигнала со сплошного на линейчатый. В работе для моделирования ограниченных по спектру сигналов используется сумма гармонических сигналов с кратными частотами, которая имеет линейчатый спектр. Для моделирования не ограниченных по спектру сигналов используются реализации случайных сигналов со сплошным спектром. Переключение отображения никак **не влияет** на результат! Оно нужно лишь для улучшения восприятия!

Следует помнить, что для представления чисел с плавающей точкой в ЭВМ используется нормализованная запись числа. Например, число 0,03 будет представлено в виде $0.3E-01$, т.е. $0,3 \cdot 10^{-1}$.

Задание 1. Исследование временных и спектральных характеристик дискретных сигналов

- В меню «Выбор сигнала» выбрать сигнал 1 в соответствии с номером варианта.
 - В меню «Отображение спектра» выбрать «Сплошной» (т.к. исследуемый сигнал является непериодическим, а его спектр – сплошным).
 - Записать номинальное значение частоты дискретизации $F_{д\text{ ном}}$, указанное в названии сигнала.
1. Зарисовать (схематично) временные и спектральные диаграммы исходного непрерывного сигнала. **Внимание! Во всех пунктах работы** диаграммы следует зарисовывать так, как они расположены на экране, т.е. в левой части – временные диаграммы, в правой – спектральные.
 2. Установить значение частоты дискретизации F_d равным половине от номинального значения. Зарисовать (схематично) временные и спектральные диаграммы дискретного сигнала. Определить период повторения в спектре дискретного сигнала, отметить эту величину на спектральной диаграмме дискретного сигнала.
 3. Установить значение частоты дискретизации F_d равным номинальному значению. Зарисовать (схематично) временные и спектральные диаграммы дискретного сигнала. Определить период повторения в спектре дискретного сигнала, отметить эту величину на спектральной диаграмме дискретного сигнала.

4. Установить значение частоты дискретизации F_d равным удвоенному номинальному значению. Зарисовать (схематично) временные и спектральные диаграммы дискретного сигнала. Определить период повторения в спектре дискретного сигнала, отметить эту величину на спектральной диаграмме дискретного сигнала.
5. Сделать вывод о свойствах спектра дискретного сигнала.

Задание 2. Восстановление непрерывного сигнала по дискретному

1. Установить коэффициент сглаживания ФНЧ $K = 0$ (идеальный ФНЧ).
2. Установить значение частоты дискретизации F_d равным номинальному значению. Значение частоты среза ФНЧ установить равным $F_c = F_d/2$. Зарисовать (схематично) ИХ и АЧХ фильтра-восстановителя, временные и спектральные диаграммы восстановленного сигнала.
3. Установить новое значение частоты дискретизации F_d , равное половине от номинального значения. Значение частоты среза ФНЧ изменить в соответствии с новым значением F_d ($F_c = F_d/2$). Зарисовать (схематично) ИХ и АЧХ фильтра-восстановителя, временные и спектральные диаграммы восстановленного сигнала.
4. Сравнить зарисованные в задании 1 временные и спектральные диаграммы исходного непрерывного и дискретного сигнала с временной и спектральной диаграммами восстановленного сигнала (при соответствующих значениях частоты дискретизации F_d).
Сделать вывод о возможности восстановления непрерывного сигнала по дискретному. Объяснить причины возникновения погрешности при восстановлении сигнала в случае, когда частота дискретизации F_d равна половине от номинального значения.

Задание 3. Исследование погрешностей восстановления ограниченного по спектру сигнала

- В меню «Выбор сигнала» выбрать сигнал 2 в соответствии с номером варианта.
- В меню «Отображение спектра» выбрать «Линейчатый» (т.к. исследуемый сигнал является периодическим, а его спектр – линейчатым).

1. Используя идеальный ФНЧ с переменной частотой среза F_c , определить частоты дискретных составляющих в спектре сигнала, для чего:
 - Установить максимально возможное значение частоты дискретизации F_d .
 - Установить коэффициент сглаживания ФНЧ $K = 0$ (идеальный ФНЧ).
 - Установить минимально возможное значение частоты среза F_c ФНЧ. Обратите внимание, что в спектре восстановленного сигнала нет ни одной частотной составляющей, а сам восстановленный сигнал равен нулю.
 - Плавно увеличивая частоту среза F_c ФНЧ добиться появления в спектре восстановленного сигнала первой составляющей. Записать значение F_c , которое в этом случае будет равно частоте первой дискретной составляющей исходного непрерывного сигнала.
 - Продолжать увеличивать F_c до появления второй составляющей. Записать значение F_c , равное частоте второй дискретной составляющей исходного непрерывного сигнала.
 - Повторять процедуру до тех пор, пока не будут измерены частоты всех составляющих спектра (пока спектр восстановленного сигнала не будет в точности повторять спектр исходного непрерывного сигнала).
 - Зарисовать исходный непрерывный сигнал и его спектр, указать измеренные частоты составляющих спектра. Определить и записать значение верхней (наибольшей) частоты в спектре сигнала – F_b .
2. Выбрать значение частоты дискретизации F_d в 4 раза большее, чем F_b (если полученного значения F_d нет среди допустимых значений, следует взять ближайшее (но большее!) к нему допустимое значение F_d). Зарисовать временную и спектральную диаграммы дискретного сигнала. Установить коэффициент сглаживания ФНЧ $K = 0$ (идеальный ФНЧ). Плавно изменяя частоту среза F_c ФНЧ от 1 кГц до F_d , снять зависимость среднеквадратической погрешности восстановления $\varepsilon = \sqrt{\varepsilon^2}$ от F_c . Зависимость свести в табл. 1.

Таблица 1. Зависимость погрешности восстановления ε от частоты среза F_c ФНЧ

F_c	1 кГц	...	F_d
ε			

3. По результатам из табл. 1 изобразить график зависимости $\varepsilon = f(F_c)$. На оси частот отметить измеренные частоты дискретных составляющих спектра исходного непрерывного сигнала. Объяснить характер полученной зависимости.

Задание 4. Исследование погрешностей восстановления не ограниченного по спектру сигнала

- В меню «Выбор сигнала» выбрать тот же сигнал, что и в задании 1.
 - В меню «Отображение спектра» выбрать «Сплошной» (т.к. исследуемый сигнал является непериодическим, а его спектр – сплошным).
1. Выбрать значение частоты дискретизации F_d равным номинальному значению (см. п. 1). Установить коэффициент сглаживания ФНЧ $K = 0$ (идеальный ФНЧ). Плавно изменяя частоту среза F_c ФНЧ от 1 кГц до F_d , снять зависимость погрешности восстановления ε от F_c . Зависимость свести в табл. 2.

Таблица 2. Зависимость погрешности восстановления ε от частоты среза F_c ФНЧ

F_c	1 кГц	...	F_d
ε			

2. Записать оптимальное значение F_c (то значение, при котором погрешность восстановления ε минимальна).
3. По результатам из табл. 2 изобразить график зависимости $\varepsilon = f(F_c)$. Объяснить характер полученной зависимости.

Задание 5. Исследование влияния характеристик ФНЧ на погрешность восстановления

- В меню «Выбор сигнала» выбрать тот же сигнал, что и в задании 3.
 - В меню «Вид спектра» выбрать «Линейчатый» (т.к. исследуемый сигнал является периодическим).
1. Задать значение частоты дискретизации F_d таким же, как в п. 2 задания 3. Значение частоты среза F_c ФНЧ выбрать равным половине F_d . Плавно изменяя коэффициент сглаживания K в диапазоне от 0 до 1, снять зависимость погрешности восстановления ϵ от K . Зависимость свести в табл. 3.

Таблица 3. Зависимость погрешности восстановления ϵ от коэффициента сглаживания K

K	0	...	1
ϵ			

2. По результатам из табл. 2 изобразить график зависимости $\epsilon = f(K)$. Объяснить характер полученной зависимости.
3. Зарисовать (схематично) спектр исходного сигнала, спектр дискретного сигнала, АЧХ фильтра и спектр восстановленного сигнала для случаев $K = 0$ и $K = 1$. Объяснить причины возникновения погрешности восстановления.

Содержание отчёта:

1. Название и цель работы.
2. Выполненное домашнее задание.
3. Диаграммы и выводы по заданию 1.
4. Диаграммы и выводы по заданию 2.
5. Таблица, график и выводы по заданию 3.
6. Таблица, график, оптимальное значение F_c и выводы по заданию 4.
7. Диаграммы, таблица, график и выводы по заданию 5.

Контрольные вопросы

1. В чём состоит суть процесса дискретизации непрерывной функции?
2. Выведите выражение для спектра дискретного сигнала. Как связаны между собой спектры дискретного и исходного непрерывного сигналов?
3. Нарисуйте спектр исходного непрерывного сигнала и спектры дискретных сигналов для случаев $F = F_b$, $F = F_b/2$, $F = 2F_b$.
4. Сформулируйте и докажите теорему Котельникова.
5. Запишите ряд Котельникова и объясните физический смысл входящих в него величин и функций.
6. Что называется базисом Котельникова? Как выглядят базисные функции ряда Котельникова? Какими свойствами они обладают?
7. Расскажите о восстановлении непрерывного сигнала по его дискретным отсчётам с использованием ряда Котельникова.
8. Расскажите о восстановлении непрерывного сигнала по его дискретным отсчётам с использованием фильтра нижних частот.
9. Выведите выражение импульсной характеристики идеального фильтра-восстановителя. Будет ли этот фильтр физически реализуем?
10. Что называется базой сигнала? Приведите примеры сигналов с конечной и бесконечной базой.
11. Как оценивается относительная среднеквадратическая погрешность восстановления непрерывного сигнала по его дискретным отсчётам?
12. Опишите погрешности, возникающие при дискретизации и восстановлении сигнала с неограниченным спектром.
13. Опишите погрешности восстановления сигнала, возникающие при усечении ряда Котельникова (цифровой реализации ФНЧ).
14. Опишите погрешности восстановления сигнала, возникающие при использовании для восстановления неидеального аналогового ФНЧ.
15. Какие погрешности возникают при дискретизации и восстановлении реальных (финитных во времени) сигналов?
16. Каким способом можно одновременно уменьшить все составляющие погрешности, возникающих при дискретизации и восстановлении сигнала?
17. Объясните характер зависимости погрешности восстановления ε от частоты среза F_c ФНЧ, снятой в задании 3.

18. Объясните характер зависимости погрешности восстановления ε от частоты среза F_c ФНЧ, снятой в задании 4.
19. Объясните характер зависимости погрешности восстановления ε от коэффициента сглаживания K ФНЧ, снятой в задании 5.
20. Как зависит погрешность восстановления от частоты дискретизации для случаев ограниченного и неограниченного по спектру сигнала?

Литература

1. **Теория** электрической связи: Учебник для вузов / А.Г. Зюко, Д.Д. Кловский, В.И. Коржик, М.В. Назаров; Под ред. Д.Д. Кловского. – М.: Радио и связь, 1998.
2. **Кловский Д.Д., Шилкин В.А.** Теория электрической связи. Сб. задач и упражнений. – М.: Радио и связь, 1990.