Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Поволжская государственная академия телекоммуникаций и информатики»

Кафедра ТОРС

Одобрено методическим советом ГОУВПО ПГАТИ

Методическая разработка
к лабораторной работе № **8**
по дисциплине «**Теория электрической связи**»

# «Исследование линейных блочных кодов»

(для студентов **3** курса специальностей 550400, 201800, 201100, 201000, 200900)

Составитель: асс. Чингаева А.М.

Редактор: зав. каф. ТОРС,
д.т.н. проф. Кловский Д.Д.

Рецензент: зав. каф. РПУ,
д.т.н. проф. Тяжев А.И.

Самара, 2004

Лабораторная работа №8

**Исследование линейных блочных кодов**

**Цель работы:** изучение принципов примитивного кодирования, а также помехоустойчивого кодирования с обнаружением и исправлением ошибок.

**Краткие теоретические сведения**

Под кодированием понимается процедура сопоставления дискретному сообщению $a_i$ ($i = 0, 1, 2, ..., K-1$) определённой последовательности элементов $\mathbf{b}_j = \{b_0\ b_1\ ...\ b_l\ ...\ b_{n-1}\}$ ($j = 0, 1, 2, ..., K-1$), где $b_0, b_1, ..., b_l, ..., b_{n-1}$ могут принимать значения от 0 до $m-1$. Обычно $m < K$ (например, $a_i$ – латинские буквы и $K = 26$, а $b_l$ – двоичные символы 0 и 1, и $m = 2$).

С помощью кодирования решаются следующие задачи:

- согласование алфавита источника сообщений с алфавитом канала;
- «сжатие» информации (уменьшение или полное устранение избыточности, содержащейся в сообщении);
- обнаружение или исправление ошибок, возникающих в канале связи из-за помех и искажений сигнала.

Если кодирование решает только первую задачу, код называют примитивным. Вторую задачу решает экономный (статистический) код. Третью задачу решает корректирующий код.

Кодер может быть составным и содержать каскадное соединение относительно простых кодеров, решающих каждый свою задачу.

В данной работе исследуются 4 линейных блочных кода:

- примитивный код ASCII;
- код с одной проверкой на чётность $(9,8)$, позволяющий обнаружить ошибки нечётной кратности;
- код Хемминга $(7,4)$, обнаруживающий 2 ошибки в режиме обнаружения или исправляющий 1 ошибку в режиме исправления ошибок;

- матричный код $(25,16)$, гарантированно обнаруживающий 3 ошибки и все ошибки нечётной кратности в режиме обнаружения, а также большинство сочетаний чётного числа ошибок, или гарантированно исправляющий 1 ошибку в режиме исправления ошибок.

Рассмотрим эти коды.

## 1. Примитивный код ASCII

ASCII (American Standard Code for Information Interchange) – американский стандартный код обмена информацией. Каждый символ кодируется 8-разрядной комбинацией двоичных чисел. Все комбинации являются разрешёнными, их общее число $K = 2^8 = 256$. Процедура кодирования проста: символы нумеруются от 0 до 255, а номер записывается в двоичной системе счисления. Несколько примеров из кодовой таблицы:

| Символ | Номер | Код |
|---|---|---|
| A | 65 | 01000001 |
| Z | 90 | 01011010 |
| А | 128 | 10000000 |
| Я | 159 | 10011111 |

Переход от номера к коду осуществляется как обычный переход из десятичной в двоичную системы счисления. Обозначая $L$ – номер, а $b_i$ – двоичный символ в $i$-м разряде, имеем:

$$L = \sum_{i=0}^{n-1} b_i 2^i \ . \qquad (8.1)$$

Иными словами, каждый разряд имеет «вес», равный 2 в степени номер этого разряда (счёт ведётся справа).

Для быстрого перехода к двоичному коду десятичного числа удобно пользоваться следующим наглядным методом:

| $b_7$ | $b_6$ | $b_5$ | $b_4$ | $b_3$ | $b_2$ | $b_1$ | $b_0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2^7 = 128$ | $2^6 = 64$ | $2^5 = 32$ | $2^4 = 16$ | $2^3 = 8$ | $2^2 = 4$ | $2^1 = 2$ | $2^0 = 1$ |

Представляя число от 0 до 255 набором «весов» из этой таблицы и записывая в соответствующий разряд 1 – там, где «вес» взят, и 0 – там, где не взят, получим двоичный код этого числа.

Так как в примитивном коде все комбинации разрешены, то любая одиночная ошибка приводит к новой разрешённой комбинации.

Обозначая $p$ – вероятность одиночной ошибки в дискретном канале, а $P_к$ – вероятность неверного декодирования кодовой комбинации, найдём вероятность хотя бы одной ошибки в комбинации из $n$ элементов (событие, противоположное событию «ни одной ошибки»):

$$P_к = 1 - (1-p)^n . \tag{8.2}$$

При малых $p$ из (8.2) получаем приближённую формулу:

$$P_к \approx np . \tag{8.3}$$

**2. Код с одной проверкой на чётность $(9,8)$**

Теперь к 8 информационным разрядам добавляется девятый. Общее число комбинаций равно $N = 2^9 = 512$, из них $K = 2^8 = 256$ – разрешённые, а остальные $N - K = 256$ – запрещённые. Девятый символ – проверочный, он получается из 8 информационных сложением разрядов по модулю 2:

$$b_8 = b_0 \oplus b_1 \oplus b_2 \oplus b_3 \oplus b_4 \oplus b_5 \oplus b_6 \oplus b_7 . \tag{8.5}$$

Из (8.5) видно, что проверочный разряд $b_8$ равен нулю, если среди информационных символов чётное число единиц, и единице – если число единиц нечётное. Таким образом, в кодовой комбинации число единиц всегда чётное. Следовательно, если в канале произойдёт одна ошибка, то число единиц станет нечётным. Комбинации, содержащие нечётное число единиц, являются запрещёнными, их ровно половина. Появление на приёме запрещённой комбинации – признак ошибки. Если в канале произойдут одновременно 2 ошибки в одной кодовой комбинации, число единиц останется чётным, и такая ситуация окажется незамеченной декодером, так же, как и появление 4, 6 или 8 (т.е. чётного числа) ошибок. Ошибки же нечётной кратности (1, 3, 5, 7, 9) будут обнаружены.

Вероятность необнаруженной ошибки ($P_{но}$) равна сумме вероятностей того, что произойдут 2, 4, 6 или 8 ошибок. При $n = 9$

$$\begin{aligned} P_{но} &= C_9^2 p^2 (1-p)^7 + C_9^4 p^4 (1-p)^5 + \\ &+ C_9^6 p^6 (1-p)^3 + C_9^8 p^8 (1-p). \end{aligned} \tag{8.6}$$

При малых $p$, пренебрегая величинами порядка малости выше второго, получаем

$$P_{но} \approx 36 p^2 . \tag{8.7}$$

## 3. Код Хемминга $(7,4)$

Коды Хемминга получаются по следующему правилу: $n = 2^r - 1$, где $n$ – общее число разрядов, $r$ – число проверочных разрядов и $n - r$ – число информационных разрядов. Рассмотрим случай $r = 3$.

Из семи двоичных разрядов 4 информационных, следовательно, число разрешённых комбинаций $K = 2^4 = 16$. Общее число комбинаций $N = 2^7 = 128$, число запрещённых комбинаций $N - K = 112$. Три проверочных разряда получаются из информационных таким образом, чтобы соблюдалось условие их линейной независимости. Например:

$$b_4 = b_0 \oplus b_1 \oplus b_2,$$
$$b_5 = b_1 \oplus b_2 \oplus b_3, \qquad (8.8)$$
$$b_6 = b_0 \oplus b_2 \oplus b_3.$$

Таким образом, каждый из 7 символов участвует хотя бы в одной проверке (символ $b_2$ участвует в трёх проверках). Эти же равенства (8.8) используются как проверочные при приёме кодовой комбинации. Если в одном из разрядов содержится ошибка, то те равенства, в которых он участвует, не соблюдаются. Так как равенств три, то возможны 8 вариантов ситуаций. В ситуации, когда все равенства выполняются, кодовая комбинация или принята безошибочно, или в канале произошли ошибки, приведшие к новой разрешённой кодовой комбинации, т.е. ошибка в кодовой комбинации не обнаружена. В другом случае, в зависимости от того, какая из оставшихся семи ситуаций имеет место в конкретном опыте, декодер определяет, какой из семи элементов принят неверно. Например, если не выполняются все три проверки, то это указывает на $b_2$, а если не выполняется только одна проверка, например, $b_4$, то это указывает на то, что произошла ошибка в самом проверочном символе, в данном случае это $b_4$.

Таким образом, одиночные ошибки не только обнаруживаются, но и могут быть исправлены путём замены ошибочного элемента на противоположный.

Двойные ошибки обнаруживаются, но не исправляются.

Таким образом, код Хемминга может использоваться в двух режимах: режиме исправления или режиме обнаружения ошибок.

В режиме исправления ошибок исправляются все одиночные ошибки в кодовой комбинации, следовательно, вероятность остаточной ошибки при декодировании равна вероятности того, что в кодовой комбинации произойдёт более одной ошибки:

$$P_{\text{к}} = \sum_{i=2}^{7} C_7^i p^i \left(1-p\right)^{7-i} = 1 - \sum_{i=0}^{1} C_7^i p^i \left(1-p\right)^{7-i} =$$
$$= 1 - P\left(\text{нет ош.}\right) - P\left(1\text{ ош.}\right) = 1 - \left(1-p\right)^7 - 7p\left(1-p\right)^6 . \qquad (8.9)$$

Для малых $p$

$$P_{\text{к}} \approx 21p^2 . \qquad (8.10)$$

В режиме обнаружения ошибок гарантированно обнаруживаются две ошибки, т.е. вероятность необнаруженной ошибки определяется как вероятность того, что в принятой кодовой комбинации будет более двух ошибочных элементов:

$$P_{\text{но}} = \sum_{i=3}^{7} C_7^i p^i \left(1-p\right)^{7-i} = 1 - \sum_{i=0}^{2} C_7^i p^i \left(1-p\right)^{7-i} =$$
$$= 1 - P\left(\text{нет ош.}\right) - P\left(1\text{ ош.}\right) - P\left(2\text{ ош.}\right) = \qquad (8.11)$$
$$= 1 - \left(1-p\right)^7 - 7p\left(1-p\right)^6 - 21p^2\left(1-p\right)^5 .$$

Для малых $p$

$$P_{\text{но}} \approx 35p^3 . \qquad (8.12)$$

### 4. Матричный код $\left(25,16\right)$

Из 25 двоичных разрядов 16 являются информационными, следовательно, из общего числа $N = 2^{25} = 33554432$ возможных комбинаций $K = 2^{16} = 65536$ являются разрешёнными, а остальные $N - K = 33554432 - 65536 = 33488896$ – запрещёнными.

Матричный код строится следующим образом (рис. 8.1). Из 16 информационных символов строится матрица размерностью $\left(4\times 4\right)$. Далее к каждой строке и к каждому столбцу добавляется один символ проверки на чётность. Последний элемент с номером 24 представляет собой символ проверки на чётность всех информационных элементов. Этот символ также получается путём сложения по модулю 2 всех проверочных элементов в столбце 4 или в строке 4 (это свойство следует из свойства ассоциативности операции сложения по модулю 2).

На рис. 8.1 в рамку заключены информационные символы, остальные символы – проверочные.

В канал передаются символы $b_i$ ($i = \overline{0,24}$) по строкам, по столбцам или сначала все информационные, а затем все проверочные.

$$
\begin{array}{c|cccc|c}
\text{номер} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
\hline
0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\
1 & b_5 & b_6 & b_7 & b_8 & b_9 \\
2 & b_{10} & b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\
3 & b_{15} & b_{16} & b_{17} & b_{18} & b_{19} \\
\hline
4 & b_{20} & b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24}
\end{array}
$$

Рис. 8.1. Схема построения кодовой комбинации матричного кода

Матричный код, так же как и код Хемминга, может использоваться в двух режимах: обнаружения и исправления.

В режиме исправления матричный код $(25,16)$ позволяет гарантированно исправить 1 ошибку. Это делается следующим образом: любая одиночная ошибка приводит к несоблюдению правила чётности в некоторой *i*-й строке и *j*-м столбце, перекрестие *i*-й строки и *j*-го столбца точно указывает на ошибочный элемент, который заменяется на противоположный. Таким образом, вероятность остаточной ошибки при декодировании равна вероятности появления в кодовой комбинации двух и более ошибок:

$$
\begin{aligned}
P_{\text{к}} &= \sum_{i=2}^{25} C_{25}^{i} p^{i} (1-p)^{7-i} = 1 - \sum_{i=0}^{1} C_{25}^{i} p^{i} (1-p)^{7-i} = \\
&= 1 - P(\text{нет ош.}) - P(1\ \text{ош.}) = \\
&= 1 - (1-p)^{25} - 25p(1-p)^{24}.
\end{aligned} \tag{8.13}
$$

При малых значениях $p$

$$P_{\text{к}} \approx 300p^2. \tag{8.14}$$

В режиме обнаружения матричный код $(25,16)$ позволяет гарантированно обнаружить все ошибки нечётной кратности ($1,3,5,...,25$), 2 ошибки, а также большинство сочетаний чётного числа ошибок.

Вероятность необнаруженной ошибки можно оценить сверху вероятностью того, что в принятой кодовой комбинации будет 4, 6, ... ошибок.

$$P_{\text{но}} < \sum_{i=2}^{12} C_{25}^{2i} p^{2i} (1-p)^{25-2i}. \tag{8.15}$$

Для малых $p$

$$P_{\text{но}} < 12650p^4. \tag{8.16}$$

**Домашнее задание**

1. В качестве номера кодируемого символа выбирается число $M = L + 99$, где $L$ – число, образованное двумя последними цифрами студенческого билета. Закодировать число $M$ 8-разрядным примитивным кодом.

2. Закодировать комбинацию, полученную в п. 1, кодом с одной проверкой на чётность $(9,8)$.

3. Закодировать комбинацию, полученную в п. 1, двумя 4-разрядными кодовыми комбинациями кода Хемминга $(7,4)$.

4. Взять в качестве номера кодируемого символа число $N = L' + 30000$, где $L'$ – число, образованное четырьмя последними цифрами студенческого билета, закодировать его примитивным кодом. Полученную комбинацию закодировать матричным кодом $(25,16)$.

5. Используя формулы для расчёта вероятностей ошибки декодирования и необнаруженной ошибки, по значениям $p$ из табл. 8.1 построить графики зависимости $P_{\text{к}} = f(p)$ и $P_{\text{но}} = f(p)$.

**Порядок выполнения работы**

Работа содержит **4 раздела**:
1. Исследование примитивного кода ASCII
2. Исследование кода с одной проверкой на чётность
3. Исследование кода Хемминга $(7,4)$
4. Исследование матричного кода $(25,16)$

**Во-первых**, необходимо задать число испытаний (пункт «Задание числа испытаний при моделировании»). Число испытаний задаётся преподавателем в зависимости от технического оснащения дисплейного класса в диапазоне от 1000 до 1000000.

**Общая информация:**

В каждом разделе осуществляется передача демонстрационного текста с графическим выводом в соответствующие окна полученных результатов, подсчётом числа ошибок и выводом исходного и принятого текстов в окно для сравнения. Демонстрационный текст позволяет наглядно пронаблюдать за процессом исправления (обнаружения) ошибок, а также увидеть результаты работы декодера на конкретном осмысленном тексте. Однако, малый объём демонстрационного текста не позволяет получить достоверный конечный результат, т.е. число или частость ошибок на выходе декодера. Поэтому после демонстрации осуществляется статистическое моделирование, в процессе которого кодируется, передаётся и декодируется заданное ранее число кодовых блоков. Результаты статистического моделирования заносятся в таблицу следующего вида:

Таблица 8.1

| $p$ | $p^*$ | $P_к^*$ | $p_э^*$ | $w_п$ |
|---|---|---|---|---|
| 0,070 | | | | |
| 0,055 | | | | |
| 0,040 | | | | |
| 0,025 | | | | |
| 0,010 | | | | |

Здесь $p$ – заданная вероятность ошибки на бит в дискретном канале, $P_к^*$ – частость ошибок в кодовых комбинациях на выходе декодера, $p_э^*$ – частость ошибок в битах, $w_п$ – частота перезапросов.

Рассмотрим выполнение каждого пункта подробнее.

### 1. Примитивный код ASCII

При передаче демонстрационного текста каждый символ кодируется примитивным кодом в соответствии с таблицей символов ASCII. Ошибочным считается блок, в котором после декодирования осталась хотя бы одна ошибка. Ошибки в битах подсчитываются непосредственно.

Задавая значения $p$, пронаблюдать за передачей демонстрационного текста, убедиться, что число ошибок в битах на выходах канала и декодера одинаково.

По результатам статистического моделирования заполнить табл. 8.1.

Сравнить полученные значения $P_к^*$ с расчётными значениями $P_к$, сделать выводы.

## 2. Код с одной проверкой на чётность $(9,8)$

При передаче демонстрационного текста каждый символ кодируется примитивным кодом в соответствии с таблицей символов ASCII, а затем кодом с одной проверкой на чётность. Ошибочным считается блок, в котором после декодирования осталась хотя бы одна ошибка. Ошибки в битах подсчитываются непосредственно.

Если декодер обнаруживает ошибку в кодовой комбинации, он делает перезапрос последней кодовой комбинации. Число перезапросов ограничено и в данной работе не превышает 8. Если ошибки в кодовой комбинации не обнаружены или превышено число перезапросов, то передаётся следующая кодовая комбинация.

Задавая значения $p$, пронаблюдать за передачей демонстрационного текста, убедиться, что на выходе декодера остались в основном ошибки чётной кратности. Объяснить наличие ошибок нечётной кратности.

По результатам статистического моделирования заполнить табл. 8.1.

Сравнить полученные значения $P_{\text{к}}^{*}$ с расчётными значениями $P_{\text{но}}$, сделать выводы.

## 3. Код Хемминга $(7,4)$

При передаче демонстрационного текста каждый символ кодируется примитивным кодом в соответствии с таблицей символов ASCII, затем полученная 8-разрядная комбинация разбивается на две комбинации по 4 разряда, каждая из которых кодируется кодом Хемминга $(7,4)$. Ошибочным считается блок, в котором после декодирования осталась хотя бы одна ошибка. Ошибки в битах подсчитываются непосредственно.

Код Хемминга исследуется в двух режимах: обнаружения и исправления ошибок.

### 3.1. Код Хемминга $(7,4)$ в режиме обнаружения ошибок

В этом режиме декодер работает как и в п. 2: если обнаружена ошибка, то делается перезапрос последней кодовой комбинации. Число перезапросов не превышает 8. Если ошибки в кодовой комбинации не обнаружены или превышено число перезапросов, то передаётся следующая кодовая комбинация.

Задавая значения $p$, пронаблюдать за передачей демонстрационного текста, убедиться, что в ошибочно декодированных блоках остались в основном три и более ошибок. Объяснить наличие остаточных одиночных и двойных ошибок.

По результатам статистического моделирования заполнить табл. 8.1.

Сравнить полученные значения $P_к^*$ с расчётными значениями $P_{но}$, сделать выводы.

### 3.2. Код Хемминга $(7,4)$ в режиме исправления ошибок

В режиме исправления код Хемминга позволяет исправить одну ошибку. Задавая значения $p$, пронаблюдать за передачей демонстрационного текста, убедиться, что все одиночные ошибки исправляются.

По результатам статистического моделирования заполнить табл. 8.1.

Сравнить полученные значения $P_к^*$ с расчётными значениями $P_к$, сделать выводы.

## 4. Матричный код $(25,16)$

При передаче демонстрационного текста каждый символ кодируется примитивным кодом в соответствии с таблицей символов ASCII, затем два соседних символа кодируются матричным кодом $(25,16)$. Ошибочным считается блок, в котором после декодирования осталась хотя бы одна ошибка. Ошибки в битах подсчитываются непосредственно.

Матричный код, как и код Хемминга, исследуется в двух режимах: обнаружения и исправления ошибок.

### 4.1. Матричный код $(25,16)$ в режиме обнаружения ошибок

Работа декодера в этом режиме эквивалентна п. 2 и п. 3.1: если обнаружена ошибка, то делается перезапрос последней кодовой комбинации. Число перезапросов не превышает 8. Если ошибки в кодовой комбинации не обнаружены или превышено число перезапросов, то передаётся следующая кодовая комбинация.

Задавая значения $p$, пронаблюдать за передачей демонстрационного текста, убедиться, что на выходе декодера остались в основном только такие ошибки (чётной кратности), число которых больше или равно 4. Объяснить наличие остаточных одиночных, двойных ошибок и ошибок нечётной кратности.

По результатам статистического моделирования заполнить табл. 8.1.

Сравнить полученные значения $P_{\text{к}}^{*}$ с расчётными значениями $P_{\text{но}}$, сделать выводы.

### 4.1. Матричный код $(25,16)$ в режиме исправления ошибок

В режиме исправления матричный код позволяет гарантированно исправлять одиночные ошибки. Задавая значения $p$, пронаблюдать за передачей демонстрационного текста, убедиться, что все одиночные ошибки исправляются.

По результатам статистического моделирования заполнить табл. 8.1.

Сравнить полученные значения $P_{\text{к}}^{*}$ с расчётными значениями $P_{\text{к}}$, сделать выводы.

## Содержание отчёта

1. Выполненное домашнее задание.
2. Таблицы по пп. 1...4 (6 таблиц).
3. Графики зависимостей $P_{\text{к}}^{*}$ по таблицам из предыдущего пункта и расчётные графики $P_{\text{к}}(p)$ и $P_{\text{но}}(p)$ **в одной системе координат** (**в логарифмическом масштабе**).
4. Выводы по графикам о помехоустойчивости и целесообразности использования исследуемых кодов.

## Контрольные вопросы

1. В чём сущность и цели операции кодирования сообщений в каналах связи? Какие виды кодов Вы знаете?
2. Как осуществляется примитивное кодирование? Приведите несколько примеров.

3. Как определить вероятность ошибки декодирования при использовании примитивного кода, если известна вероятность ошибки одного элемента $p$ и число разрядов $n$?

4. Как строится код с проверкой на чётность? Приведите несколько примеров.

5. Каков общий принцип обнаружения ошибок с помощью избыточного кода? Приведите примеры.

6. Чему равно кодовое расстояние у кода с проверкой на чётность? Может ли такой код обнаруживать ошибки (если да, то сколько)? Исправлять ошибки?

7. Каков общий принцип исправления ошибок с помощью избыточного кода? Приведите примеры.

8. Сколько ошибок может обнаружить код Хемминга $(7,4)$? Сколько ошибок он может исправить? Свяжите это с минимальным кодовым расстоянием по Хеммингу.

9. Опишите процедуру кодирования с помощью кода Хемминга $(7,4)$ и проиллюстрируйте её на конкретном примере.

10. Что такое синдром ошибки? Составьте таблицу синдромов для кода Хемминга $(7,4)$.

11. Опишите процедуру декодирования с исправлением одиночной ошибки для кода Хемминга $(7,4)$ и приведите конкретный пример.

12. Как определить вероятность ошибки декодирования при использовании кода Хемминга $(7,4)$, если известна вероятность ошибочного приема одного элемента $p$?

13. Как строится матричный код $(25,16)$? Как с его помощью производится обнаружение и исправление ошибок? Приведите пример, когда декодер не может обнаружить ошибки.

14. Какие коды называются линейными? Относятся ли к ним коды, изучаемые в данной работе?

15. Что такое вес кодовой комбинации? Свяжите минимальный вес кодовой комбинации линейного кода с кодовым расстоянием $d_к$. Как связано кодовое расстояние с исправляющей способностью кода?

**Литература**

1. **Теория** электрической связи: Учебник для вузов / А.Г. Зюко, Д.Д. Кловский, В.И. Коржик, М.В. Назаров; Под ред. Д.Д. Кловского. – М.: Радио и связь, 1998.

2. **Прокис Дж.** Цифровая связь. Пер. с англ. / Под ред. Д.Д. Кловского. – М.: Радио и связь, 2000.

3. **Кловский Д.Д., Шилкин В.А.** Теория электрической связи. Сб. задач и упражнений. – М.: Радио и связь, 1990.