Федеральное государственное образовательное бюджетное учреждение
высшего профессионального образования

Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики

кафедра ТОРС

Задание и методические указания к лабораторной работе
по дисциплинам «**Общая теория связи**»,
«**Теория информации и информационных систем**»,
«**Радиотехнические цепи и сигналы**»

для студентов 2 курса направлений 210700, 200700, 210400
дневной формы обучения

«Спектры детерминированных сигналов»

Составители: д.т.н., проф. Николаев Б. И.
к.т.н. Борисенков А. В.
к.т.н. Чингаева А. М.

Самара, 2014 г.

УДК 621.391

Задание и методические указания к лабораторной работе по дисциплинам «**Общая теория связи**», «**Теория информации и информационных систем**», «**Радиотехнические цепи и сигналы**» для студентов 2 курса специальностей 210700, 200700, 210400 дневной формы обучения «**Спектры детерминированных сигналов**» / сост. Б. И. Николаев, А. В. Борисенков, А. М. Чингаева — Самара: ПГУТИ, 2014 — 17 с.

Методическая разработка содержит краткую теорию и подробные указания к выполнению лабораторной работы, посвящённой анализу спектральных характеристик детерминированных сигналов.

1 Краткие теоретические сведения

Частотным спектром (или просто **спектром**) сигнала называется представление этого сигнала в частотной области. Спектр определяется через **преобразование Фурье** сигнала и подразделяется на амплитудный и фазовый спектры.

Амплитудным спектром (или спектром амплитуд) называется зависимость амплитуды спектральных составляющих сигнала от частоты. Аналогично, зависимость фазы спектральных составляющих сигнала от частоты называется **фазовым спектром** (или спектром фаз).

1.1 Спектры периодических сигналов

Периодический сигнал $s(t)$, удовлетворяющий условию абсолютной интегрируемости, можно разложить в **ряд Фурье**:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2\pi f_n t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin 2\pi f_n t, \tag{1}$$

где $\frac{a_0}{2}$ — постоянная составляющая сигнала $s(t)$, $f_n = nf_1$ — частоты гармонических составляющих (**гармоник**) сигнала, $f_1 = \frac{1}{T}$ — основная частота (частота первой гармоники), n — номер гармоники, T — период сигнала, a_n и b_n — коэффициенты разложения:

$$a_n = \frac{2}{T} \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \cos 2\pi f_n t dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \sin 2\pi f_n t dt.$$

Выражение (1) можно переписать в другой форме:

$$s(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2\pi f_n t + \varphi_n), \tag{2}$$

где $A_n \cos(2\pi f_n t + \varphi_n)$ — гармонические составляющие (**гармоники**) сигнала, A_n — амплитуды и φ_n — фазы гармоник сигнала:

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \varphi_n = -\operatorname{arctg} \frac{b_n}{a_n},$$

причём

$$a_n = A_n \cos \varphi_n, \quad b_n = A_n \sin \varphi_n.$$

Совокупность амплитуд A_n ряда Фурье образует **амплитудный** спектр сигнала $s(t)$, а совокупность фаз φ_n — его **фазовый** спектр.

Выражения (1) и (2) записаны в тригонометрической форме. Однако, существует также и комплексная форма записи ряда Фурье:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{C}_n \exp(j2\pi f_n t), \tag{3}$$

где комплексные коэффициенты $\dot{C}_n$ рассчитываются по формуле:

$$\dot{C}_n = \frac{a_n - jb_n}{2} = \frac{1}{T} \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \exp(-j2\pi f_n t) dt.$$

Совокупность модулей комплексных амплитуд C_n образует **амплитудный** спектр сигнала $s(t)$, а совокупность аргументов φ_n — его **фазовый** спектр:

$$\dot{C}_n = C_n \exp\left(j\varphi_n\right), \quad C_n = |\dot{C}_n|, \quad \varphi_n = \arg(\dot{C}_n).$$

Суммирование в выражении (3) происходит по всем целым n, в том числе и отрицательным, т.е. в спектре сигнала помимо положительных содержатся также и отрицательные частоты. В геометрической интерпретации комплексная экспонента $\exp(j2\pi f_n t)$ есть единичный вектор, вращающийся против часовой стрелки с частотой f_n. Соответственно, смена знака n (и знака f_n) означает смену направления вращения: не против часовой, а по часовой стрелке.

Амплитудные спектры действительных сигналов являются чётными, а фазовые — нечётными функциями частоты. По этой причине на графиках, как правило, изображают только правую половину спектра, соответствующую положительным частотам (рис. 1).

Амплитуды гармоник на рис. 1 рассчитываются по формуле:

$$C_n = \frac{U_0 \tau}{T} \left| \frac{\sin(\pi f_n \tau)}{\pi f_n \tau} \right| = \frac{U_0}{Q} \left| \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{Q}\right)}{\frac{\pi n}{Q}} \right|, \tag{4}$$

где U_0 — амплитуда импульсов, τ — длительность, T — период, $Q = \frac{T}{\tau}$ — **скважность**.

Из рис. 1 видно, что спектр периодического сигнала является **линейчатым** (или **дискретным**), т.е. состоит из отдельных линий, каждая из которых соответствует определённой гармонике, следующих с интервалом $f_1 = \frac{1}{T}$.

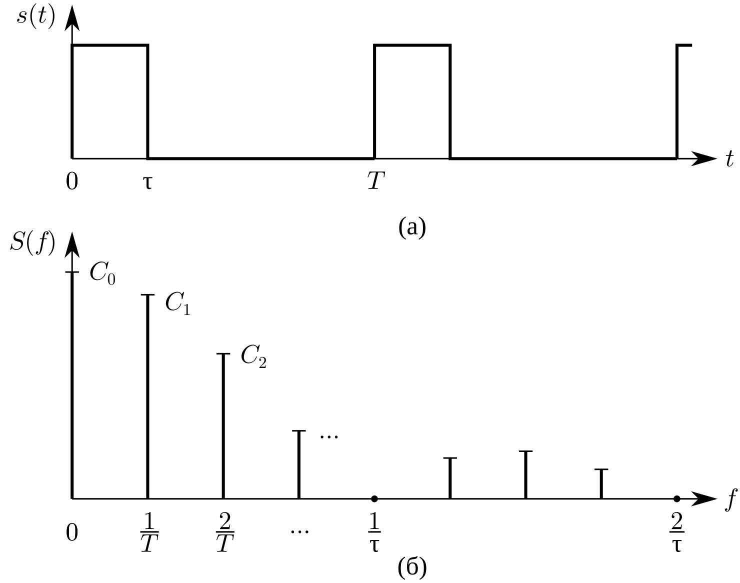

Рис. 1. Периодическая последовательность прямоугольных импульсов (а) и её амплитудный спектр (б)

1.2 Спектры непериодических сигналов

Непериодический сигнал получается предельным переходом из периодического при $T \to \infty$. При этом ряд Фурье (3) переходит в **интеграл Фурье**:

$$s(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(f) \exp(j2\pi f t) dt, \tag{5}$$

где

$$\dot{S}(f) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} s(t) \exp(-j2\pi f t) df \quad — \tag{6}$$

комплексный спектр сигнала $s(t)$, называемый также **спектральной плотностью**:

$$\dot{S}(f) = \lim_{T\to\infty} \dot{C}_n T = \lim_{f_1 \to 0} \frac{\dot{C}_n}{f_1}.$$

Выражение (6) называют **прямым**, а (5) — **обратным преобразованием Фурье** сигнала $s(t)$.

Модуль комплексного спектра $S(f)$ называется **амплитудным** спектром сигнала $s(t)$, а его аргумент $\varphi(f)$ — **фазовым** спектром:

$$\dot{S}(f) = S(f)\exp\{j\varphi(f)\},$$

$$S(f) = |\dot{S}(f)|, \quad \varphi(f) = \arg\dot{S}(f).$$

Амплитудные спектры действительных непериодических сигналов, как и периодических, являются чётными, а фазовые — нечётными функциями частоты.

В отличие от спектра периодического сигнала, спектр непериодического сигнала является **сплошным**, т.к. при $T \to \infty$ расстояния между спектральными линиями стремятся к нулю: $f_1 = \frac{1}{T} \to 0$ (рис. 2).

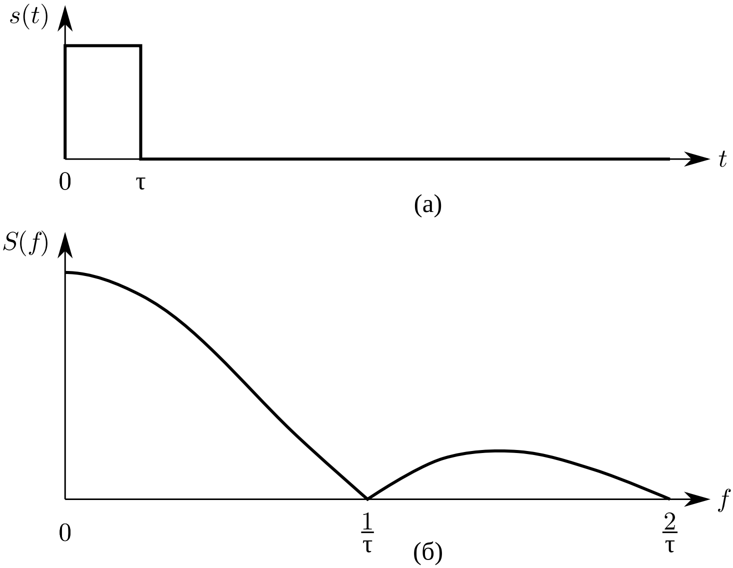

Рис. 2. Одиночный прямоугольный импульс (а) и его амплитудный спектр (б)

Значения функции $S(f)$ на рис. 2 рассчитываются по формуле:

$$S(f) = U_0\tau\left|\frac{\sin(\pi f\tau)}{\pi f\tau}\right|. \tag{7}$$

Сравнивая выражения (4) и (7), можно видеть, что огибающая спектра периодического сигнала с точностью до коэффициента $\frac{1}{T}$ повторяет спектральную плотность непериодического сигнала.

1.3 Ширина спектра сигнала

Под **шириной спектра** понимается полоса частот, в которой сосредоточен амплитудный спектр данного сигнала.

В силу дуальности преобразования Фурье сигналы, ограниченные во времени (а к таковым относятся все реальные сигналы), имеют бесконечно широкие спектры. Однако, большая часть энергии спектра этих сигналов обычно сосредоточена в некоторой ограниченной полосе, которую и принимают за эквивалентную полосу частот данного сигнала.

Конкретные критерии расчёта эквивалентной полосы частот различны и зависят от сигнала и типа решаемой задачи. Например, ширина спектра прямоугольного импульса часто рассчитывается «по первому лепестку» (см. рис. 3, а), т.е. $\Delta F = \frac{1}{\tau}$, причём в этой области оказывается сосредоточено 95% энергии сигнала. Для монотонно убывающих (вне ос-

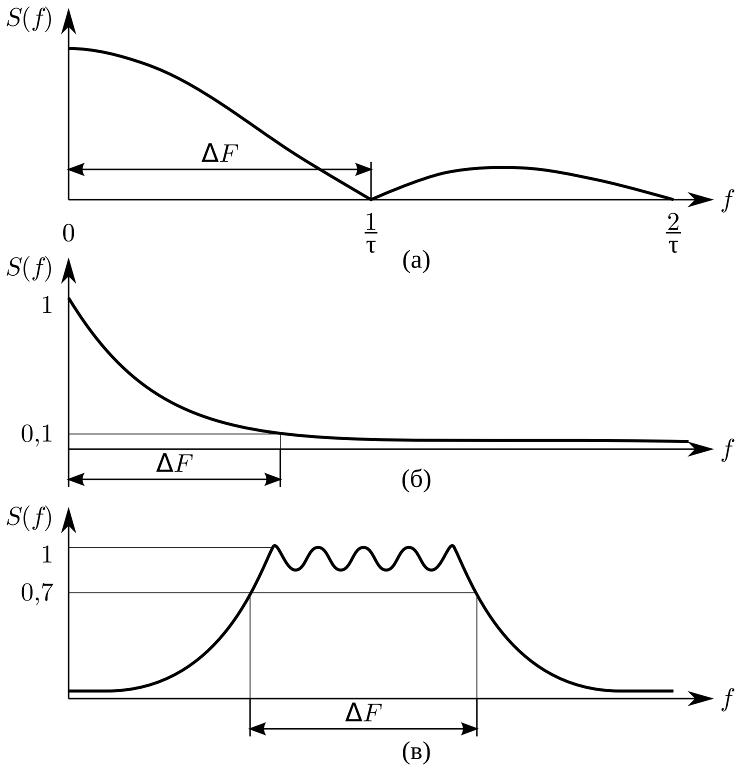

Рис. 3. Определение ширины спектра различных сигналов

новной своей части) спектров границы полосы частот определяются по относительному уровню амплитуды, например, 0,1 или 0,7[1], в зависимости от вида сигнала (см. рис. 3, б, в).

2 Домашнее задание

Построить временные диаграммы, рассчитать и построить **в масштабе** амплитудные спектры следующих сигналов:

1. Периодической последовательности прямоугольных импульсов с амплитудой $U_0 = N + 1$ (В), длительностью $\tau = MN + 1$ (мс) и периодом $T = (N \mod 3 + 2)\tau$ (мс). Здесь N — последняя цифра номера студенческого билета (например, 4), MN — две последние цифры номера студенческого билета (например, 94), $x \mod y$ — операция взятия по модулю, эквивалентная взятию остатка от деления x на y (например, $4 \mod 3 = 1$).

2. Периодической последовательности прямоугольных импульсов с длительностью в 2 раза меньшей, чем в п. 1.

3. Периодической последовательности прямоугольных импульсов с длительностью как в п. 1, но в 2 раза большим периодом.

4. Одиночного прямоугольного импульса с амплитудой и длительностью как в п. 1.

При построении спектра в п. 1 ограничиться частотой $\frac{4}{\tau}$, в остальных пунктах — той частотой, что получилась в п. 1. Построение лучше всего проводить следующим образом: слева располагаются построенные друг под другом в едином масштабе временные диаграммы, справа, напротив них, соответствующие спектральные, также построенные в едином масштабе. При расчёте значений спектральных составляющих можно использовать программы для математических вычислений (MathCad, MatLab, SciLab и пр.), однако, не следует подменять теоретический расчёт результатами моделирования из лабораторной работы!

3 Указания к выполнению работы

Перед началом работы ознакомьтесь с интерфейсом пользователя: нажмите `F1` или выберите в главном меню «`Помощь` → `Руководство пользователя`».

[1] точнее, $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707$

3.1 Цель работы

Целью работы является анализ спектров детерминированных сигналов: изучение особенностей спектров периодических и непериодических сигналов, изучение зависимости формы и ширины спектра от формы сигнала и его параметров, ознакомление со спектрами часто встречающихся сигналов.

3.2 Общие замечания

Спектр сигнала рассчитывается с использованием быстрого преобразования Фурье (БПФ) (см. руководство пользователя). При БПФ полагается, что исходный сигнал периодический, с периодом повторения, равным размеру массива сигнала. Если это условие не выполняется, гармоники (частотные составляющие) сигнала не будут совпадать с сеткой частот БПФ, что приведёт к искажению спектра. Для получения неискажённого спектра период сигнала должен быть степенью 2.

3.3 Исследование спектра гармонического сигнала

У гармонического сигнала два параметра, влияющих на форму амплитудного спектра: амплитуда (масштаб) и частота (центральная частота).

Плавно изменяя значения частоты и амплитуды сигнала, пронаблюдайте за изменением временной и спектральной диаграмм. Зарисуйте (сохраните) диаграммы сигнала и спектра гармонического сигнала при одном произвольном (ненулевом) значении амплитуды и частоты.

Сделайте вывод о форме спектра гармонического сигнала. Как изменяется спектр гармонического сигнала при изменении частоты? Амплитуды?

3.4 Исследование спектров периодических сигналов

В работе предлагается исследовать особенности спектров периодических сигналов на примере импульсов трёх различных форм: прямоугольный, треугольный и пилообразный.

Такие сигналы характеризуются двумя основными параметрами: длительность τ и период T. Отношение периода к длительности импульса определяет скважность: $Q = \frac{T}{\tau}$.

1. Перейдите к исследованию последовательности прямоугольных импульсов (сигнал — «Прямоугольный импульс», тип — «Периодический»).

2. Установите центральную частоту $f_0 = 0$. Задайте фиксированное значение длительности, равное $\frac{N}{256}$, где N — число точек БПФ (указано в верхнем правом углу спектральной диаграммы). Величину периода установите максимально возможной. Подберите оптимальный масштаб (нажмите `F7` для автоподбора масштаба).

3. Рассчитайте полученное значение скважности Q. Зарисуйте (сохраните) временные и спектральные диаграммы (для получения снимка окна программы в среде Windows нажмите `Alt + Print Screen`).

4. Уменьшите величину периода вдвое. Пронаблюдайте за изменением формы сигнала и спектра.

5. Продолжайте уменьшать величину периода вдвое до тех пор, пока скважность Q не станет равной 2. Зарисуйте (сохраните) временные и спектральные диаграммы при $Q = 2$.

6. Повторите п. 2–5 для импульсов треугольной и пилообразной формы.

7. Сделайте вывод об особенностях спектров периодических сигналов. Как изменяется спектр при изменении величины периода?

3.5 Исследование спектров непериодических сигналов

Особенности спектров непериодических сигналов предлагается исследовать на примере тех же импульсов, что и в п. 3.4: прямоугольный, треугольный и пилообразный.

У непериодических (одиночных) импульсов основным параметром является длительность τ.

1. Перейдите к исследованию одиночного прямоугольного импульса (сигнал — «Прямоугольный импульс», тип — «Одиночный»).

2. Установите центральную частоту $f_0 = 0$. Задайте значение длительности, равное $\frac{N}{256}$. Подберите оптимальный масштаб (нажмите `F7` для атоподбора масштаба). Зарисуйте (сохраните) временные и спектральные диаграммы при данном значении длительности.

3. Увеличьте длительность вдвое. Зарисуйте (сохраните) временные и спектральные диаграммы при данном значении длительности, не изменяя масштаба.

4. Изменяя значения τ от $\frac{N}{256}$ до максимально возможного, снимите зависимость ширины спектра ΔF от длительности τ. Зависимость сведите в табл. 1. Способы определения ширины спектра сигнала даны в кратких теоретических сведениях. Если спектр выходит за пределы окна или, наоборот, получается слишком мелким, измените масштаб отображения (вручную или автоматически, клавишей `F7`).
5. Повторите п. 2–4 для импульсов треугольной и пилообразной формы.
6. Отобразите графически три полученные зависимости в одной системе координат.
7. Сделайте выводы о влиянии формы и длительности импульса на форму и ширину его спектра.

Таблица 1

τ, с			...		
ΔF, Гц			...		

3.6 Сравнительный анализ спектров периодических и непериодических сигналов

Спектры одиночного видеоимпульса и последовательности видеоимпульсов сравниваются при одинаковом значении длительности.

1. Перейдите к исследованию последовательности прямоугольных импульсов (сигнал — «Прямоугольный импульс», тип — «Периодический»).
2. Установите центральную частоту $f_0 = 0$. Задайте фиксированное значение длительности, равное $\frac{N}{256}$. Величину периода установите равной $T = 4\tau$. Подберите оптимальный масштаб (нажмите `F7` для автоподбора масштаба).
3. Добавьте новый слой изображения. Переключитесь к одиночному типу сигнала. Подберите масштаб сигнала таким образом, чтобы максимальные значения спектральных составляющих обоих сигналов совпали. Зарисуйте (сохраните) полученные спектральные диаграммы.
4. Удалите созданный слой изображения.
5. Повторите п. 2–4 для импульсов треугольной и пилообразной формы.

6. Сделайте вывод о сходстве и различиях спектров периодических и непериодических сигналов.

3.7 Исследование спектров полосовых сигналов

Полосовой высокочастотный сигнал получается из низкочастотного при ненулевой частоте заполнения f_0 (центральной частоте). Одиночный прямоугольный импульс при $f_0 = 0$ называют видеоимпульсом, а при $f_0 > 0$ — радиоимпульсом.

1. Перейдите к исследованию одиночного видеоимпульса (сигнал — «Прямоугольный импульс», тип — «Одиночный»).

2. Задайте значение длительности, равное $\frac{N}{256}$.

3. Плавно увеличивая значение центральной частоты до максимального, пронаблюдайте за изменением сигнала и спектра.

4. Зарисуйте (сохраните) временные и спектральные диаграммы радиоимпульса при максимальном значении f_0, подобрав оптимальный масштаб отображения вручную или автоматически (клавиша `F7`).

5. Определите ширину спектра радиоимпульса ΔF при тех же значениях длительности τ, что и для видеоимпульса, значения сведите в таблицу, аналогичную табл. 1 (см. стр. **??**).

6. Повторите п. 3–5 для импульсов треугольной и пилообразной формы.

7. Сравните полученные временные и спектральные диаграммы с аналогичными диаграммами из п. 3.5. Сделайте вывод о сходстве и различиях спектров сигналов при нулевой и ненулевой частоте заполнения.

8. Отобразите графически три полученные зависимости ΔF от τ в одной системе координат.

9. Сравните полученные зависимости ΔF от τ между собой и с аналогичными зависимостями из п. 3.5. Сделайте выводы.

3.8 Исследование спектров часто встречающихся сигналов

3.8.1 Исследование спектра сигнала ЛЧМ

Сигнал линейной частотной модуляции (ЛЧМ) имеет три существенных параметра: длительность, начальная частота и конечная частота.

1. Перейдите к исследованию одиночного сигнала ЛЧМ (сигнал — «ЛЧМ сигнал», тип — «Одиночный»).

2. Установите значение начальной и конечной частоты равными 128 и 448 соответственно.

3. Снимите зависимость ширины спектра одиночного сигнала ЛЧМ от длительности. Начальное значение длительности установите равным $\frac{N}{64}$. Определите ширину полосы частот по уровню 0,7. Увеличьте значение длительности вдвое. Пронаблюдайте за изменением спектра. Продолжайте увеличивать длительность до максимального значения. Полученную зависимость сведите в таблицу, аналогичную табл. 1 (см. стр. **??**).

4. Зарисуйте (сохраните) временные и спектральные диаграммы сигнала ЛЧМ при максимальном значении длительности, подобрав оптимальный масштаб отображения вручную или автоматически (клавиша `F7`).

5. Сделайте вывод о зависимости формы и ширины спектра сигнала ЛЧМ от длительности.

6. Пронаблюдайте за изменением спектра сигнала ЛЧМ при изменении начальной и конечной частоты. Изменяется ли при этом ширина спектра? Если да, то как?

3.8.2 Гауссовский импульс

Форма спектра гауссовского импульса определяется его длительностью.

1. Установите центральную частоту равной нулю. Плавно изменяя длительность пронаблюдайте за изменениями сигнала и спектра. Сделайте соответствующие выводы.

2. Зарисуйте (сохраните) временную и спектральную диаграммы при максимальном значении длительности, подобрав оптимальный масштаб отображения вручную или автоматически (клавиша `F7`).

3. Установите максимальное значение длительности. Изменяя центральную частоту, пронаблюдайте за изменениями сигнала и спектра. Сделайте соответствующие выводы.

4. Зарисуйте (сохраните) временную и спектральную диаграммы при максимальном значении центральной частоты, подобрав оптимальный масштаб отображения вручную или автоматически (клавиша `F7`).

3.8.3 Функция sinc

Форма спектра функции $\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}, x = \frac{2\pi t}{T}$, определяется периодом синусоиды T. При ненулевой частоте заполнения (центральной частоте f_0) получается полосовой сигнал $\operatorname{sinc}\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\cos(2\pi f_0 t)$.

1. Установите центральную частоту равной нулю. Плавно изменяя период, пронаблюдайте за изменениями сигнала и спектра. Сделайте соответствующие выводы.

2. Зарисуйте (сохраните) временную и спектральную диаграммы при значении периода, равном половине от максимального, подобрав оптимальный масштаб отображения вручную или автоматически (клавиша `F7`).

3. Сравните форму сигнала и спектра функции sinc с формой сигнала и спектра прямоугольного импульса.

4. Установите значение периода, равное половине от максимального. Изменяя центральную частоту, пронаблюдайте за изменениями сигнала и спектра. Сделайте соответствующие выводы.

5. Зарисуйте (сохраните) временную и спектральную диаграммы при максимальном значении центральной частоты, подобрав оптимальный масштаб отображения вручную или автоматически (клавиша `F7`).

4 Содержание отчёта

1. Название и цель работы.

2. Выполненное домашнее задание.

3. Временные и спектральные диаграммы, таблицы зависимостей и выводы по всем пунктам лабораторной работы.

4. Общий вывод по результатам лабораторной работы.

Примечание: общий вывод не должен быть перефразировкой целей работы, а должен содержать обобщение (но не копию!) всех выводов, сделанных по каждому пункту в отдельности.

5 Контрольные вопросы

1. Что называется спектром сигнала? Как получается спектр? Какие виды спектров вы знаете? Приведите примеры.

2. Запишите ряд Фурье в действительной форме и поясните смысл входящих в него величин. Как рассчитываются коэффициенты ряда? Как по ним получить амплитудный и фазовый спектр?

3. Что представляют собой «гармоники» сигнала? Какая гармоника называется первой (основной)? Как рассчитывается частота первой гармоники?

4. Запишите ряд Фурье в комплексной форме и поясните смысл входящих в него величин. В чём состоит смысл отрицательных частот? Как выглядят амплитудный и фазовый спектр при разложении сигнала в комплексный ряд Фурье?

5. Запишите прямое и обратное преобразование Фурье, поясните смысл понятия «спектральная плотность».

6. Что понимается под шириной спектра сигнала? Как рассчитывается ширина спектра различных сигналов?

7. Чем различаются спектры периодических и непериодических сигналов? Приведите примеры.

8. Как влияет величина периода на спектр периодического сигнала? Изобразите примеры.

9. Как влияет на ширину спектра сигнала его длительность? Ответ иллюстрируйте графиками.

10. Как влияет на спектр сигнала наличие высокочастотного заполнения? Изобразите примеры сигнала и спектра при нулевой и ненулевой частоте заполнения.

11. Изобразите в масштабе временные и спектральные диаграммы одиночного прямоугольного импульса и периодической последовательности прямоугольных импульсов со скважностью 3.

12. Изобразите в масштабе временные и спектральные диаграммы одиночного прямоугольного импульса и треугольного импульса вдвое большей длительности.

13. В чём состоит особенность спектра гауссовского импульса? Ответ иллюстрируйте графиками.

14. Изобразите спектр прямоугольного импульса. Изобразите сигнал, имеющий прямоугольный спектр.

Литература

1. Кловский Д. Д. Теория электрической связи. — М.: Радиотехника, 2009. — 648 с.
2. Теория электрической связи: учебник для вузов / А. Г. Зюко, Д. Д. Кловский, В. И. Коржик, М. В. Назаров; Под ред. Д. Д. Кловского. — М.: Радио и связь, 1998. — 432 с.

Николаев Борис Иванович
Борисенков Алексей Владимирович
Чингаева Анна Михайловна

Задание и методические указания к лабораторной работе
по дисциплинам «**Общая теория связи**»,
«**Теория информации и информационных систем**»,
«**Радиотехнические цепи и сигналы**»

для студентов 2 курса специальностей 210700, 200700, 210400
дневной формы обучения

«**Спектры детерминированных сигналов**»