

Федеральное государственное образовательное бюджетное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Поволжский государственный университет телекоммуникаций и  
информатики»

Кафедра ТОРС

**Задание и методические указания**  
к курсовой работе по дисциплине

**«Передача дискретных сообщений по непрерывным  
каналам с памятью (ПДСпоНКсП)»**  
для студентов-магистрантов 2 курса направления 210700м  
«Телекоммуникации»

Составители: д.т.н, проф. Николаев Б.И.  
к.т.н. Чингаева А.М.

Самара, 2013

## Цель курсовой работы

Целью курсовой работы является расчёт и сравнение по помехоустойчивости трёх различных систем передачи информации: аналоговой системы передачи, цифровой системы передачи без кодирования и цифровой системы передачи с кодированием. Критерием сравнения является зависимость общей среднеквадратической погрешности  $D(\hat{\lambda} | \lambda)$  оценки передаваемого параметра  $\lambda$  от отношения средней мощности принимаемого сигнала к мощности аддитивного белого гауссовского шума, приведённого ко входу приёмника. Все три системы находятся в одинаковых условиях, т.е. во всех случаях сохраняются как параметры источника сообщения, так и параметры канала. Канал имеет 2 состояния:

- однолучевой канал с коэффициентом передачи  $\gamma = 1$ ;
- двухлучевой канал с коэффициентами передачи в лучах  $\dot{\gamma}_1$  и  $\dot{\gamma}_2$ , заданными в таблице вариантов.

Итоговыми результатами сравнения являются рассчитанные зависимости  $D(\hat{\lambda} | \lambda) = f(P_c/P_{\text{ш}})$  (для всех трёх систем и обоих состояний канала) и сделанные на их основе выводы о преимуществах и недостатках той или иной системы.

## Задание на курсовую работу

1. По каналу связи, имеющему полосу пропускания  $F$ , необходимо передать информацию от некоторого датчика, измеряющего параметр  $\lambda$  удалённого объекта. Параметр  $\lambda$  имеет нормальное распределение, усечённое границами  $\pm 3\sigma$ , с  $M(\lambda) = 0$  и с дисперсией  $\sigma^2 = D(\lambda)$ . Отсчёт параметра  $\lambda$  производится периодически через время  $T$ . Корреляция соседних отсчётов не учитывается.

2. Требуется построить структурную схему системы передачи информации и рассчитать зависимость общей среднеквадратической погрешности оценки параметра  $D(\hat{\lambda} | \lambda)$  от отношения средней мощности принимаемого сигнала к мощности аддитивного белого гауссовского шума, приведённого ко входу приёмника,  $N_0$  для трёх систем:

2.1. Система передачи параметра  $\lambda$  в аналоговой форме с модуляцией несущего колебания  $u_0(t)$ . Несущее колебание  $u_0(t)$  и

вид модуляции определяются вариантом. Оценивание параметра на приёмной стороне производится по правилу максимального правдоподобия.

2.2. Система передачи параметра  $\lambda$  в цифровой форме без помехозащитного кодирования с использованием двухпозиционной ФМ и длительности элементарного сигнала  $T_0$ . Число уровней квантования выбирается максимально возможным для  $FT_0 = 1$ . Демодуляция осуществляется с помощью оптимального когерентного приёмника.

2.3. Система передачи параметра  $\lambda$  в цифровой форме с помехозащитным кодированием, позволяющим исправить одиночные ошибки. В качестве помехозащитного кода выбирается код Хемминга или укороченный код Хемминга.

3. Полученные зависимости погрешности  $D(\hat{\lambda} | \lambda) = f(P_c/P_{\text{ш}})$  для всех трёх систем передачи и для двух состояний канала (всего 6 зависимостей) необходимо сравнить между собой. Значения  $P_c/P_{\text{ш}}$  при этом задавать в диапазоне 2...16.

Варианты задания приведены в табл. П.1 приложения.

### **Методические указания к выполнению курсовой работы**

Курсовая работа должна содержать:

- структурные схемы системы передачи для каждого пункта задания с подробным описанием взаимодействия блоков в процессе передачи сообщения;
- расчёт корректора для второго состояния канала (2 луча с коэффициентами передачи  $\hat{\gamma}_1$  и  $\hat{\gamma}_2$ ) и поправочного коэффициента  $\eta$ , изменяющего отношение сигнал/шум на выходе корректора по сравнению с его входом.
- описание работы оценителя, включая решающее правило и алгоритм его работы, а также причины возникновения погрешности оценки;
- теоретический вывод величины погрешности оценки и расчёт зависимости этой погрешности от отношения мощности сигнала к мощности шума;
- таблицы расчётных значений погрешности  $D(\hat{\lambda} | \lambda) = f(P_c/P_{\text{ш}})$ ;

- сводный график зависимостей  $D(\hat{\lambda} | \lambda) = f(P_c/P_{ш})$  для всех 6 пунктов;
- выводы по результатам расчёта, в которых необходимо отразить преимущества и недостатки каждого из трёх методов передачи в зависимости от ситуации в канале.

## 1. Передача параметра $\lambda$ в аналоговой форме

Структурная схема системы передачи параметра  $\lambda$  в аналоговой форме содержит источник сообщения (ИС), модулятор (Мод) с заданным законом модуляции (амплитудная, частотная или временная модуляция), канал связи, источник белого гауссовского шума и блок оценивания передаваемого параметра  $\lambda$  (рис. 1).

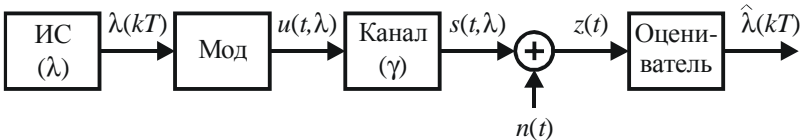


Рис. 1. Структурная схема системы передачи параметра  $\lambda$  в аналоговой форме для 1-го состояния канала ( $\gamma = 1$ )

Параметр  $\lambda$  полагается постоянным на интервале времени  $t = T$ , следовательно,  $\lambda(t) = \lambda(kT)$ .

### 1.1. Модулятор

Модулятор изменяет некоторый параметр несущего колебания  $u_0(t)$  в соответствии с законом изменения  $\lambda$ . При амплитудной модуляции (АМ) сигнал на выходе модулятора будет иметь вид:

$$u_{\text{АМ}}(t, \lambda) = a \cdot \lambda \cdot u_0(t). \quad (1)$$

При частотной модуляции (ЧМ):

$$u_{\text{ЧМ}}(t, \lambda) = \text{Re} \left[ \dot{u}_0(t) \cdot e^{j\lambda t} \right]. \quad (2)$$

При временной модуляции (ВМ):

$$u_{\text{ВМ}}(t, \lambda) = u_0(t - a\lambda). \quad (3)$$

Масштабный коэффициент  $a$  во всех случаях вычисляется из условий максимальной мощности, предоставленной полосы частот и

периода отсчёта параметра  $\lambda$ . При АМ средняя мощность передаваемого сигнала должна быть равна  $P_{\text{пер}}$ , т.е.

$$\frac{1}{T} \int_{-3\sigma}^{3\sigma} \int_0^T u_{\text{АМ}}^2(t, \lambda) \cdot w(\lambda) dt \cdot d\lambda = P_{\text{пер}}. \quad (4)$$

С учётом (1)

$$a^2 \frac{1}{T} \int_0^T u_0^2(t) dt \cdot \int_{-3\sigma}^{3\sigma} \lambda^2 w(\lambda) d\lambda = P_{\text{пер}},$$

Так как по условию  $M(\lambda) = 0$ , то

$$\int_{-3\sigma}^{3\sigma} \lambda^2 w(\lambda) d\lambda = D(\lambda) = \sigma^2,$$

$$a = \sqrt{\frac{P_c}{D(\lambda) \cdot \frac{1}{T} \int_0^T u_0^2(t) dt}}. \quad (5)$$

При расчёте  $a$  величину  $P_{\text{пер}}$  и мощность несущего сигнала  $u_0(t)$  считать одинаковыми (например, принять равными  $1 \text{ В}^2$ ). На результирующую зависимость  $D(\hat{\lambda} | \lambda) = f(P_c/P_{\text{ш}})$  эти величины не влияют, так как аргументом является не  $P_{\text{пер}}$ , а отношение  $P_c/P_{\text{ш}}$  на приёме.

При ЧМ масштабный коэффициент  $a$  вычисляется из условия, что при максимальных отклонениях  $\lambda$  от среднего значения частота сигнала  $\omega_0 + a\lambda$  не выходит за пределы отведённой полосы частот  $2\pi F$ :

$$(\omega_0 + a\lambda_{\text{max}}) - (\omega_0 - a\lambda_{\text{max}}) = 2\pi F. \quad (6)$$

Отсюда

$$2a\lambda_{\text{max}} = 6a\sigma = 2\pi F \quad \text{и} \quad a = \frac{\pi F}{3\sigma}. \quad (7)$$

При ВМ нулевому значению параметра  $\lambda$  соответствует смещение  $u_0(t)$  по оси времени на половину интервала отсчёта  $T/2$ . Масштабный коэффициент  $a$  выбирается таким образом, чтобы при максимальных отклонениях  $\lambda$  от среднего значения смещение по оси времени не выходило за пределы интервала отсчёта  $\lambda$ :

$$\left(\frac{T}{2} + a\lambda_{\text{max}}\right) - \left(\frac{T}{2} - a\lambda_{\text{max}}\right) = T, \quad (8)$$

$$2a\lambda_{\max} = 6a\sigma = T .$$

Отсюда  $a = T/(6\sigma)$ . (9)

## 1.2. Канал связи

### 1.2.1 Однолучевой канал

Однолучевой канал связи вносит ослабление сигнала  $\gamma$  :

$$s(t, \lambda) = \gamma u(t, \lambda) . \tag{10}$$

Кроме того, на входе приёмника (оценителя) действует аддитивный белый гауссовский шум (АБГШ)  $n(t)$  :

$$z(t) = s(t, \lambda) + n(t) . \tag{11}$$

В данной курсовой работе величина  $\gamma$  не влияет на окончательные результаты расчёта, так как аргументом является отношение  $P_c/P_{ш}$  на приёме. Для простоты полагается, что в однолучевом канале  $\gamma = 1$  .

### 1.2.2 Двухлучевой канал

В этом пункте выполняется расчёт корректора канала для второго состояния канала (2 луча с коэффициентами передачи  $\hat{\gamma}_1$  и  $\hat{\gamma}_2$ ), с помощью которого устраняется менее мощный луч – и канал (вместе с корректором) становится однолучевым с  $\gamma = 1$  .

Вместо схемы рис. 1 получается схема рис. 1а:

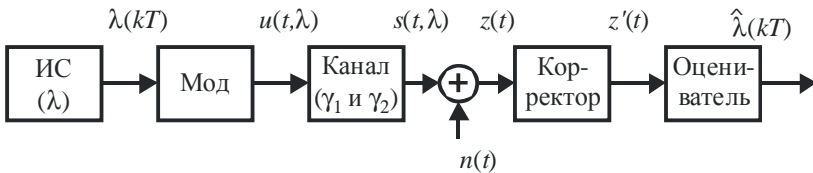


Рис. 1а. Структурная схема системы передачи параметра  $\lambda$  в аналоговой форме для 2-го (двухлучевого) состояния канала

В зависимости от варианта следует выбрать схему корректора, определить весовые коэффициенты в отводах и определить поправочный коэффициент  $\eta$ , изменяющий отношение сигнал/шум на

выходе корректора по сравнению с его входом. В дальнейших расчётах использовать рассчитанный поправочный коэффициент.

### 1.3. Оценитель

#### 1.3.1. Алгоритм работы и схема оценителя

Оценитель находит максимально правдоподобную (МП) оценку передаваемого параметра ( $\hat{\lambda}$ ). Решающим правилом для оценителя является уравнение правдоподобия:

$$\left. \frac{dw(z(t)|\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda = \hat{\lambda}} = 0. \quad (12)$$

Шум на входе оценителя  $n(t)$  белый гауссовский, следовательно

$$w(z(t)|\lambda) = K \cdot \exp \left[ -\frac{1}{N_0} \int_0^T (z(t) - s(t, \lambda))^2 dt \right].$$

Подставляя выражение для  $w(z(t)|\lambda)$  в (12), получим

$$\left. \frac{d}{d\lambda} \left\{ K \cdot \exp \left[ -\frac{1}{N_0} \int_0^T (z(t) - s(t, \lambda))^2 dt \right] \right\} \right|_{\lambda = \hat{\lambda}} = 0.$$

Для максимизации убывающей экспоненты достаточно минимизировать показатель степени:

$$\left. \frac{d}{d\lambda} \left[ \frac{1}{N_0} \int_0^T (z(t) - s(t, \lambda))^2 dt \right] \right|_{\lambda = \hat{\lambda}} = 0. \quad (13)$$

#### Амплитудная модуляция

Для случая АМ получаем:

$$a\gamma \cdot \int_0^T z(t) u_0(t) dt - (a\gamma)^2 \hat{\lambda} \int_0^T u_0^2(t) dt = 0.$$

Отсюда

$$\hat{\lambda} = \frac{V}{a\gamma E}. \quad (14)$$

Здесь  $V = \int_0^T z(t) u_0(t) dt$  – корреляционный интеграл,

$E = \int_0^T u_0^2(t) dt$  – энергия несущего сигнала (на передаче).

Оценитель, работающий по алгоритму (13), может быть реализован на одном согласованном фильтре (рис. 2)

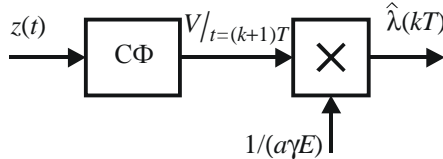


Рис. 2. Структурная схема оценителя амплитуды

Для реализации когерентной демодуляции по схеме рис. 2 необходимо знать величину ослабления сигнала  $\gamma$ .

### Частотная модуляция

Для случая ЧМ, аналогично АМ, получаем:

$$\frac{d}{d\lambda} \int_0^T (z(t) - \gamma \cdot u_{\text{ЧМ}}(t, \lambda))^2 dt \Big|_{\lambda = \hat{\lambda}} = 0.$$

Рассмотрим случай, когда в качестве несущего выбран сигнал  $u_0(t) = U_0 \sin \omega_0 t$ . Тогда  $u_{\text{ЧМ}}(t, \lambda) = U_0 \sin[(\omega_0 + a\lambda)t]$ , и, следовательно,  $s(t, \lambda) = \gamma U_0 \sin[(\omega_0 + a\lambda)t]$ . Уравнение правдоподобия в этом случае примет вид

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\lambda} \int_0^T z^2(t) dt + \gamma^2 U_0^2 \frac{d}{d\lambda} \int_0^T \sin^2[(\omega_0 + a\lambda)t] dt - \\ & - 2\gamma U_0 \frac{d}{d\lambda} \int_0^T z(t) \sin[(\omega_0 + a\lambda)t] dt \Big|_{\lambda = \hat{\lambda}} = 0. \end{aligned}$$

Первый интеграл не зависит от  $\lambda$ . Второй интеграл представляет собой энергию посылки, которая также не зависит от  $\lambda$ , так как ЧМ относится к неэнергетическому виду модуляции. Тогда получаем уравнение

$$\int_0^T z(t) \cdot t \cdot \cos[(\omega_0 + a\hat{\lambda})t] dt = 0.$$

Непосредственное нахождение решения этого уравнения (т.е. оцениваемого параметра  $\hat{\lambda}$ ) затруднительно. Практически отыскание



оценки  $\hat{\lambda}$  сводится к определению частоты  $\omega$  принимаемого колебания, после чего  $\hat{\lambda}$  находится как

$$\hat{\lambda} = \frac{\hat{\omega} - \omega_0}{a}. \quad (15)$$

Вернёмся к выражению для уравнения правдоподобия. Для максимизации третьего интеграла

$$I(\omega) = \int_0^T z(t) \sin(\omega t) dt,$$

где  $\omega = \omega_0 + a\lambda$ , нужно построить функцию  $I(\omega)$  и найти её максимум. Тогда

$$\hat{\lambda} = \arg \max_{\lambda} I(\omega). \quad (16)$$

Чтобы построить функцию  $I(\omega)$ , можно взять дискретный ряд значений аргумента  $\omega$ . Минимальное число значений определяется теоремой Котельникова в частотной области, согласно которой шаг по оси частот

$$\Delta f = \frac{1}{T}.$$

Тогда число отсчётов функции  $I(\omega)$

$$L \geq \frac{F}{\Delta f} = FT. \quad (17)$$

В окрестности максимального отсчёта производится интерполяция полиномом и поиск аргумента точного значения экстремума. При аппроксимации полиномом второй степени оценка частоты принимаемого колебания получается по следующей формуле:

$$\hat{\omega} = \omega_m + \frac{\pi}{T} \cdot \frac{I_- - I_+}{I_- + I_+ - 2I_m}. \quad (18)$$

Здесь  $\omega_m$  – аргумент максимума,  $I_m$  – максимум,  $I_-$  и  $I_+$  – ближайшие к максимуму значения. Для корректного получения оценок  $\hat{\omega}$  по формуле (18) на границах диапазона необходимы два дополнительных фильтра.

Функция  $I(\omega)$  представляет собой корреляционный интеграл, дискретные значения которого для разных  $\omega$  могут быть получены на выходах согласованных фильтров (СФ). Таким образом, оценитель частоты должен содержать  $L+2$  согласованных фильтров и устройство определения максимума, включающее интерполятор

(рис. 3). Начальная фаза принимаемого сигнала считается известной.

Фильтры на рис. 3 согласованы с опорными сигналами  $\sin(\omega_l t)$ ,

( $\omega_l = \omega_0 - \pi F + \pi(2l-1)/T$ ,  $l = \overline{0, L+1}$ ).

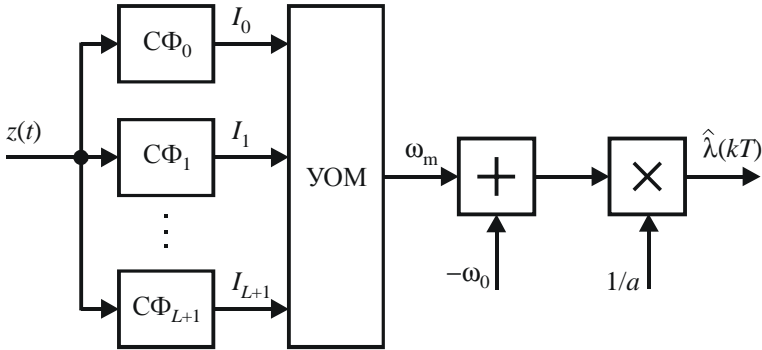


Рис. 3. Схема оценителя частоты с использованием согласованных фильтров

### Временная модуляция

Для случая ВМ, как и для случая ЧМ, непосредственное нахождение решения уравнения (12) затруднительно. На практике оценивание параметра  $\hat{\lambda}$  при ВМ сводится к отысканию аргумента максимума выражения (20):

$$\hat{\lambda} = \arg \max_{\lambda} I(t); \quad (19)$$

$$I(t) = \int_0^{2T} z(\tau) u_0(\tau - t) d\tau. \quad (20)$$

Выражение (20) представляет собой взаимную корреляционную функцию опорного сигнала  $u_0(t)$  и принимаемого сигнала  $z(t)$ . Зная аргумент максимума  $I(t)$ , можно найти  $\hat{\lambda}$ :

$$\hat{\lambda} = \frac{t_m - T}{a}. \quad (21)$$

Здесь  $t_m$  – аргумент максимума выражения (20).

Оценитель, работающий по алгоритму (19), можно реализовать на одном согласованном фильтре (рис. 4).

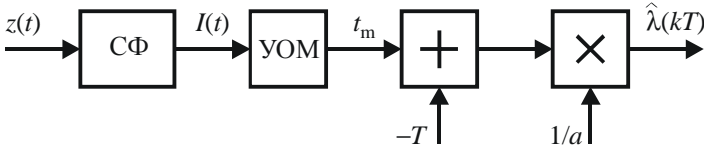


Рис. 4. Оценитель параметра  $\lambda$  при ВМ

### 1.3.2. Оценка дисперсии погрешности параметра $\lambda$

#### Амплитудная модуляция

Для случая энергетической модуляции (АМ) дисперсия погрешности оценки  $D(\hat{\lambda} | \lambda)$  параметра  $\lambda$  находится непосредственно из уравнения (14). Принимаемый сигнал

$$z(t) = \gamma a \lambda u_0(t) + n(t).$$

Подставляя это выражение в уравнение (14), получим

$$\begin{aligned} \hat{\lambda} &= \frac{1}{a\gamma E} \int_0^T (\gamma a \lambda u_0(t) + n(t)) u_0(t) dt = \\ &= \lambda + \frac{1}{a\gamma E} \int_0^T n(t) u_0(t) dt = \lambda + \xi. \end{aligned} \quad (21)$$

Из выражения (21) видно, что дисперсия погрешности оценивания  $D(\hat{\lambda} | \lambda)$  равна дисперсии случайной величины  $\xi$ , обусловленной АБГШ.

$$D(\hat{\lambda} | \lambda) = D(\xi) = \frac{1}{(a\gamma E)^2} M \left[ \left( \int_0^T n(t) u_0(t) dt \right)^2 \right].$$

После преобразований (продумать самостоятельно) получаем

$$D(\hat{\lambda} | \lambda) = \frac{1}{2a^2 h^2} = \frac{1}{2a^2 FT} \cdot \frac{1}{(P_c/P_{\text{ш}})}. \quad (22)$$

Здесь  $h^2 = \frac{\gamma^2 E}{N_0} = \frac{P_c}{P_{\text{ш}}} FT$  – отношение сигнал-шум на приёмной стороне.

#### Частотная и временная модуляция

Для неэнергетических видов модуляции (ЧМ, ВМ) дисперсия погрешности оценки  $D(\hat{\lambda} | \lambda)$  параметра  $\lambda$  находится с использова-

нием неравенства Крамера-Рао:

$$D(\hat{\lambda} | \lambda) \geq \frac{1}{\Phi} = -\frac{1}{2h^2 \Psi''(\lambda, \lambda_0)}. \quad (23)$$

Здесь

$$\Phi = -2h^2 \Psi''(\lambda, \lambda_0) -$$

информация Фишера,

$$\Psi(\lambda, \lambda_0) = \frac{1}{E_c} \int_0^T s(t, \lambda_0) s(t, \lambda) dt -$$

функция неопределённости сигнала  $s(t, \lambda)$ , а  $E_c$  – энергия сигнального элемента на приёмной стороне:

$$E_c = \int_0^T s^2(t, \lambda) dt.$$

Рассмотрим случай **ЧМ**, когда в качестве несущего выбран сигнал  $u_0(t) = U_0 \sin \omega_0 t$ . Тогда

$$\Psi(\lambda, \lambda_0) = \frac{\gamma^2 U_0^2}{E_c} \int_0^T \sin[(\omega_0 + a\lambda_0)t] \sin[(\omega_0 + a\lambda)t] dt.$$

Интеграл

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos[2(\omega_0 + a\lambda_0)t] dt = \frac{\sin[2(\omega_0 + a\lambda_0)T]}{2(\omega_0 + a\lambda_0)T} = 0$$

в случае, если  $\omega_0 T \gg 1$  или если  $\omega_0 T = 2\pi n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ).

После преобразований (проделать самостоятельно) получаем

$$\Psi(\lambda, \lambda_0) = \frac{\sin[a(\lambda_0 - \lambda)T]}{a(\lambda_0 - \lambda)T}.$$

Вторая производная будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \Psi''(\lambda, \lambda_0) = & -\frac{aT \sin[a(\lambda - \lambda_0)T]}{(\lambda - \lambda_0)} - 2 \frac{\cos[a(\lambda - \lambda_0)T]}{(\lambda - \lambda_0)^2} + \\ & + 2 \frac{\sin[a(\lambda - \lambda_0)T]}{aT(\lambda - \lambda_0)^3}. \end{aligned}$$

Значение второй производной при  $\lambda - \lambda_0 = 0$ :

$$\Psi''(\lambda_0, \lambda_0) = -a^2 T^2 / 3 \quad (\text{вывести самостоятельно}).$$

Подставляя полученное выражение в (23), получаем

$$D(\hat{\lambda} | \lambda) = \frac{3}{2h^2 a^2 T^2} = \frac{3}{2a^2 T^3 F (P_c/P_{\text{ш}})}. \quad (24)$$

Для случая **ВМ** функция неопределённости примет вид

$$\Psi(\lambda, \lambda_0) = \frac{\gamma^2 U_0^2 T}{E_c} \int_0^T e^{-b(t-a\lambda_0)^2 - b(t-a\lambda)^2} dt.$$

Для того, чтобы проинтегрировать это выражение, можно расширить пределы и воспользоваться свойством

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2s}} dx = 1.$$

После интегрирования (проделать самостоятельно) получаем

$$\Psi(\lambda, \lambda_0) = e^{-\frac{a^2 b}{2} (\lambda - \lambda_0)^2}.$$

Вторая производная будет иметь вид:

$$\Psi''(\lambda, \lambda_0) = -a^2 b \left[ 1 - a^2 b (\lambda - \lambda_0)^2 \right] e^{-\frac{a^2 b}{2} (\lambda - \lambda_0)^2}.$$

Значение второй производной при  $\lambda - \lambda_0 = 0$ :

$$\Psi''(\lambda_0, \lambda_0) = -a^2 b.$$

Подставляя полученное выражение в (23), получаем

$$D(\hat{\lambda} | \lambda) = \frac{1}{2h^2 a^2 b} = \frac{1}{2a^2 b F T} \cdot \frac{1}{(P_c/P_{\text{ш}})}. \quad (25)$$

Расчётные значения  $D(\hat{\lambda} | \lambda) = f(P_c/P_{\text{ш}})$  необходимо свести в таблицу вида (табл. 1):

Таблица 1

$P_c/P_{\text{ш}}$	2	4	6	8	10	12	14	16
$D(\hat{\lambda}   \lambda)$								

По значениям из табл. 1 строится кривая зависимости  $D(\hat{\lambda} | \lambda) = f(P_c/P_{\text{ш}})$  в логарифмическом масштабе.

Для двухлучевого канала строится аналогичная таблица. Целесообразно дополнить её второй строкой с промежуточными значениями отношения сигнал/шум на выходе корректора  $(P_c/P_{\text{ш}})'$ , отличающимися от  $(P_c/P_{\text{ш}})$  поправочным множителем  $\eta$ . В формулах

(22), (24) и (25) вместо  $(P_c/P_{ш})$  подставляется  $(P_c/P_{ш})'$ , а графики строятся в зависимости от  $(P_c/P_{ш})$ .

## 2. Передача параметра $\lambda$ в цифровой форме без помехозащитного кодирования с использованием двухпозиционной ФМ

Структурная схема системы передачи параметра  $\lambda$  в цифровой форме без помехозащитного кодирования с использованием двухпозиционной ФМ содержит источник сообщения (ИС), аналого-цифровой преобразователь (АЦП), модулятор ФМ-2 (Мод), канал связи, источник белого гауссовского шума, демодулятор и цифро-аналоговый преобразователь (ЦАП) (рис. 5).

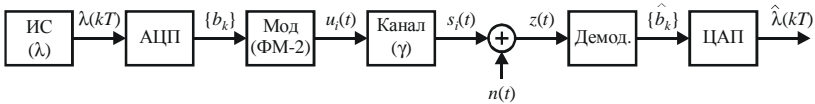


Рис. 5. Структурная схема системы передачи параметра  $\lambda$  в цифровой форме без помехозащитного кодирования

Поскольку  $\lambda = \text{const}(t)$  на интервале  $T$ , то АЦП фактически представляет собой квантователь по уровню одного дискретного отсчёта  $\lambda_k$ . Число разрядов квантователя  $n$  выбирается так, чтобы оно было максимально возможным при заданной полосе частот (т.е.  $FT_0 = 1$ , где  $T_0$  – период следования отсчётов цифрового сигнала  $b_k$ ):

$$n = T/T_0 = FT. \quad (26)$$

Фазовый модулятор (ФМ-2) модулирует несущее колебание  $u_0(t) = U_0 \cos \omega_0 t$  по фазе. Для двухпозиционного ( $m = 2$ ) сигнала можно записать модулированный сигнал  $u_i(t)$  в виде

$$u_i(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + \pi b_i) = \begin{cases} U_0 \cos \omega_0 t, & i = 0; \\ -U_0 \cos \omega_0 t, & i = 1. \end{cases} \quad (27)$$

Или

$$\begin{aligned} u_0(t) &= U_0 \cos \omega_0 t \text{ при передаче «0»,} \\ u_1(t) &= -U_0 \cos \omega_0 t \text{ при передаче «1».} \end{aligned}$$

В качестве демодулятора используется оптимальный когерентный приёмник, работающий по правилу максимума функции правдоподобия

(решающее правило по критерию Котельникова при  $p_1 = p_0 = 1/2$ ):

$$\hat{b}_i = \arg \max_{b_j} w(z(t) | b_j).$$

Алгоритм работы приёмника в этом случае имеет вид

$$\int_0^T (z(t) - s_0(t))^2 dt \stackrel{\hat{0}}{<} \int_0^T (z(t) - s_1(t))^2 dt \stackrel{\hat{1}}{>}$$

После преобразований (проделать самостоятельно) можно привести алгоритм к следующему виду:

$$\int_0^T z(t) \cos \omega_0 t dt \stackrel{\hat{0}}{>} 0. \quad (28)$$

Этот алгоритм легко реализовать с использованием одного фильтра, согласованного с сигналом  $\cos \omega_0 t$ . Схема такого демодулятора приведена на рис. 6.

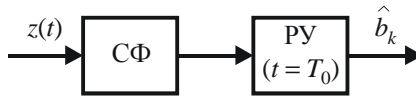


Рис. 6. Схема демодулятора сигнала ФМ-2 на согласованном фильтре

Вероятность ошибки при когерентном приёме сигналов ФМ-2 вычисляется по формуле:

$$p = P(\text{ош}) = Q(\sqrt{2h^2}) = Q\left(\sqrt{2FT_0 \cdot \frac{P_c}{P_{\text{ш}}}}\right) = Q\left(\sqrt{2 \frac{P_c}{P_{\text{ш}}}}\right).$$

Здесь  $Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2/2} dt$  – функция ошибок (см., например, [5]).

Некоторые значения функции  $Q(x)$  приведены в табл. П.2 данных методических указаний. Более полную таблицу значений  $Q(x)$  можно найти в [6].

Зависимость  $P(\text{ош}) = f(P_c/P_{\text{ш}})$  рекомендуется свести в таблицу следующего вида (табл. 2.):

Таблица 2

$P_c/P_{\text{ш}}$	2	4	6	8	10	12	14	16
$P(\text{ош})$								

Дисперсия погрешности оценки параметра  $\lambda$   $D(\hat{\lambda} | \lambda)$  складывается из дисперсии шума квантования и дисперсии шума ошибок:

$$D(\hat{\lambda} | \lambda) = D_{\text{кв}} + D_{\text{ош}}.$$

Шум квантования представляет собой случайную величину, равномерно распределённую в интервале  $(-\Delta/2, \Delta/2)$ , где  $\Delta$  – шаг квантования:

$$\Delta = \frac{6\sigma}{2^n}. \quad (29)$$

Дисперсия шума квантования

$$D_{\text{кв}} = \frac{\Delta^2}{12}. \quad (30)$$

ЦАП выполняет операцию, обратную АЦП, т.е. номер  $j$  уровня  $\lambda$

$$j = 2^{n-1}b_{n-1} + 2^{n-2}b_{n-2} + \dots + b_0 = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k b_k.$$

Ошибка в одном из разрядов  $b_k$  приводит к тому, что на выходе АЦП значение  $\hat{j}$  изменяется на величину  $2^k$ , в соответствии с номером  $k$  ошибочного разряда. Дисперсию шума, обусловленного такими ошибками, получим складывая дисперсии шума по разрядам:

$$D_{\text{ош}} = \sum_{k=0}^{n-1} P(\text{ош}) \Delta^2 4^k = \Delta^2 P(\text{ош}) \frac{4^n - 1}{3}.$$

Пренебрегая единицей (т.к.  $4^n \gg 1$ ), получим:

$$D_{\text{ош}} = \frac{\Delta^2 4^n}{3} P(\text{ош}). \quad (31)$$

Тогда общая дисперсия погрешности  $D(\hat{\lambda} | \lambda)$  равна сумме (30) и (31):

$$D(\hat{\lambda} | \lambda) = \frac{\Delta^2}{3} [0,25 + 4^n \cdot P(\text{ош})]. \quad (32)$$

Расчётные значения  $D(\hat{\lambda} | \lambda) = f(P_c/P_{\text{ш}})$  необходимо свести в таблицу, аналогичную табл. 1, а затем построить график полученной зависимости.

Для двухлучевого канала строится такая же таблица. Как и в п. 1, целесообразно дополнить её второй строкой с промежуточными значениями отношения сигнал/шум на выходе корректора  $(P_c/P_{\text{ш}})'$ ,



отличающимися от  $(P_c/P_{ш})$  поправочным множителем  $\eta$ . В формулах для вероятности ошибки  $p$  вместо  $(P_c/P_{ш})$  подставляется  $(P_c/P_{ш})'$ , а графики строятся в зависимости от  $(P_c/P_{ш})$ .

### 3. Передача параметра $\lambda$ в цифровой форме с помехозащитным кодированием, позволяющим исправить одиночные ошибки

Структурная схема системы передачи параметра  $\lambda$  в цифровой форме с помехозащитным кодированием содержит источник сообщения (ИС), аналого-цифровой преобразователь (АЦП), кодер кода Хемминга, модулятор ФМ-2 (Мод), канал связи, источник белого гауссовского шума, демодулятор, декодер, исправляющий одиночные ошибки, и цифро-аналоговый преобразователь (ЦАП) (рис. 7).

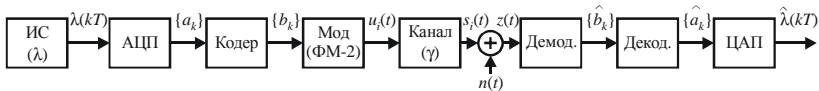


Рис. 7. Структурная схема системы передачи параметра  $\lambda$  в цифровой форме с помехозащитным кодированием

Код, позволяющий исправлять ошибки, вносит избыточность, которую необходимо учесть при расчёте максимально возможного числа разрядов квантователя. Если к информационным добавляются ещё и проверочные символы, то чтобы не выйти за рамки заданного частотно-временного ресурса, необходимо уменьшить число разрядов квантователя на число проверочных символов выбранного кода. В качестве кода выбирается линейный блочный  $(n, k)$  код (Хемминга).

Коды Хемминга получаются по следующему правилу:  $n = 2^r - 1$ , где  $n$  – общее число разрядов,  $r$  – число проверочных разрядов и  $n - r$  – число информационных разрядов. Если для заданного  $FT$  нет подходящего кода Хемминга, то можно воспользоваться укороченным кодом Хемминга, т.е. исключить «лишнюю» часть информационных символов.

Вероятность ошибочного декодирования блока складывается из вероятностей того, что в кодовой комбинации будет более одной ошибки. Вероятность появления  $m$  ошибок в комбинации длиной  $n$  вычисляется по биномиальной формуле Бернулли:

$$P_n(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}.$$

Здесь  $p$  – вероятность ошибки демодулятора.

Вероятность ошибочного декодирования

$$P(\text{ош. дек}) = \sum_{m=2}^n C_n^m p^m (1-p)^{n-m}. \quad (33)$$

В ошибочно декодированной последовательности каждый бит ненадёжен, т.е. ошибочен с вероятностью  $1/2$ . Отсюда вероятность ошибочного приёма любого бита на выходе декодера

$$P(\text{ош}) \approx \frac{1}{2} P(\text{ош. дек}). \quad (34)$$

Дисперсия погрешности  $D(\hat{\lambda} | \lambda)$  находится как и в предыдущем пункте (с учётом того, что число разрядов квантователя теперь уменьшилось на величину  $r$ ). Результаты расчёта  $D(\hat{\lambda} | \lambda) = f(P_c/P_{\text{ш}})$  сводятся в таблицу, аналогичную табл. 1. По таблице строится график.

Для двухлучевого канала строится подобная таблица. Как и в пп. 1 и 2, целесообразно дополнить её второй строкой с промежуточными значениями отношения сигнал/шум на выходе корректора  $(P_c/P_{\text{ш}})'$ , отличающимися от  $(P_c/P_{\text{ш}})$  поправочным множителем  $\eta$ . В формулах для вероятности ошибки  $p$  вместо  $(P_c/P_{\text{ш}})$  подставляется  $(P_c/P_{\text{ш}})'$ , а графики строятся в зависимости от  $(P_c/P_{\text{ш}})$ .

### Литература

1. **Прокис Дж.** Цифровая связь / Пер. с англ. под ред. Д.Д.Кловского. – М.: Радио и связь, 2000. – 800 с.
2. **Кловский Д.Д.** Теория электрической связи. М.: Радиотехника, 2009. – 648 с.
3. **Теория электрической связи: Учебник для вузов / А.Г. Зюко, Д.Д. Кловский, В.И. Коржик, М.В. Назаров; Под ред. Д.Д. Кловского.** – М.: Радио и связь, 1998. – 432 с.
4. **Тихонов В.И., Харисов В.Н.** Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем: Учеб. пособие для вузов. – М.: Радио и связь, 1991. – 608 с.
5. **Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.** Справочник по математике. – М.: Наука, 1980. – 976 с.
6. [http://tors.psuti.ru/metod\\_web/q.pdf](http://tors.psuti.ru/metod_web/q.pdf)

## Приложение

Таблица П.1. Варианты заданий

№ вар.	$F$ , кгЦ	$T$ , мс	$D(\lambda)$	$u_0(t)$	Вид мод.	$\dot{\gamma}_1$	$\dot{\gamma}_2$	Примечание
1	1,2	10	1	$U_0 \cos \omega_0 t$	ЧМ	1	0,5	
2	0,25	48	2	$U \cos \omega_0 t$	АМ	0,5	1	
3	2,0	5	3	$Ue^{-br^2}$	АМ	1	-0,5	$b = 5 \cdot 10^5 \text{ 1/c}^2$
4	4,0	3	4	$U_0 e^{-br^2}$	ВМ	-0,5	1	$b = 2 \cdot 10^6 \text{ 1/c}^2$
5	3,0	4	5	$U \cdot \text{сн}(\omega_0 t)$	АМ	1	0,4	$\text{сн}(\cdot) = \text{sign}[\cos(\cdot)]$
6	1,0	15	6	$U \cdot \text{сп}(\omega_0 t)$	АМ	0,4	1	$\text{сп}(\cdot) = \text{sign}[\sin(\cdot)]$
7	0,3	50	7	$U_0 e^{-br^2}$	ВМ	1	-0,4	$b = 2 \cdot 10^4 \text{ 1/c}^2$
8	2,5	4	8	$Ue^{-br^2}$	АМ	-0,4	1	$b = 2 \cdot 10^6 \text{ 1/c}^2$
9	5,0	3	9	$U \sin \omega_0 t$	АМ	1	0,6	
10	4,0	3,5	10	$U_0 \sin \omega_0 t$	ЧМ	0,6	1	
11	2,0	8	11	$U_0 \cos \omega_0 t$	ЧМ	1	-0,6	
12	0,5	30	12	$U \cos \omega_0 t$	АМ	-0,6	1	
13	6,0	2	13	$U_0 e^{-br^2}$	ВМ	1	0,3	$b = 2 \cdot 10^8 \text{ 1/c}^2$
14	1,5	12	14	$U_0 e^{-br^2}$	ВМ	0,3	1	$b = 2 \cdot 10^5 \text{ 1/c}^2$
15	8,0	2	15	$U \sin \omega_0 t$	АМ	1	-0,3	
16	6,0	2,5	16	$U_0 \sin \omega_0 t$	ЧМ	-0,3	1	
17	1,2	10	17	$U \cdot \text{сн}(\omega_0 t)$	АМ	1	0,7	$\text{сн}(\cdot) = \text{sign}[\cos(\cdot)]$
18	0,25	48	18	$U \cdot \text{сп}(\omega_0 t)$	АМ	0,7	1	$\text{сп}(\cdot) = \text{sign}[\sin(\cdot)]$
19	2,0	5	19	$U_0 e^{-br^2}$	ВМ	1	-0,7	$b = 1 \cdot 10^6 \text{ 1/c}^2$
20	4,0	3	20	$Ue^{-br^2}$	АМ	-0,7	1	$b = 3 \cdot 10^6 \text{ 1/c}^2$

Таблица П.2. Некоторые значения функции  $Q(x)$

$x$	$Q(x)$	$x$	$Q(x)$	$x$	$Q(x)$	$x$	$Q(x)$
1,41	$7,86 \cdot 10^{-2}$	3,16	$7,83 \cdot 10^{-4}$	4,24	$1,11 \cdot 10^{-5}$	5,10	$1,71 \cdot 10^{-7}$
2,00	$2,28 \cdot 10^{-2}$	3,46	$2,66 \cdot 10^{-4}$	4,47	$3,88 \cdot 10^{-6}$	5,29	$6,08 \cdot 10^{-8}$
2,45	$7,15 \cdot 10^{-3}$	3,74	$9,14 \cdot 10^{-5}$	4,69	$1,36 \cdot 10^{-6}$	5,48	$2,17 \cdot 10^{-8}$
2,83	$2,34 \cdot 10^{-3}$	4,00	$3,17 \cdot 10^{-5}$	4,90	$4,82 \cdot 10^{-7}$	5,66	$7,73 \cdot 10^{-9}$

Для  $x > 5$  можно пользоваться приближённой формулой:

$$Q(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot x} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

См. также [http://tors.psuti.ru/metod\\_web/q.pdf](http://tors.psuti.ru/metod_web/q.pdf) [6]