

**Министерство РФ по связи информатизации  
Поволжская Государственная академия телекоммуникаций  
и информатики**

**Кафедра ТОРС**

**Авторы  
Михайлов В. И., Членова Е. Д.**

**Расчёт электрических LC- фильтров по рабочим параметрам  
( электронная версия )**

**Учебное пособие к курсовой работе  
по дисциплине «Основы теории цепей»**

**Самара, 2010**

УДК 621.372.

Михайлов В. И., Членова Е. Д.

Расчёт электрических фильтров по рабочим параметрам: Учебное пособие / Поволжская государственная академия телекоммуникации и информатики. Самара, 2008.

Учебное пособие к курсовой работе по 3-й части курса ОТЦ «Расчёт электрических фильтров по рабочим параметрам» содержит указания по проектированию электрических фильтров различных типов. Рассмотрены вопросы аппроксимации по Баттерворту и Чебышеву, вопросы реализации схем по Дарлингтону и Попову. Даны пояснения для расчёта рабочего ослабления и фазы фильтров нижних, верхних частот и полосовых. В дополнении данная разработка содержит пояснения по выполнению расчётов частотных и временных характеристик лестничных фильтров на ЭВМ с применением программы MathCAD. Методические указания предназначены для использования студентами дневной и заочной форм обучения специальностей 201000, 200900, 201100, 200700, 550400.

## Оглавление

Авторы.....	1
Расчёт электрических LC- фильтров по рабочим параметрам.....	1
( электронная версия ).....	1
Оглавление.....	2
Введение.....	3
1.Основные понятия и определения.....	3
2. Синтез электрических фильтров.....	5
2.1. Постановка задачи синтеза электрического фильтра.....	5
2.1.Переход к ФНЧ прототипу и нормирование по частоте.....	6
3.Аппроксимация частотной характеристики рабочего ослабления фильтра 7	
3.1.Аппроксимация по Баттерворту.....	8
3.2.Аппроксимация по Чебышеву.....	12
4. Реализация схемы фильтра ФНЧ.....	17
4.1.Реализация по Дарлингтону.....	17
4.2.Ускоренный метод реализации симметричных фильтров (n-нечетное).....	22
4.3.Ускоренный метод реализации симметричных фильтров (n-четное).....	29
5. Переход от схемы ФНЧ-прототипа к схеме заданного фильтра 35	
5.1 Переход от нормированной схемы ФНЧ-прототипа к схеме заданного фильтра.....	35
5.2. Денормирование и расчёт элементов.....	36
схемы заданного фильтра.....	36
6. Расчет характеристик спроектированного фильтра.....	39
6.1 Аналитический метод расчета.....	40
характеристик фильтра.....	40
6.2. Расчёт характеристик фильтра на ЭВМ.....	47
7. ПРИЛОЖЕНИЯ.....	55
7.1. ЗАДАНИЕ К КУРСОВОЙ РАБОТЕ ПО ОТЦ-3 “РАСЧЕТ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ФИЛЬТРОВ ПО РАБОЧИМ ПАРАМЕТРАМ”.....	55
7.2. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАНИЕ К КУРСОВОЙ РАБОТЕ ПО ОТЦ-3 (для СНИР).....	56
Литература.....	56

## Введение

В современных системах связи широко применяются электрические фильтры: LC-фильтры, активные RC-фильтры, пьезоэлектрические, пьезокерамические, магнитострикционные, электромеханические, волноводные, цифровые фильтры и др. Причем, LC-фильтры занимают особое положение в силу ряда причин. Во-первых, эти фильтры широко применяются в различных частотных диапазонах. Во-вторых, для LC-фильтров существует хорошо разработанная методика расчета, и синтез большинства перечисленных выше фильтров во многом использует эту методику. Поэтому, не снижая общности, основное внимание в этом методическом руководстве уделяем синтезу LC-фильтров.

Задачей синтеза электрического фильтра является определение схемы фильтра, содержащей минимально возможное число элементов, которая удовлетворяла бы техническим требованиям.

В настоящее время используются две принципиально отличные методики расчета фильтров:

- а) расчет по характеристическим параметрам,
- б) расчет по рабочим параметрам (по рабочему ослаблению или рабочей фазовой постоянной).

Метод синтеза по рабочим параметрам позволяет получить электрический фильтр с меньшим числом элементов, чем расчет характеристическим параметрам. Кроме того, метод расчета по рабочим параметрам является единственно возможным для RC-фильтров и, следовательно, является более общим методом. Следует отметить, что расчет по рабочим параметрам требует большей точности вычислений, что вызывает необходимость применения ЭВМ.

В данном методическом руководстве рассматривается проектирование двусторонне нагруженных на активные сопротивления лестничных реактивных фильтров. Требования к фильтру задаются частотной зависимостью рабочего ослабления, а синтез осуществляется по рабочим параметрам.

В

### [Оглавление](#)

## 1. Основные понятия и определения

Рассмотрим реактивный двусторонне нагруженный фильтр, показанный на рис.1.1а. Рабочая постоянная передачи  $\underline{\Gamma}$  этого фильтра (в соответствии с обозначениями рис.1.1а, б) определяется выражением:

$$\underline{\Gamma} = \frac{1}{2} \ln \frac{\underline{U}_0 \underline{I}_0}{\underline{U}_2 \underline{I}_2} = A + jB \quad (1.1)$$

где  $A$  — рабочее ослабление фильтра,

$B$  — его рабочая фаза.

Рабочее ослабление согласно (1.1) можно представить следующими

формулами:

$$A = \frac{1}{2} \ln \frac{U_0 I_0}{U_2 I_2} [Hn], \quad A = 10 \lg \frac{U_0 I_0}{U_2 I_2} [дБ] \quad (1.2)$$

$$A = 10 \lg \frac{P_M}{P_2}, \quad (1.3)$$

где  $P_M = U_0 I_0 = E^2 / 4R_1$  - максимальная активная мощность источника с внутренним сопротивлением  $R_1$  (рис.1.1б),  $P_2 = U_2 I_2 = U_2^2 / R_2$  - активная мощность, передаваемая от источника в нагрузку  $R_2$ , подключенную через фильтр (рис.1.1а).

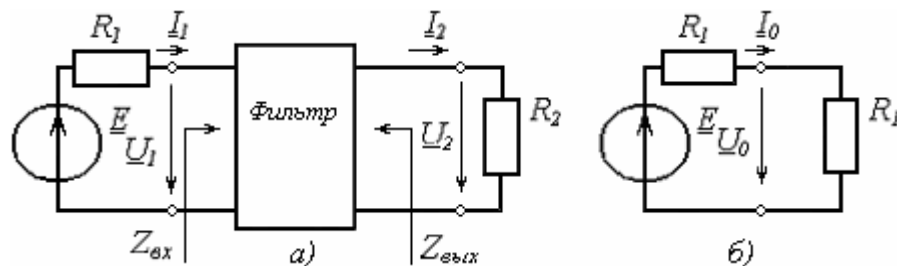


Рис.1.1. Двусторонне нагруженный фильтр а), схема для передачи максимальной мощности в нагрузку б).

Мощность  $P_2$  меньше  $P_M$  на величину мощности  $P_{отр.}$ , отраженной от входа фильтра из-за несогласованности входного сопротивления  $Z_{вх}$  фильтра с внутренним сопротивлением генератора, т.е.  $P_M = P_2 + P_{отр.}$  (1.4)

Введя понятие коэффициента отражения (несогласованности)  $\underline{\rho}$ :

$$\rho = |\underline{\rho}| = \sqrt{\frac{P_{отр.}}{P_M}} = \left| \frac{R_1 - Z_{вх}}{R_1 + Z_{вх}} \right|, \quad \underline{\rho} = \rho(j\omega) = \frac{h(j\omega)}{V(j\omega)}, \quad (1.5)$$

передаточной функции  $\underline{T}$ :

$$T = |\underline{T}| = \sqrt{\frac{P_2}{P_M}} = \left| \frac{2U_2}{E} \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} \right|, \quad \underline{T} = T(j\omega) = \frac{W(j\omega)}{V(j\omega)}, \quad (1.6)$$

и функции фильтрации  $\underline{\varphi}$ :

$$\varphi = |\underline{\varphi}| = \sqrt{\frac{P_{отр.}}{P_2}}, \quad (1.7)$$

получим из (1.4) соотношения:

$$\frac{P_2}{P_M} = \frac{P_{отр.}}{P_M} = 1 - \varphi^2, \quad \frac{P_M}{P_2} = 1 + \frac{P_{отр.}}{P_2}. \quad (1.8)$$

Эти соотношения позволяют установить связь между  $T$ ,  $\rho$  и  $\varphi$ .

$$I = |T|^2 + |\rho|^2, \quad \frac{I}{|T|^2} = 1 + |\varphi|^2, \quad (1.9)$$

откуда:

$$|T|^2 = \frac{I}{1 + |\varphi|^2} \quad (1.10)$$

и с учетом (1.3):

$$A = 20 \lg \frac{I}{|T|^2} = 10 \lg [1 + |\varphi|^2]. \quad (1.11)$$

В

[Оглавление](#)

## 2. Синтез электрических фильтров

### 2.1. Постановка задачи синтеза электрического фильтра

Синтез электрического фильтра по рабочему ослаблению состоит из двух этапов: аппроксимации и реализации.

На этапе аппроксимации необходимо получить аналитическое выражение рабочей передаточной функции  $T(p)$  фильтра, удовлетворяющей условиям физической реализуемости (УФР) [1,2] по заданным требованиям.

На этапе реализации по найденной рабочей передаточной функции определяется схема фильтра и величины составляющих ее элементов.

В синтезе фильтров используется преобразование частот и нормирование сопротивлений и частот [7].

Использование преобразования частоты позволяет свести расчет всех классов фильтров к расчету фильтра нижних частот (ФНЧ). Поэтому синтез любого фильтра можно производить в следующем порядке: сначала преобразовать заданную характеристику рабочего ослабления в низкочастотную, потом синтезировать ФНЧ, далее обратным частотным преобразованием перейти от элементов схемы ФНЧ к элементам (или комбинациям элементов) заданного фильтра.

Нормирование заключается в том, что вместо абсолютных значений частот и сопротивлений элементов цепи ФНЧ берутся их относительные величины. Нормирование осуществляем по отношению к нагрузочному сопротивлению и граничной частоте полосы пропускания для ФНЧ и ФВЧ (или среднегеометрической полосы пропускания для ПФ).

Поэтому расчет любого фильтра начинается с расчета ФНЧ, нагруженного на нормированное сопротивление и с нормированной граничной частотой полосы пропускания, равной единице.

Техническими требованиями к фильтру являются (см. рис.2.1, 2.3):

- граничные частоты полосы пропускания (ПП)  $f_2$  или  $f_2, f'_2$ ;

- граничные частоты полосы не пропускания (ПН)  $f_3$  или  $f_3, f_3'$ ;
- максимально-допустимое значение рабочего ослабления в ПП  $\Delta A$  [дБ] или коэффициент отражения  $\rho[\%]$ , которые связаны соотношением:

$$\Delta A = 10 \lg \frac{1}{1 - (\rho\%/100)^2} \quad (2.1);$$

- минимально-допустимое значение рабочего ослабления в ПН  $A_{min}$  [дБ];
- сопротивление нагрузки (справа)  $R_H = R_2$  [Ом].

Между полосами пропускания и не пропускания находится переходная область, к которой никаких требований не предъявляется. Однако в этой полосе происходит нарастание рабочего ослабления от  $\Delta A$  до требуемой величины  $A_{min}$ . Очевидно, что при заданных  $\Delta A$  и  $A_{min}$ , чем уже эта полоса, тем больше должна быть крутизна кривой ослабления фильтра в переходной полосе и тем сложнее должна быть схема фильтра. И, наоборот, чем шире переходная полоса, тем проще фильтр.

В курсовой работе требуется выполнить синтез электрического фильтра. Синтез фильтра производится в следующем порядке:

Переход к ФНЧ-прототипу и нормирование частот;

Аппроксимация рабочей передаточной функции  $T(p)$  и характеристики рабочего ослабления фильтра  $A(\omega)$

Реализация схемы ФНЧ (ФНЧ-прототипа);

Переход от схемы ФНЧ к схеме заданного фильтра и денормирование ее элементов;

Расчет и построение денормированных частотных характеристик рабочего ослабления  $A(f)$  и рабочей фазы  $B(f)$  фильтра.

В

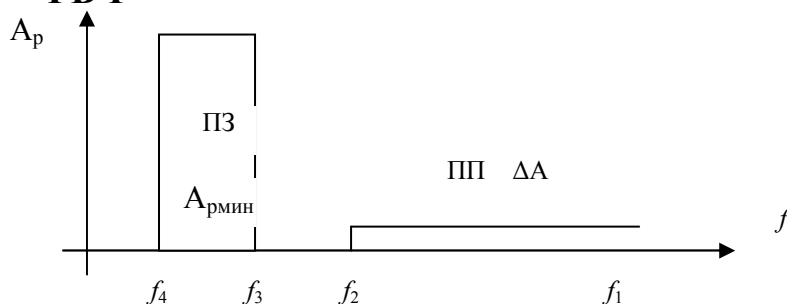
[Оглавление](#)

## 2.1. Переход к ФНЧ прототипу и нормирование по частоте

**ФНЧ.** Нормирование производим относительно граничной частоты полосы пропускания  $f_2$ ,

$$\Omega = f/f_2 = \omega/\omega_2. \quad \Omega_2=1 \quad \Omega_3=f_3/f_2 > 1.$$

**ФВЧ**



Обычно  $f_1=\infty$  и  $f_4=0$ .

Для ФНЧ - прототипа:  $f_{p2} = f_3$ ,  $f_{p3} = f_2$ ,

$$\Omega_{p(3)} = \frac{f_{p(3)}}{f_{p2}} = \frac{f_2}{f_3} > 1. \quad (2.3)$$

Определим  $\Omega_{p2}$  и  $\Omega_{p3}$  - нормированные граничные частоты ФНЧ - прототипа для ПФ с симметричными характеристиками рабочего ослабления:

$$f_0 = \sqrt{f_2 f_2'} = \sqrt{f_3 f_3'}. \quad (2.4)$$

Тогда:

$$\Omega_{p2} = \frac{1}{a} \left( \Omega_2 - \frac{1}{\Omega_2} \right), \quad \Omega_{p3} = \frac{1}{a} \left( \Omega_3 - \frac{1}{\Omega_3} \right), \quad (2.5)$$

$$\text{где } \Omega_2 = f_2/f_0, \quad \Omega_3 = f_3/f_0 \quad (2.6)$$

$$\text{При } a = (f_2 - f_2')/f_0 \quad \Omega_{p2} = 1, \quad \text{а } \Omega_{p3} = \frac{f_3 - f_3'}{f_2 - f_2'}. \quad (2.7)$$

Отсутствующую в задании частоту  $f_3$  и  $f_3'$  определяем из выражения (2.4):

$$f_3 = f_0^2 / f_3' \quad \text{или} \quad f_3' = f_0^2 / f_3$$

Далее производим расчет нормированного ФНЧ-прототипа.

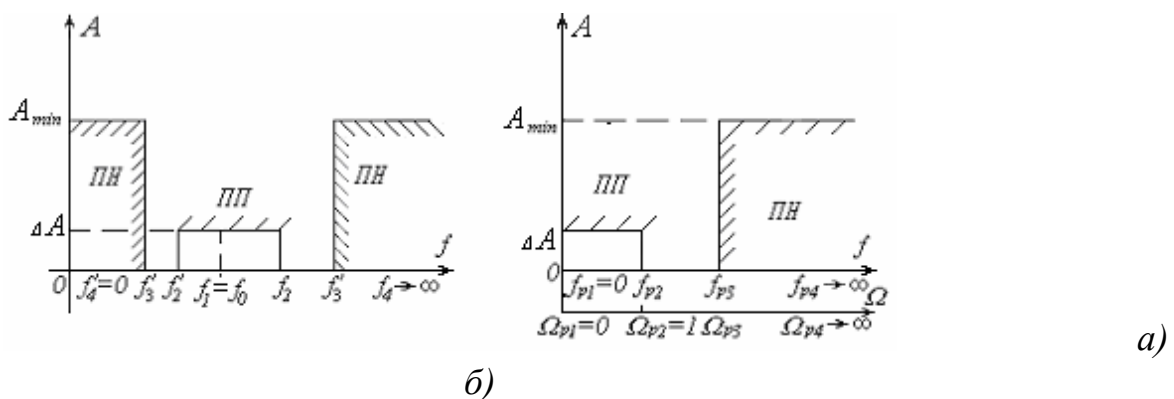


Рис.2.3 Характеристика технических требований полосового фильтра а), характеристика технических требований ФНЧ – прототипа б).

В

[Оглавление](#)

### 3.Аппроксимация частотной характеристики рабочего ослабления фильтра

На данном этапе по заданным техническим требованиям к ФНЧ (ФНЧ - прототипу) (рис.2.1, 2.2 б, 2.3 б) необходимо получить математические

выражения передаточной функции  $T(p)$  и рабочего ослабления фильтра  $A(\Omega)$ .

Известно, что частотные свойства фильтра определяются функцией фильтрации  $\varphi$  (1.11):

$$A = 10 \lg \left( 1 + |\varphi|^2 \right)$$

Следовательно, задача сводится к выбору аналитического выражения этой функции и расчету ее коэффициентов. В качестве аппроксимирующих принято использовать полиномиальные функции, среди которых наиболее широкое применение имеют полиномы Баттерворта и Чебышева.

В

[Оглавление](#)

### 3.1. Аппроксимация по Баттерворту

При выборе полинома Баттерворта в качестве аппроксимирующего функция фильтрации определяется выражением:

$$|\varphi(j\omega)|^2 = \varepsilon^2 B_n^2(\Omega), \quad (3.1)$$

где  $\varepsilon$  - коэффициент неравномерности рабочего ослабления в полосе пропускания:

$$\varepsilon = \sqrt{10^{0,1AA} - 1}, \quad (3.2)$$

$B_n(\Omega) = \Omega^n$  - полином Баттерворта,

$n$  - порядок полинома Баттерворта, определяемый техническими требованиями к фильтру и являющийся порядком фильтра:

$$n \geq \frac{\lg \frac{10^{0,1A_{min}} - 1}{\varepsilon^2}}{2 \lg \Omega_3} \quad (3.3)$$

Таким образом, с использованием аппроксимации по Баттерворту имеем функцию рабочего ослабления фильтра в виде:

$$A = 10 \lg \left( 1 + \varepsilon^2 \Omega^{2n} \right), \quad (3.4)$$

которой соответствуют графики, показанные на рис.3.1.

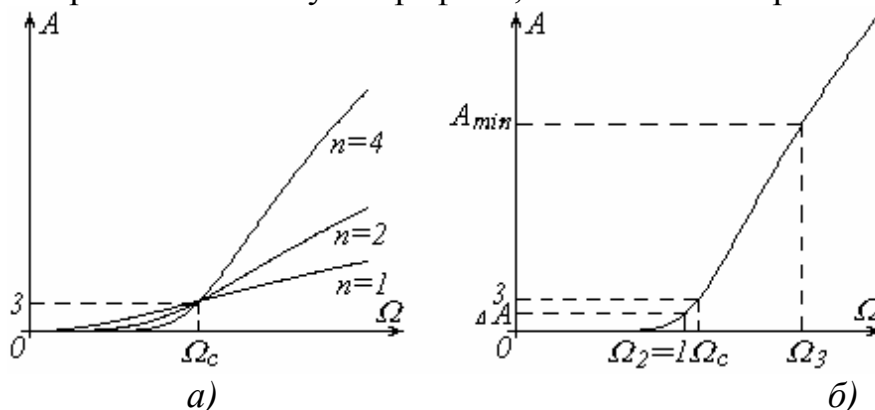




Рис.3.1 Характеристики рабочего ослабления фильтров Баттерворта при различном порядке *a*), характеристика фильтра Баттерворта с указанием частот  $\Omega_2$ ,  $\Omega_c$ , и  $\Omega_3$  б).

Аппроксимация по Баттерворту получила название монотонной, или максимально гладкой. Из рис.3.1 видно, что такая аппроксимация дает хорошее приближение для идеализированной характеристики ФНЧ в области  $\Omega = 0$ , но плохо воспроизводит нарастание в области  $\Omega \geq 1$ . Следует отметить, что для фильтров Баттерворта на частоте среза:

$$\Omega_c = 1 / \sqrt[2n]{10^{0,1\Delta A} - 1}$$

рабочее ослабление всегда равно 3 дБ, а значения  $\Delta A$  и порядок  $n$  фильтра определяют ее расположение в переходной области (если  $\Delta A$  близко к 3 дБ, то  $\Omega_c$  близка к  $\Omega_2 = 1$ , если же  $\Delta A \ll 3$  дБ, то  $\Omega_c$  близка к  $\Omega_3$ ).

Аналогичными характеристиками, но с меньшим нарастанием рабочего ослабления  $A(\omega)$  имеют фильтры Гаусса (Бесселя) и фильтры с линейной фазовой характеристикой (фазовая погрешность составляет  $0,05^\circ$ ) (см. раздел 7 данной методической разработки).

Перейдем теперь к формированию нормированной рабочей передаточной функции  $T(p)$  по Баттерворту. На основании (1.10), (3.1) имеем:

$$|T(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \Omega^{2n}} \quad (3.5)$$

где  $|T(j\Omega)|^2 = T(j\Omega)T(-j\Omega) = T(p)T(-p)|_{p=j\Omega}$

С учетом (3.5):

$$T(p)T(-p) = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \left(\frac{p}{j}\right)^{2n}} = \frac{1}{\varepsilon^2 V(p)V(-p)}$$

Корни уравнения  $1 + \varepsilon^2 \left(\frac{p}{j}\right)^{2n} = 0$ , лежащие в левой полуплоскости, принадлежат  $V(p)$ , являющемуся полиномом Гурвица. Следовательно,

функция:  $T(p) = \frac{1/\varepsilon}{V(p)}$  удовлетворяет условиям физической реализуемости.

Эти корни определяются соотношениями:

$$p_k = \frac{1}{\sqrt[n]{\varepsilon}} \left( -\sin \frac{2k-1}{2n} \pi + j \cos \frac{2k-1}{2n} \pi \right) \quad (3.6)$$

$$k = 1 \div n$$

и позволяют найти искомую передаточную функцию  $T(p)$  в виде:

$$T(p) = \frac{1/\varepsilon}{(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)} = \frac{1/\varepsilon}{V(p)}. \quad (3.7)$$

Рабочее ослабление нетрудно теперь получить через передаточную функцию  $T(j\Omega) = T(p)|_{p=j\Omega}$  на основании (1.11):

$$A(\Omega) = 20 \lg \frac{1}{|T(j\Omega)|} \quad (3.8)$$

**Пример 3.1** Выполнить аппроксимацию по Баттерворту рабочей передаточной функции  $T(p)$  и функции рабочего ослабления  $A(\Omega)$  для ФНЧ со следующими требованиями:

$$\Delta A = 2 \text{ дБ}, f_2 = 4 \text{ кГц}, f_3 = 8 \text{ кГц}, A_{\min} = 15 \text{ дБ}, R_2 = 800 \text{ Ом}.$$

При расчёте требуется высокая точность (не менее 4-5 значащих цифр).

1. Произведем нормирование по частоте (2.2)

$$\Omega = \frac{f}{f_2}, \quad \Omega_2 = 1, \quad \Omega_3 = 2$$

2. Получим квадрат модуля функции фильтрации (3.1), (3.2), (3.3):

$$|\varphi(j\Omega)|^2 = \varepsilon^2 \Omega^{2n} \quad \text{где } \varepsilon = \sqrt{10^{0,1 \cdot 2} - 1} = 0,764,$$

$$n_B \geq \frac{\lg \frac{10^{0,1 \cdot 15} - 1}{(0,764)^2}}{2 \lg 2} \geq 2,86,$$

округляем  $n_B$  до ближайшего большего целого числа:  $n=3$  и тогда:

$$|\varphi(j\Omega)|^2 = (0,764)^2 \Omega^6,$$

$$|T(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (0,764)^2 \Omega^6} \quad \text{по (3.5).}$$

3. Определим корни полинома знаменателя  $V(p)$  функции  $T(p)$ , лежащие в левой полуплоскости (3.6):

$$p_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{0,764}} \left( -\sin \frac{\pi}{6} + j \cos \frac{\pi}{6} \right) = -0,547 + j0,947;$$

$$p_2 = -1,094; \quad p_3 = -0,547 - j0,947.$$

4. Далее формируем искомые функции  $T(p)$  (3.7) и  $A(\Omega)$  (3.8)

$$= \frac{1/\varepsilon}{(p-p_1)(p-p_2)(p-p_3)} = \frac{1/0,764}{(p+1,094)(p^2+1,094p+1,196)} =$$

$$T(p) = \frac{1/\varepsilon}{V(p)} = \frac{1/0,764}{p^3 + 2,188p^2 + 2,392p + 1,038},$$

$$A(\Omega) = 20 \lg(0,764 | -j\Omega^3 - 2,188\Omega^2 + j2,392\Omega + 1,038 |) =$$

$$= 20 \lg(0,764 \times \sqrt{(1,308 - 2,188\Omega^2)^2 + (2,392\Omega - \Omega^3)^2})$$

Выполним проверку

аппроксимированной функции  $A(\Omega)$  на частотах  $\Omega_1 = 0, \Omega_2 = 1$  в полосе пропускания и на частоте  $\Omega_3 = 2$  в полосе непропускания. Согласно рис.3.1б на

этих частотах рабочее ослабление  $A$  должно быть равно нулю и не превышать  $\Delta A = 2$  дБ, а на частоте равной  $\Omega_3 = 2$  и более должно быть не менее  $A_{min} = 15$  дБ соответственно. Убедимся в этом:

а)  $\Omega_1 = 0 \quad A(0) = 20 \lg 0,764 \cdot 1,308 = -0,0059 \approx 0;$

б)  $\Omega_2 = 1 \quad A(1) = 20 \lg 0,764 \cdot \sqrt{(1,308 - 2,188)^2 + 1,992^2} = 1,995$ ,

что  $\approx \Delta A = 2$  дБ:

$$A(2) = 20 \lg 0,764 \cdot \sqrt{(1,308 - 2,188 \cdot 4)^2 + (2,392 - 4)^2} \cdot 4 =$$

в)  $\Omega_3 = 2 = 15,8412$

что  $> A_{min} = 15$  дБ.

**Пример 3.2** Выполнить аппроксимацию по Баттерворту рабочей передаточной функции  $T(p)$  и функции рабочего ослабления  $A(\Omega)$  для ФНЧ - прототипа заданного ФВЧ со следующими техническими требованиями:

$f_2 = 20$  кГц,  $f_3 = 10$  кГц,  $A_{min} = 20$  дБ  $\rho = 43,3\%$ ,  $R_2 = 800$  Ом.

1. Перейдем к ФНЧ - прототипу и выполним нормирование по частоте (рис.3.2). С использованием (2.3) определим:

$$f_{p2} = f_3 = 10 \text{ кГц}, \quad f_{p3} = f_2 = 20 \text{ кГц},$$

$$\Omega_{p1} = \frac{f_{p1}}{f_{p2}} = 0, \quad \Omega_{p2} = \frac{f_{p2}}{f_{p2}} = 1, \quad \Omega_{p3} = \frac{f_{p3}}{f_{p2}} = 2,$$

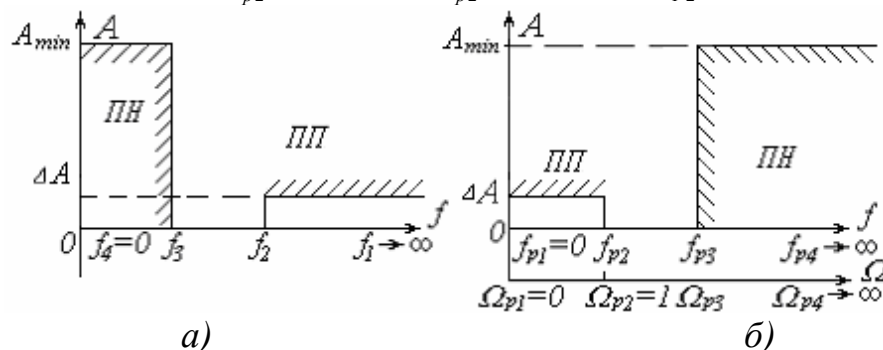


Рис.3.2 Характеристика технических требований фильтра верхних частот а), характеристика фильтра прототипа нижних частот б).

2. Найдем квадрат модуля функции фильтрации (3.1), (3.2), (3.3):

$$|\varphi(j\Omega_p)|^2 = \varepsilon^2 \Omega_p^{2n}, \quad \text{где } \varepsilon = \sqrt{10^{0,1 \cdot \Delta A} - 1},$$

$$\Delta A = 10 \lg \frac{1}{1 - \left(\frac{\rho\%}{100}\right)^2} = 0,9 \text{ дБ}, \quad \varepsilon = 0,479,$$

$$n_B \geq 4,36; \quad \underline{n = 5} \text{ и тогда:}$$

$$|\varphi(j\Omega_p)|^2 = 0,479^2 \Omega_p^{10}, \quad |T(j\Omega_p)|^2 = \frac{1}{1 + (0,479)^2 \Omega_p^{10}}$$

3. Определим корни полинома  $V(p)$  и функции  $T(p)$ , лежащие в левой полуплоскости (3.6):

$$p_1 = -0,358 + j1,1018; \quad p_4 = -0,9373 - j0,681;$$

$$p_2 = -0,9373 + j0,681; \quad p_5 = -0,358 + j1,1018$$

$$p_3 = -1,1586$$

4. Далее формируем искомые функции  $T(p)$  (3.7) и  $A(\Omega)$  (3.8):

$$\begin{aligned} T(p) &= \frac{1/\varepsilon}{(p-p_1)(p-p_2)(p-p_3)(p-p_4)(p-p_5)} = \\ &= \frac{1/0,479}{(p^2 + 0,716p + 1,3421)} \times \\ &\times \frac{1}{(p^2 + 1,8746p + 1,3423)(p + 1,1586)} \\ A(\Omega_p) &= 20 \lg 0,479 \sqrt{[(1,3421 - \Omega_p^2)^2 + 0,716^2 \Omega_p^2]} \\ &\times \sqrt{[(1,3424 - \Omega_p^2)^2 + 1,8746^2 \Omega_p^2]} [1,1586^2 + \Omega_p^2]. \end{aligned}$$

5. Выполним проверку аппроксимированной функции  $A(\Omega_p)$  на частотах  $\Omega_{p1} = 0$ ,  $\Omega_{p2} = 1$  и  $\Omega_{p3} = 2$ :

а)  $\Omega_{p1} = 0$

$$A(0) = 20 \lg 0,479 \cdot 1,3421 \cdot 1,3423 \cdot 1,1586 = 20 \lg 0,999 = 0; \quad \text{б) } \Omega_{p2} = 1,$$

$$A(1) = 20 \lg 0,479 \cdot \sqrt{(0,3421^2 + 0,716^2)} \sqrt{(0,3424^2 + 1,8746^2)} \times$$

$$\times \sqrt{(1,1586^2 + 1)} = 20 \lg 1,10855 = 0,896 \cong 0,9 \text{ дБ};$$

в)  $\Omega_{p3} = 2$

$$A(2) = 10 \lg 0,479 \{ [(1,3421 - 4)^2 + 0,716^2 \cdot 4] \times$$

$$\times [(1,3424 - 4)^2 + 1,8746^2 \cdot 4] [1,1586^2 + 4] \} = 26,9 \text{ дБ, что } > A_{\min} =$$

$$= 20 \text{ дБ.}$$

В

[Оглавление](#)

### 3.2. Аппроксимация по Чебышеву

При выборе полинома Чебышева в качестве аппроксимирующей функция фильтрации определяется выражением:

$$|\varphi(j\Omega)|^2 = \varepsilon^2 P_n^2(\Omega), \text{ где } \varepsilon \text{ вычисляется по формуле (3.2),}$$

$$\begin{cases} \cos(n \cdot \arccos \Omega) & -1 < \Omega < 1 \\ \text{ch}(n \cdot \text{Arch } \Omega) & \Omega > 1 \end{cases} \quad (3.10)$$

-полином Чебышева,  $n$  -порядок полинома Чебышева (порядок фильтра):

$$n \geq \frac{\text{Arch}\left(\frac{1}{\varepsilon} \sqrt{10^{0,1 \cdot A_{\min}} - 1}\right)}{\text{Arch}\Omega_3} \quad (3.11)$$

Из (3.10) при  $n=1$  имеем,  $P_1(\Omega) = \Omega$  при  $n=2$   $P_2(\Omega) = 2\Omega^2 - 1$ , а при  $n \geq 3$  можно воспользоваться рекуррентной формулой:

$$P_{n+1}(\Omega) = 2\Omega P_n(\Omega) - P_{n-1}(\Omega). \quad (3.12)$$

Таким образом, при аппроксимации по Чебышеву функция рабочего ослабления имеет вид:  $A = 10 \lg(1 + \varepsilon^2 P_n^2(\Omega))$ , которой соответствует графики, показанные на рис.3.3а. Аппроксимация по Чебышеву получила название равноволновой. Число экстремумов в ПП, включая граничные частоты, зависит от технических требований к фильтру и равно  $n + 1$ .

Подобны зависимостям рис.3.3, а в ПП характеристики  $A(\Omega)$  фильтров Золотарева-Кауэра, имеющие колебательный характер в ПН (рис.3.3б, на котором  $A_s$  - гарантированное рабочее ослабление в ПН для  $\Omega > \Omega_s$ ).

Используя в качестве аппроксимирующих функций дроби Чебышева, можем получить характеристику рабочего ослабления  $A(\Omega)$  фильтра, подобную в ПП характеристике фильтра Баттерворта, а в ПЗ- фильтра Золотарева-Кауэра.

Следует отметить, что аппроксимация по Чебышеву (Золотареву-Кауэру) дает большую крутизну нарастания характеристики рабочего ослабления, чем аппроксимация по Баттерворту (и другим видам, рассмотренным в предыдущем параграфе), проигрывая при этом в линейности фазовой характеристики  $B(\Omega)$  (см. рис. 3.4 а).

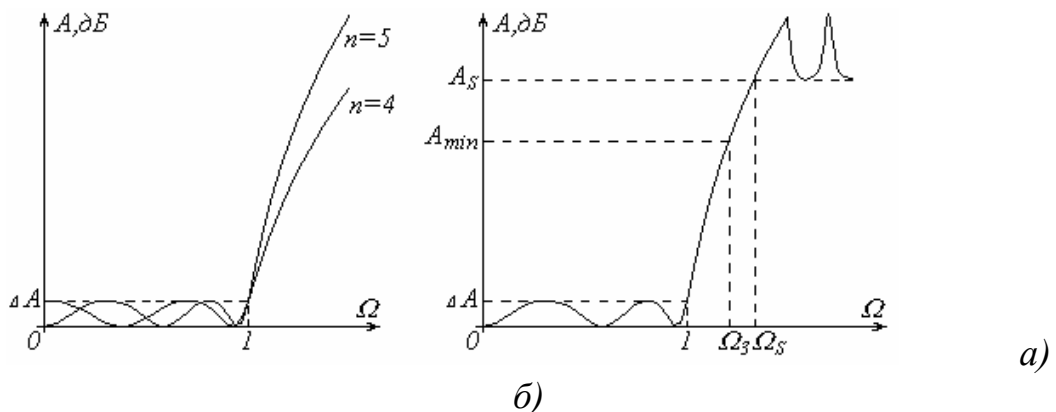


Рис.3.3 Характеристики фильтров Чебышева для различного порядка а), характеристика фильтра Золотарёва – Кауэра б).

Оценку линейности  $B(\Omega)$  удобно производить с помощью группового времени запаздывания (ГВЗ), определяемого первой производной рабочей фазы по частоте:

$$t(\Omega) = \frac{dB(\Omega)}{d\Omega} \quad (3.13)$$

Зависимости ГВЗ  $t(\Omega)$  фильтров Баттерворта (1) и Чебышева (2) показаны на рис.3.4 б. Постоянство  $t(\Omega)$  свидетельствует о линейности  $B(\Omega)$ . Если  $B(\Omega)$  - линейна, то  $t(\Omega) = const$ .

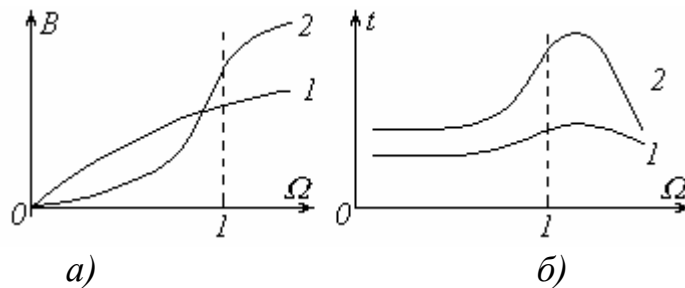


Рис.3.4 Характеристика зависимости рабочей фазы а), характеристики зависимости группового времени запаздывания б).

Для формирования рабочей передаточной функции по Чебышеву поступаем аналогично выше изложенному (см. раздел 3.1):

$T(p) = \frac{1/\varepsilon \cdot 2^{(n-1)}}{V(p)}$ , где  $V(p) = (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)$  определяется корнями уравнения

$$1 + \varepsilon^2 P_n^2\left(\frac{p}{j}\right) = 0$$

, лежащими в левой полуплоскости:

$$p_k = -sh\varphi \cdot \sin \frac{2k-1}{2n} \pi + jch\varphi \cdot \cos \frac{2k-1}{2n} \pi, \quad (3.14)$$

$$k = 1 \div n$$

где  $\varphi = \frac{1}{n} \operatorname{Arsh} \frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{n} \ln \left[ \frac{1}{\varepsilon} + \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + 1} \right]$ .

Таким образом,

$$T(p) = \frac{1/\varepsilon \cdot 2^{(n-1)}}{(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)} = \frac{1/\varepsilon \cdot 2^{(n-1)}}{V(p)} \quad (3.15)$$

и искомые функции  $T(p)$  и  $A(\Omega)$  определяются согласно (3.15) и (3.8) соответственно.

**Пример 3.3** Выполнить аппроксимацию по Чебышеву рабочей передаточной функции  $T(p)$  и функции рабочего ослабления  $A(\Omega_p)$  для ФНЧ - прототипа ПФ со следующими техническими требованиями:  $\Delta A = 1,1$  дБ,  $f_2 = 14,43$  кГц,  $f_3 = 20$  кГц,  $f_3' = 5$  кГц,  $A_{min} = 28$  дБ,  $R_2 = 800$  Ом.

1. Перейдем от технических требований к ПФ к техническим требованиям к ФНЧ-прототипу и выполним нормирование по частоте (3.5).

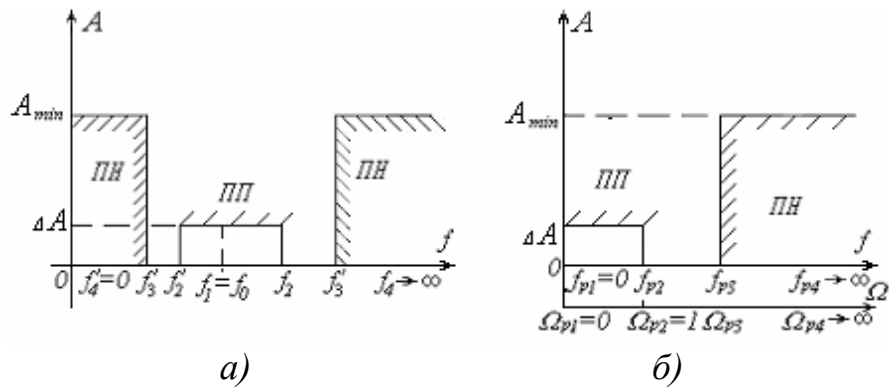


Рис.3.5 Характеристики технических требований полосового фильтра а), характеристики технических требований ФНЧ – прототипа б).

С использованием соотношений (2.4)÷(2.7) найдем:

$$f_0 = \sqrt{f_3 f_3'} = 10 \text{ кГц},$$

$$f_2' = \frac{f_0^2}{f_2} = 6,93 \text{ кГц}, \quad a = \frac{f_2 - f_2'}{f_0} = 0,75$$

$$\Omega_{p2} = \frac{f_{p2}}{f_2} = 1, \quad \Omega_{p3} = \frac{f_{p3}}{f_2} = \frac{f_3 - f_3'}{f_2 - f_2'} = 2$$

2. Получим выражение квадрата модуля функции фильтрации (3.9) для ФНЧ - прототипа:

$$|\varphi(j\Omega_p)|^2 = \varepsilon^2 P_n^2(\Omega_p), \text{ где } \varepsilon = \sqrt{10^{0,1,1} - 1} = 0,537 \text{ по (3.2)}$$

$$n_u \geq \frac{\text{Arch} \frac{1}{0,537} \sqrt{10^{0,1,28} - 1}}{\text{Arch} 2} \geq 3,49 \text{ по (3.11). Округляя в большую сторону, возьмем } n = 4.$$

$$\text{Arch} X = \ln(X + \sqrt{X^2 - 1})$$

Для  $n = 4$  (см. рекуррентную формулу (3.12)):

$$P_4(\Omega_p) = 8\Omega_p^4 - 8\Omega_p^2 + 1, \quad |T(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 P_4^2(\Omega_p)},$$

$$|\varphi(j\Omega)|^2 = 0,537^2 (8\Omega_p^4 - 8\Omega_p^2 + 1)^2.$$

3. Рассчитаем корни полинома знаменателя  $V(p)$  функции  $T(p)$  (3.14).

$$p_k = -sh\varphi \cdot \sin \frac{2k-1}{2n} \pi$$

$$\varphi = \frac{1}{n} \text{Arsh} \frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{4} \ln \left( \frac{1}{0,537} + \sqrt{\frac{1}{0,537^2} + 1} \right) = 0,345$$

$$\operatorname{sh} \varphi = \frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2} = 0,352; \quad \operatorname{ch} \varphi = \frac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{2} = 1,06$$

$$p_1 = -0,1347 + j0,9793$$

$$p_2 = -0,3252 + j0,4056$$

$$p_3 = -0,3252 - j0,4056$$

$$p_4 = -0,1347 - j0,9793$$

4. Окончательно получим с помощью (3.15) и (3.8):

$$\begin{aligned} T(p) &= \frac{1/\varepsilon \cdot 2^{(n-1)}}{(p-p_1)(p-p_2)(p-p_3)(p-p_4)} = \\ &= \frac{1/4,296}{(p^2 + 0,2694p + 0,9772)} \times \frac{1}{(p^2 + 0,6504p + 0,2703)} = \\ &= \frac{1/4,296}{p^4 + 0,9188p^3 + 1,4227p^2 + 0,7084p + 0,2641} \\ A(\Omega_p) &= 20 \lg 4,296 | \Omega_p^4 - j0,9188\Omega_p^3 - 1,4227\Omega_p^2 + \\ &+ j0,7084\Omega_p + 0,2641 | = 20 \lg 4,296 \times \\ &\times \sqrt{(\Omega_p^4 - 1,4227\Omega_p^2 + 0,2641)^2 + (0,7084\Omega_p - 0,9188\Omega_p^3)^2} \end{aligned}$$

5. Проверим полученное выражение  $A(\Omega_p)$  на частотах  $\Omega_{p1} = 0$ ,  $\Omega_{p2} = 1$ , и  $\Omega_{p3} = 2$ . Согласно рис. 3.3 а рабочее ослабление  $A$  на первых двух частотах должно быть равно  $\Delta A = 1,1 \text{ дБ}$ , а на последней  $\geq A_{\min} = 28$ . Убедимся в этом:

а)  $\Omega_{p1} = 0$

$$A(0) = 20 \lg 4,296 \cdot 0,2641 = 1,0978 \approx 1,1 \text{ дБ};$$

б)  $\Omega_{p2} = 1$

$$A(1) = 20 \lg 4,296 \cdot$$

$$\sqrt{(1 - 0,4227 + 0,2641)^2 + (0,7084 - 0,9188)^2} =$$

$$= 1,086 \approx 1,1 \text{ дБ}$$

$$A(2) = 20 \lg 4,296 \cdot$$

$$\sqrt{(2^4 - 1,4227 \cdot 2^2 + 0,2641)^2 + (0,7084 \cdot 2 - 0,9188 \cdot 2^3)^2} =$$

в)  $\Omega_{p3} = 2 = 34,3 \text{ дБ} > A_{\min}$

### 3.3. Алгоритм выполнения этапа аппроксимации

1. Выбираем аппроксимирующую функцию  $|\varphi(j\Omega)|^2$  требуемого вида ((3.1) - по Баттерворту и (3.9) - по Чебышеву).

2. Рассчитываем коэффициент неравномерности  $\varepsilon$  (3.2) и порядок фильтра  $n$  ( $n_B$  по (3.3) и  $n_C$  по (3.11)).



3. Найдём корни  $p_k$  полинома  $V(p)$  знаменателя передаточной функции  $T(p)$  по (3.6) или (3.14).

4. Формируем искомые функции  $T(p)$  и  $A(\Omega)$  по соотношениям (3.7) или (3.15) и (3.8).

В

[Оглавление](#)

#### 4. Реализация схемы фильтра ФНЧ

На данном этапе по найденной ранее функции  $T(\hat{p})$  необходимо получить схему ФНЧ (ФНЧ-прототипа).

Существует несколько способов реализации электрических фильтров: по Дарлингтону, ускоренный метод реализации симметричных и антисимметричных фильтров Попова П. А. [6], реализация по каталогу нормированных схем, параметрическая, структурная реализации и т.д. Первые два способа

реализации основаны на формировании функции  $Z_{BX}(\hat{p})$  по  $T(\hat{p})$ . Тогда получение схемы нагруженного фильтра можно свести к реализации

двухполюсника путем разложения функции  $Z_{BX}(\hat{p})$  в цепную дробь (по Кауэру).

В

[Оглавление](#)

##### 4.1. Реализация по Дарлингтону

Сформируем функцию  $Z_{BX}(\hat{p})$  для схемы 1.1, используя полученную на этапе аппроксимации функцию  $T(\hat{p})$ . Принимая во внимание, что при реализации по Дарлингтону в нормированных схемах  $r_l = 1$ , из (1.5) следует:

$$\rho(\hat{p}) = \frac{1 - Z_{BX}(\hat{p})}{1 + Z_{BX}(\hat{p})},$$

откуда

$$Z_{BX}(\hat{p}) = \frac{1 - \rho(\hat{p})}{1 + \rho(\hat{p})}. \quad (4.1)$$

Для определения коэффициента отражения  $\rho(\hat{p})$  воспользуемся соотношениями (1.9) и (1.10):

$$\begin{aligned} |\rho(j\Omega)|^2 &= 1 - |T(j\Omega)|^2 = 1 - \frac{1}{1 + |\varphi(j\Omega)|^2} = \\ &= \frac{|\varphi(j\Omega)|^2}{1 + |\varphi(j\Omega)|^2} = \rho(\hat{p}) \cdot \rho(\hat{p})|_{p=j\Omega} \end{aligned}$$

Нетрудно показать, что  $\rho(\hat{p})$  определяется при аппроксимации по Баттерворту с учетом (3.1), (3.7):

$$\rho(\hat{p}) = \pm \frac{\varepsilon B_n(\hat{p})}{\varepsilon V(\hat{p})} = \pm \frac{B_n(\hat{p})}{V(\hat{p})} \quad (4.2)$$

и по Чебышеву с учетом (3.9), (3.14):

$$\rho(\hat{p}) = \pm \frac{\varepsilon P_n(\hat{p})}{\varepsilon 2^{n-1} V(\hat{p})} = \pm \frac{P_n(\hat{p})}{2^{n-1} V(\hat{p})} \quad (4.3)$$

Окончательно получим искомую функцию  $Z_{BX}(\hat{p})$  по (4.1) при аппроксимации по Баттерворту:

$$Z_{BX}(\hat{p}) = \frac{1 \mp \frac{B_n(\hat{p})}{V(\hat{p})}}{1 \pm \frac{B_n(\hat{p})}{V(\hat{p})}} = \frac{V(\hat{p}) \mp B_n(\hat{p})}{V(\hat{p}) \pm B_n(\hat{p})} \quad (4.4)$$

и по Чебышеву

$$Z_{BX}(\hat{p}) = \frac{V(\hat{p}) \cdot 2^{n-1} \mp P_n(\hat{p})}{V(\hat{p}) \cdot 2^{n-1} \pm P_n(\hat{p})} \quad (4.5)$$

где  $B_n(\hat{p})$  - полином Баттерворта,  $P_n(\hat{p})$  - полином Чебышева.

**Пример (4.1)** Реализовать методом Дарлингтона схему ФНЧ по полученной в примере 3.1 функции  $T(\hat{p})$ , аппроксимированной по Баттерворту:

$$T(\hat{p}) = \frac{1/\varepsilon}{V(\hat{p})} = \frac{1/0,764}{\hat{p}^3 + 2,188 \hat{p}^2 + 2,392 \hat{p} + 1,308}$$

1. Сформируем коэффициент отражения  $\rho(\hat{p})$  по (4.2):

$$\rho(\hat{p}) = \pm \frac{B_3(\hat{p})}{V(\hat{p})},$$

где  $V(\hat{p}) = \hat{p}^3 + 2,188\hat{p}^2 + 2,392\hat{p} + 1,308$ ;

$B_3(\hat{p}) = \hat{p}^3$  - полином Баттерворта третьего порядка ( $n = 3$ ).

2. Составим  $Z_{BX}(\hat{p})$ , выбирая знак “-“ функции  $\rho(\hat{p})$  по (4.4)

$$Z_{BX}(\hat{p}) = \frac{V(\hat{p}) - B_3(\hat{p})}{V(\hat{p}) + B_3(\hat{p})} = \frac{2\hat{p}^3 + 2,188\hat{p}^2 + 2,392\hat{p} + 1,308}{2,188\hat{p}^2 + 2,392\hat{p} + 1,308}$$

3. Разложим функцию  $Z_{BX}(\hat{p})$  в цепную дробь (по Кауэру).

$$\begin{array}{l} 2\hat{p}^3 + 2,188\hat{p}^2 + 2,392\hat{p} + 1,308 \mid 2,188\hat{p}^2 + 2,392\hat{p} + 1,308 \\ \underline{2\hat{p}^3 + 2,188\hat{p}^2 + 1,196\hat{p}} \qquad \qquad \qquad \mid 0,9147\hat{p} \rightarrow l_1 \\ 2,188\hat{p}^2 + 2,392\hat{p} + 1,308 \mid 1,196\hat{p} + 1,308 \\ \underline{2,188\hat{p}^2 + 2,392\hat{p}} \qquad \qquad \qquad \mid 1,828 \rightarrow c_2 \\ 1,196\hat{p} + 1,308 \mid 1,308 \\ \underline{1,196\hat{p}} \qquad \qquad \qquad \mid 0,9147\hat{p} \rightarrow l_3 \\ 1,308 \mid 1,308 \\ \underline{1,308} \mid 1 \rightarrow r_2 \\ 0 \end{array}$$

Полученной функции  $Z_{BX}(\hat{p})$  соответствует нормированная схема рис.4.1.

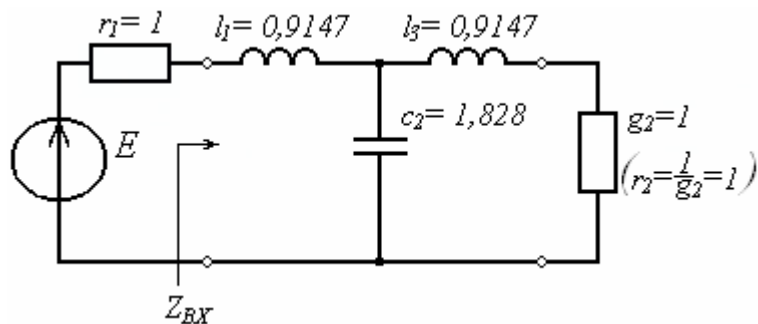


Рис.4.1 Схема ФНЧ – прототипа третьего порядка.

4.Если выбрать знак “+” у функции  $\rho(\hat{p})$ , то получим дуальную схему фильтра, которой соответствует схема рис.4.2

$$Z'_{BX}(\hat{p}) = \frac{V(\hat{p}) - B_3(\hat{p})}{V(\hat{p}) + B_3(\hat{p})} = \frac{2,188 \hat{p}^2 + 2,392 \hat{p} + 1,308}{2 \hat{p}^3 + 2,188 \hat{p}^2 + 2,392 \hat{p} + 1,308}$$

$$Y'_{BX}(\hat{p}) = \frac{1}{Z'_{BX}(\hat{p})} = 0,9147 \hat{p} + \frac{1}{1,828 \hat{p} + \frac{1}{0,9147 \hat{p} + 1}}$$

$$Y'_{BX}(p) = \frac{1}{Z'_{BX}(p)} = \underbrace{0,9147 p}_Y + \frac{1}{\underbrace{1,828 p}_Z + \frac{1}{\underbrace{0,9147 p + 1}_Y \underbrace{g}_g}},$$

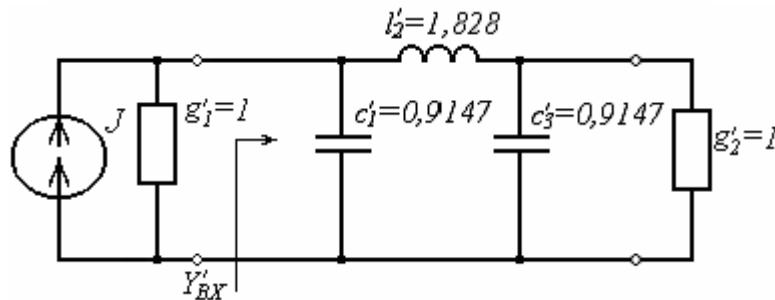


Рис.4.2 Второй вариант реализации схемы ФНЧ – прототипа третьего порядка.

**Пример 4.2.** Реализовать методом Дарлингтона схему ФНЧ - прототипа по полученной в примере 3.3 функции  $T(\hat{p})$ , аппроксимированной по Чебышеву.

$$T(\hat{p}) = \frac{1/\varepsilon \cdot 2^{n-1}}{V(\hat{p})} =$$

$$= \frac{1/4,296}{\hat{p}^4 + 0,9188 \hat{p}^3 + 1,4227 \hat{p}^2 + 0,7081 \hat{p} + 0,2641}$$

1. Сформируем коэффициент отражения  $\rho(\hat{p})$  по (4.3)

$$\rho(\hat{p}) = \pm \frac{P_4(\hat{p})}{2^3 \cdot V(\hat{p})} = \pm \frac{P_4(\hat{p})}{8 \cdot V(\hat{p})},$$

где  $V(\hat{p}) = \hat{p}^4 + 0,9188 \hat{p}^3 + 1,4227 \hat{p}^2 + 0,7081 \hat{p} + 0,2641$ ,

$p_4(\hat{p}) = 8 \hat{p}^4 + 8 \hat{p}^2 + 1$  - полином Чебышева четвертого порядка, который получен по рекуррентной формуле (3.12) при  $(n = 4)$ .

2. Составим  $Z'_{BX}(\hat{p})$ , выбирая знак “ - “ у функции  $\rho(\hat{p})$  по (4.5)

$$Z_{BX}(\hat{p}) = \frac{8V(\hat{p}) + P_4(\hat{p})}{8V(\hat{p}) - P_4(\hat{p})} = \frac{8 \left[ V(\hat{p}) + \frac{1}{8}P_4(\hat{p}) \right]}{8 \left[ V(\hat{p}) - P_4(\hat{p}) \right]} =$$

$$= \frac{2\hat{p}^4 + 0,9188\hat{p}^3 + 0,7081\hat{p} + 0,3891}{0,9188\hat{p}^3 + 0,422\hat{p}^2 + 0,7081\hat{p} + 0,1391}$$

3. Разложим функцию  $Z_{BX}(\hat{p})$  в цепную дробь (по Кауэру) и построим нормированную схему фильтра (рис.4.3).

$$Z_{BX}(\hat{p}) = \underbrace{2,1767\hat{p}}_Z + \frac{1}{\underbrace{1,0433\hat{p}}_Y + \frac{1}{\underbrace{2,9142\hat{p}}_Z + \frac{1}{\underbrace{0,7766\hat{p}}_Y + \frac{1}{\underbrace{2,7973}_Z}}}}$$

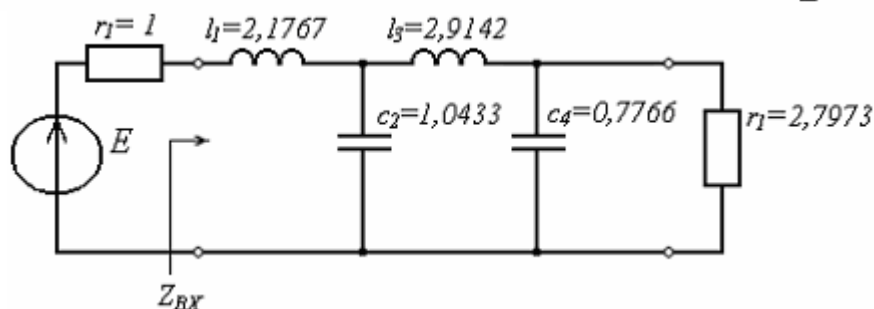


Рис. 4.3 Схема ФНЧ-прототипа четвёртого порядка

4. Если выбрать знак “+” у функции  $\rho(\hat{p})$ , то получим дуальную схему фильтра (рис.4.4).

$$Z'_{BX}(\hat{p}) = \frac{V(\hat{p}) - \frac{1}{8}P_4(\hat{p})}{V(\hat{p}) + \frac{1}{8}P_4(\hat{p})} =$$

$$= \frac{0,9188\hat{p}^3 + 0,422\hat{p}^2 + 0,7081\hat{p} + 0,1391}{2\hat{p}^4 + 0,9188\hat{p}^3 + 2,422\hat{p}^2 + 0,7081\hat{p} + 0,3891}$$

Тогда 
$$Y'_{BX}(\hat{p}) = \frac{1}{Z_{BX}(\hat{p})} =$$

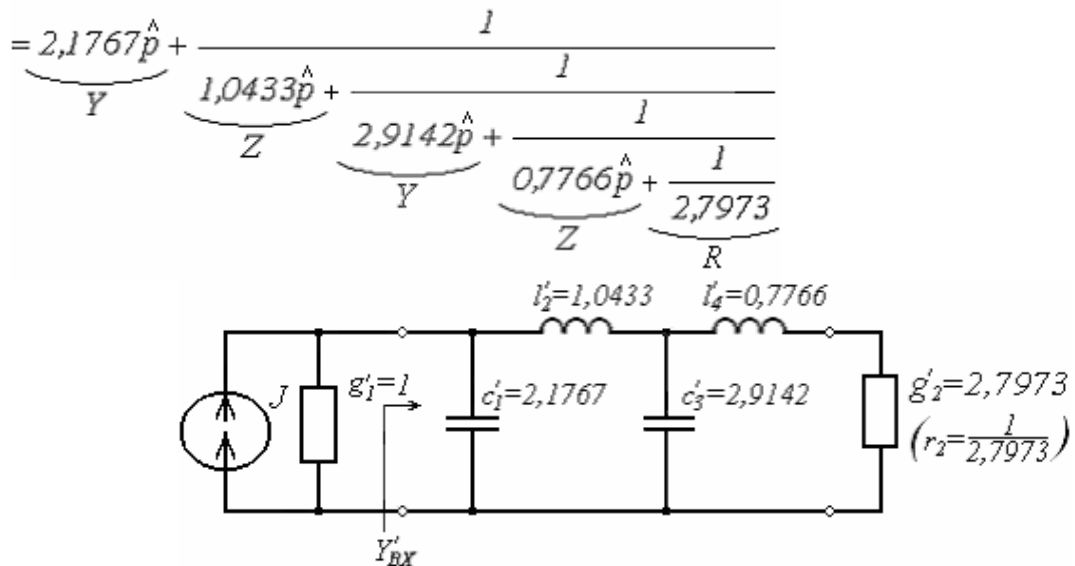


Рис.4.4 Дуальная схема ФНЧ-прототипа четвёртого порядка

В

[Оглавление](#)

#### 4.2. Ускоренный метод реализации симметричных фильтров (n-нечетное)

Представим нормированную схему фильтра в виде двух каскадно-соединенных одинаковых четырехполюсников (рис.4.5), в которой выполняются следующие соотношения:

$$r_1 = r_2 = 1, \quad (4.6)$$

$$\hat{Z}_{ВХ2}(\hat{p}) = \hat{Z}_{ВЫХ1}(\hat{p}), \quad (4.7)$$

$$\begin{bmatrix} A_1(\hat{p}) \\ C_1(\hat{p}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\hat{p}) B(\hat{p}) \\ C(\hat{p}) D(\hat{p}) \end{bmatrix} = \frac{1}{Q_1(\hat{p})} \begin{bmatrix} A'(\hat{p}) B'(\hat{p}) \\ C'(\hat{p}) D'(\hat{p}) \end{bmatrix}, \quad (4.8)$$

$$\begin{bmatrix} A_2(\hat{p}) \\ C_2(\hat{p}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D(\hat{p}) B(\hat{p}) \\ C(\hat{p}) A(\hat{p}) \end{bmatrix} = \frac{1}{Q_1(\hat{p})} \begin{bmatrix} D'(\hat{p}) B'(\hat{p}) \\ C'(\hat{p}) A'(\hat{p}) \end{bmatrix}, \quad (4.9)$$

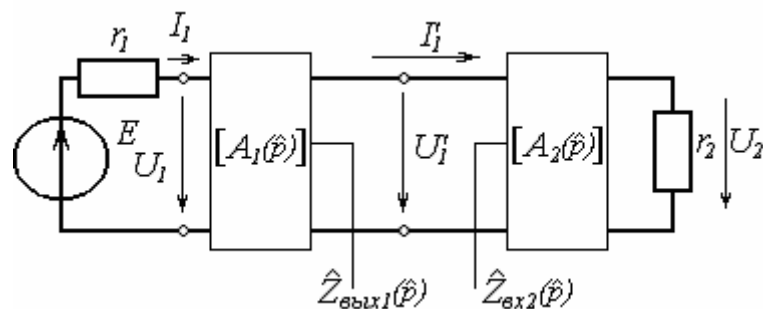


Рис.4.5 Представление фильтра в виде двух каскадно согласованных соединённых четырехполюсников.

(при согласованном соединении таких четырехполюсников элементы  $A'(\hat{p})$  и  $D'(\hat{p})$  в матрице  $\begin{bmatrix} A_2(\hat{p}) \end{bmatrix}$  меняются местами), где  $A'(\hat{p}), B'(\hat{p}), C'(\hat{p}), D'(\hat{p}), Q_1(\hat{p})$  — полиномы комплексной частоты  $\hat{p} = \sigma + j\Omega$  с вещественными коэффициентами,  $Q_1(\hat{p})$  — общий знаменатель у всех элементов  $\begin{bmatrix} A(\hat{p}) \end{bmatrix}$  — матрицы.

Рассматриваемый метод называется ускоренным потому, что достаточно сформировать функцию входного сопротивления  $\hat{Z}_{BX2}(\hat{p})$  по найденной на этапе аппроксимации функции  $T(\hat{p})$  и реализовать только (правую) половину фильтра. Левая часть достраивается, исходя из условия симметрии (4.7).

Из теории четырехполюсников [2] известно:

$$\begin{cases} U_1(p) = A(p)U_2(p) + B(p)I_2(p) \\ I_1(p) = C(p)U_2(p) + D(p)I_2(p) \end{cases}, \quad (4.10)$$

$$Z_{BX}(p) = \frac{A(p)r_2 + B(p)}{C(p)r_2 + D(p)} \quad (4.11)$$

Для схемы рис.4.5 из (4.11) с учетом (4.6), (4.7), (4.9)

$$\hat{Z}_{BX2}(\hat{p}) = \frac{D'(\hat{p}) + B'(\hat{p})}{C'(\hat{p}) + A'(\hat{p})} = \hat{Z}_{ВЫХ1}(\hat{p}) \quad (4.12)$$

Установим связь между функцией  $\hat{Z}_{BX2}(\hat{p})$  и нормированной рабочей передаточной функцией  $T(\hat{p})$ . На основании (4.6) и (1.6):

$$T(\hat{p}) = \frac{2U_2(\hat{p})}{E(\hat{p})} \quad (4.13)$$

Для определения  $U_2(\hat{p})$  воспользуемся вторым уравнением системы (4.10) применительно ко второму четырехполюснику схемы рис.4.5:

$$\begin{aligned}
I_1'(\hat{p}) &= U_2(\hat{p}) \frac{C'(\hat{p})}{Q_1(\hat{p})} + I_2(\hat{p}) \frac{D'(\hat{p})}{Q_1(\hat{p})} = \\
&= \frac{U_2(\hat{p})}{Q_1(\hat{p})} \left( C'(\hat{p}) + \frac{D'(\hat{p})}{r_2} \right) \\
&= \frac{U_2(\hat{p})}{Q_1(\hat{p})} \left( C'(\hat{p}) + D'(\hat{p}) \right),
\end{aligned}$$

откуда

$$U_2(\hat{p}) = \frac{I_1'(\hat{p}) Q_1(\hat{p})}{C'(\hat{p}) + D'(\hat{p})} \quad (4.14)$$

С другой стороны, согласно теореме об эквивалентном источнике напряжения и с учетом (4.12):

$$I_1'(\hat{p}) = \frac{U'_{1XX}(\hat{p})}{Z_{BX2}(\hat{p}) + Z_{ВВХ1}(\hat{p})} = \frac{U'_{1XX}(\hat{p})}{2 \frac{D'(\hat{p}) + B'(\hat{p})}{C'(\hat{p}) + A'(\hat{p})}}, \quad (4.15)$$

где из системы (4.10) при Х.Х. и с учетом (4.11) и (4.6) получим:

$$\begin{aligned}
U'_{1XX}(\hat{p}) &= \frac{I_1(\hat{p})}{C'(\hat{p}) / Q_1(\hat{p})} = \frac{E(\hat{p}) Q_1(\hat{p})}{C'(\hat{p}) \left( r_1 + Z_{BX1XX}(\hat{p}) \right)} \\
&= \frac{E(\hat{p}) Q_1(\hat{p})}{C'(\hat{p}) \left( 1 + \frac{A'(\hat{p})}{C'(\hat{p})} \right)} = \frac{E(\hat{p}) Q_1(\hat{p})}{A'(\hat{p}) + C'(\hat{p})}
\end{aligned} \quad (4.16)$$

Теперь на основании (4.13), (4.14), (4.15), (4.16) получим:

$$\begin{aligned}
T(\hat{p}) &= \frac{Q_1^2(\hat{p})}{\left( A'(\hat{p}) + C'(\hat{p}) \right) \left( D'(\hat{p}) + B'(\hat{p}) \right)} \\
&= \frac{W(\hat{p})}{V(\hat{p})} = \frac{W(\hat{p})}{N(\hat{p}) M(\hat{p})} \quad (4.17)
\end{aligned}$$

Из (4.12) и (4.17) очевидна связь между  $T(\hat{p})$  и  $\hat{Z}_{BX2}(\hat{p})$ :



$$\hat{Z}_{BX2}(p) = \frac{M(\hat{p})}{N(\hat{p})} = K_Z(\hat{p}) \frac{M_Z(\hat{p})}{N_Z(\hat{p})}, \quad (4.18)$$

где  $K_Z(\hat{p})$  — коэффициент, получаемый из условия нормирования (4.6):

$$K_Z(\hat{p}) = Z_{BX2}(0) = r_2 = 1.$$

Таким образом, если найденная на этапе аппроксимации функция

$$T(\hat{p}) = \frac{W(\hat{p})}{V(\hat{p})} = \frac{W(\hat{p})}{\left(\hat{p} - \hat{p}_1\right)\left(\hat{p} - \hat{p}_2\right) \dots \left(\hat{p} - \hat{p}_n\right)} \quad (n - \text{нечётное})$$

удовлетворяет условиям физической реализуемости, то полином знаменателя

$$V(\hat{p}) = \left(\hat{p} - \hat{p}_1\right)\left(\hat{p} - \hat{p}_2\right) \dots \left(\hat{p} - \hat{p}_n\right) = M(\hat{p})N(\hat{p})$$

можно представить как произведение двух полиномов  $M(\hat{p})$  и  $N(\hat{p})$ , отношение которых дает функцию  $\hat{Z}_{BX2}(\hat{p})$  - входного сопротивления правой части фильтра (4.18).

### Порядок реализации

1. Для каждой пары комплексно-сопряженных корней  $\hat{p}_k$  полинома  $V(\hat{p})$  передаточной функции  $T(\hat{p})$  (полученной на этапе аппроксимации) составим элементарный сомножитель  $H_k(\hat{p})$ :

$$H_k(\hat{p}) = \left(\hat{p} - \hat{p}_k\right)\left(\hat{p} - \hat{p}_k^*\right) = \hat{p}^2 + 2\sigma_k \hat{p} + \sigma_k^2 + \Omega_k^2,$$

где  $\hat{p}_k = -\sigma_k + j\Omega_k$ ,  $\hat{p}_k^* = -\sigma_k - j\Omega_k$

2. Сформируем полином  $M_Z(\hat{p})$  как произведение элементарных сомножителей  $H_k(\hat{p})$  с нечетными индексами

$$M_Z(\hat{p}) = H_1(\hat{p}) \cdot H_3(\hat{p}) \cdot H_5(\hat{p}) \dots$$

3. Сформируем полином  $N_Z(\hat{p})$  как произведение элементарных сомножителей  $H_k(\hat{p})$  с четными индексами

$$N_Z(\hat{p}) = H_2(\hat{p}) \cdot H_4(\hat{p}) \dots$$

4. Определим  $K_Z(\hat{p})$  из условия, что

$$\hat{Z}_{BX2}(0) = K_Z(\hat{p}) \frac{M_Z(0)}{N_Z(0)} = r_2 = 1,$$

откуда

$$K_Z(\hat{p}) = \frac{N_Z(0)}{M_Z(0)}.$$

5. Составим функцию  $\hat{Z}_{BX2}(\hat{p})$  по (4.18)

$$\hat{Z}_{BX2}(\hat{p}) = K_Z(\hat{p}) \frac{M_Z(\hat{p})}{N_Z(\hat{p})}.$$

6. Разложим полученную функцию в цепную дробь и построим схему правой части фильтра.

7. Построим левую часть фильтра, исходя из условия

$$\hat{Z}_{ВЫХ1}(\hat{p}) = \hat{Z}_{ВХ}(\hat{p}).$$

8. Получим дуальную схему фильтра, используя соотношение:

$$\hat{Z}_{BX2}(\hat{p}) = \frac{N(\hat{p})}{M(\hat{p})}$$

Реализация двух дуальных схем позволяет разработчику выбрать одну более экономичную (с меньшим числом индуктивностей).

**Пример 4.3.** Реализовать ускоренным методом схему ФНЧ-прототипа по полученной в примере 3.2 функции  $T(\hat{p})$  ( $n=5$ ).

$$T(\hat{p}) = \frac{1/0,479}{(\hat{p} - \hat{p}_1)(\hat{p} - \hat{p}_2)(\hat{p} - \hat{p}_3)(\hat{p} - \hat{p}_4)(\hat{p} - \hat{p}_5)},$$

где  $\hat{p}_1 = -0,358 + j1,1018$

$$\hat{p}_2 = -0,9373 + j0,681$$

$$\hat{p}_3 = -1,1586$$

$$\hat{p}_4 = -0,9373 - j0,681 = \hat{p}_2^*$$

$$\hat{p}_5 = -0,358 - j1,1018 = \hat{p}_1^*$$

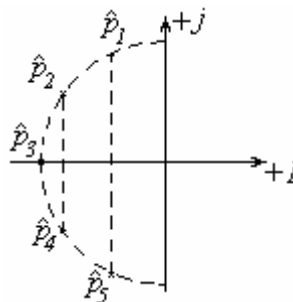


Рис. 4.6 Расположение корней полинома пятой степени.

1. Составим элементарные сомножители  $H_k(\hat{p})$ :

$$H_1(\hat{p}) = (\hat{p} - \hat{p}_1)(\hat{p} - \hat{p}_5) = \hat{p}^2 + 0,716\hat{p} + 1,3421$$

$$H_2(\hat{p}) = (\hat{p} - \hat{p}_2)(\hat{p} - \hat{p}_4) = \hat{p}^2 + 1,8746\hat{p} + 1,3423$$

$$H_3(\hat{p}) = (\hat{p} - \hat{p}_3) = \hat{p} + 1,1586$$

2. Сформируем полином  $M_z(\hat{p})$ :

$$\begin{aligned} M_z(\hat{p}) &= H_1(\hat{p}) \cdot H_3(\hat{p}) = \\ &= (\hat{p}^2 + 0,716\hat{p} + 1,3421)(\hat{p} + 1,1586) = \\ &= \hat{p}^3 + 1,8746\hat{p}^2 + 2,1716\hat{p} + 1,5549 \end{aligned}$$

3. Сформируем полином  $N_z(\hat{p})$ :

$$N_z(\hat{p}) = H_2(\hat{p}) = \hat{p}^2 + 1,8746\hat{p} + 1,3423$$

4. Определим  $K_z(\hat{p})$ :

$$K_z(\hat{p}) = \frac{N_z(0)}{M_z(0)} = \frac{1,3423}{1,5549} = 0,86327$$

$$Z_{BX2}(\hat{p}) = K_z(\hat{p}) \frac{M_z(\hat{p})}{N_z(\hat{p})}$$

5. Составим функцию

$$Z_{BX2}(\hat{p}) = \frac{0,86327\hat{p}^3 + 1,6183\hat{p}^2 + 1,87468\hat{p} + 1,3423}{\hat{p}^2 + 1,8746\hat{p} + 1,3423}$$

6. Разложим  $Z_{BX2}(\hat{p})$  в цепную дробь по Кауэру

$$Z_{BX2}(\hat{p}) = \underbrace{0,86327}_{Z} \hat{p} + \frac{1}{\underbrace{1,3968\hat{p} + \frac{1}{\underbrace{0,53395\hat{p} + \frac{1}{\underbrace{1}{Y}}}_{Z}}}_{Y}}$$

и построим нормированную схему правой половины фильтра (рис.4.7).

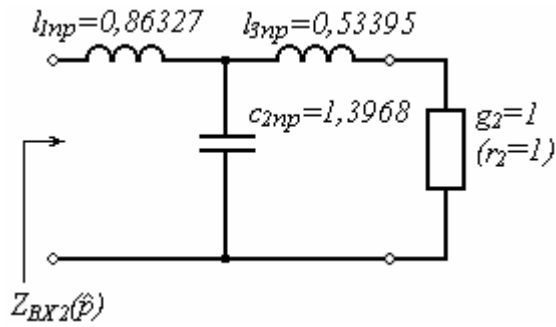


Рис.4.7 Правая половина синтезируемого фильтра

7. Реализуем левую половину схемы фильтра в соответствии с условием симметрии  $\hat{Z}_{ВЫХ1}(p) = \hat{Z}_{ВХ2}(p)$  (рис.4.8).

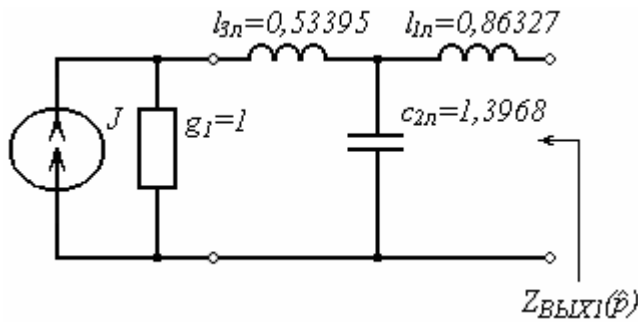


Рис.4.8 Левая половина синтезируемого фильтра

После объединения левой и правой половин (рис. 4.7 и 4.8) и замены источника тока на эквивалентный источник напряжения, получим полную нормированную схему фильтра (рис. 4.9).

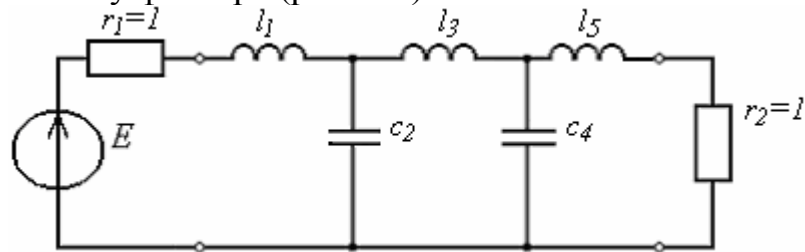


Рис.4.9 Схема фильтра, полученная после объединения левой и правой частей.

$$\begin{aligned}
 l_1 &= l_{3л} = 0,53395; & c_2 &= c_{2л} = 1,3968; \\
 l_3 &= l_{1л} + l_{1np} = 1,7265; & c_4 &= c_{2np} = 1,3968; \\
 l_5 &= l_{3np} = 0,53395.
 \end{aligned}$$

8. Получим дуальную схему фильтра

$$\begin{aligned}
 Z'_{ВХ}(p) &= \frac{N_z(p)}{K_z(p) \cdot M_z(p)}, \\
 Y'_{ВХ2}(p) = Z_{ВХ2}(p) &= \underbrace{0,86327p}_Y + \frac{1}{\underbrace{1,3968p + \frac{1}{\underbrace{0,53395p + \frac{1}{Z}}_Y}}_Z}
 \end{aligned}$$

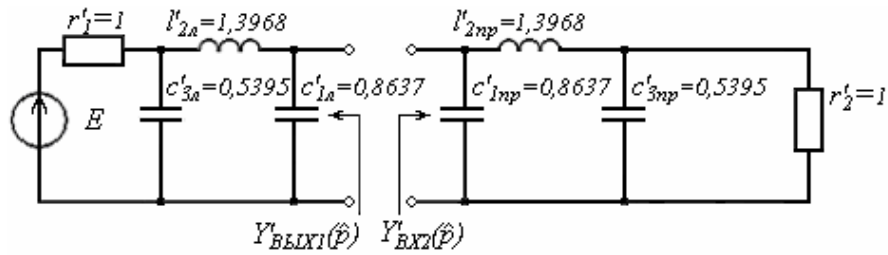


Рис.4.10 Левая и правая части дуальной схемы фильтра

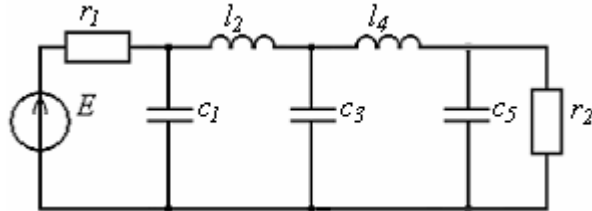


Рис.4.11 Дуальная схема фильтра, полученная после объединения левой и правой частей

где  $r_1=r_2=1$ ;  $c_1=c'_{3л}=c_5=c'_{3нп}=0,5395$ ;

$l_2=l'_{2л}=l_4=l'_{2нп}=1,3968$ ;  $c_3=c'_{1л}+c'_{1нп}=1,7265$ .

В

[Оглавление](#)

### 4.3. Ускоренный метод реализации симметричных фильтров (n-четное)

Подставим нормированную схему фильтра в виде двух каскадно-соединенных дуальных четырехполюсников (рис.4.12). В схеме выполняются следующие соотношения:

$$r_1 \cdot r_2 = 1, \quad r_2 = K, \quad r_1 = \frac{1}{K}; \quad (4.19)$$

$$Z_{ВХ2} \cdot Z_{ВЫХ1} = 1, \quad Z_{ВХ2} = Y_{вых1}; \quad (4.20)$$

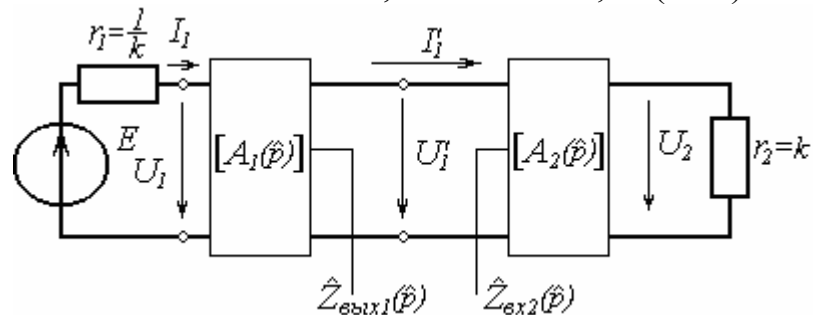


Рис.4.12 Представление фильтра в виде двух каскадно соединённых дуальных четырехполюсников.

$$\left[ A_i(\hat{p}) \right] = \frac{1}{Q_i(\hat{p})} \begin{bmatrix} A'(\hat{p}) & B'(\hat{p}) \\ C'(\hat{p}) & D'(\hat{p}) \end{bmatrix}; \quad (4.21)$$

$$\left[ A_2(\hat{p}) \right] = \frac{1}{Q_1(\hat{p})} \begin{bmatrix} A'(\hat{p}) & C'(\hat{p}) \\ B'(\hat{p}) & D'(\hat{p}) \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

(элементы  $C'(\hat{p})$  и  $B'(\hat{p})$  в матрицах  $\left[ A_1(\hat{p}) \right]$ ,  $\left[ A_2(\hat{p}) \right]$  дуальных четырехполюсников меняются местами).

На основании (4.11) с учетом (4.19), (4.20) для второго четырехполюсника  $\left[ A_2 \right]$  (4.22) получим:

$$\hat{Z}_{BX2}(\hat{p}) = \frac{A'(\hat{p})K(\hat{p}) + C'(\hat{p})}{B'(\hat{p})K(\hat{p}) + D'(\hat{p})} \quad (4.23)$$

$$\hat{Z}_{BXX1} = \frac{B'(\hat{p})K(\hat{p}) + D'(\hat{p})}{A'(\hat{p})K(\hat{p}) + C'(\hat{p})} \quad (4.24)$$

Установим связь между функцией  $\hat{Z}_{BX2}(\hat{p})$  и нормированной рабочей передаточной функцией  $T(\hat{p})$ .

На основании (1.6) и (4.19)

$$T(\hat{p}) = \frac{2U_2(\hat{p})}{RE(\hat{p})} \quad (4.25)$$

Для определения  $U_2$  воспользуемся вторым уравнением систем (4.10) применительно ко второму четырехполюснику схемы рис.4.12:

$$I_1'(\hat{p}) = U_2(\hat{p}) \frac{B'(\hat{p})}{Q_1(\hat{p})} + I_2(\hat{p}) \frac{D'(\hat{p})}{Q_1(\hat{p})} =$$

$$\frac{U_2(\hat{p})}{Q_1(\hat{p})} \left( B'(\hat{p}) + \frac{D'(\hat{p})}{k} \right) = \frac{U_2(\hat{p}) \left( B'(\hat{p})k + D'(\hat{p}) \right)}{kQ_1(\hat{p})},$$

откуда

$$U_2(\hat{p}) = \frac{I_1'(\hat{p})kQ_1(\hat{p})}{B'(\hat{p})k + D'(\hat{p})} \quad (4.26)$$

С другой стороны, согласно теореме об эквивалентном источнике напряжения и с учетом (4.23) и (4.24)

$$\begin{aligned}
I_1'(\hat{p}) &= \frac{U_{1XX}(\hat{p})}{Z_{BX2}(\hat{p}) + Z_{B\backslash IX1}(\hat{p})} = \\
&= \frac{U_{1XX}(\hat{p})}{\frac{B'(\hat{p})k + D'(\hat{p})}{A'(\hat{p})k + C'(\hat{p})} + \frac{A'(\hat{p})k + C'(\hat{p})}{B'(\hat{p})k + D'(\hat{p})}} = \\
&= \frac{U_{1XX}(\hat{p}) \left( A'(\hat{p})k + C'(\hat{p}) \right) \left( B'(\hat{p})k + D'(\hat{p}) \right)}{\left( B'(\hat{p})k + D'(\hat{p}) \right)^2 + \left( A'(\hat{p})k + C'(\hat{p}) \right)^2}, \quad (4.27)
\end{aligned}$$

где  $U_{1XX}(\hat{p})$  определяется по (4.10) и (4.11) при X.X. и с учетом (4.19)

$$\begin{aligned}
U_{1XX}(\hat{p}) &= \frac{I_1(\hat{p})}{C'(\hat{p})/Q_1(\hat{p})} = \\
&= \frac{E(\hat{p}) \cdot Q_1(\hat{p})}{C'(\hat{p}) \left( r_1 + Z_{BX1XX}(\hat{p}) \right)} = \\
&= \frac{E(\hat{p}) \cdot Q_1(\hat{p})}{C'(\hat{p}) \left( \frac{1}{k} + \frac{A'(\hat{p})}{C'(\hat{p})} \right)} = \frac{E(\hat{p}) \cdot Q_1(\hat{p})k}{A'(\hat{p})k + C'(\hat{p})} \quad (4.28)
\end{aligned}$$

Теперь на основании (4.25), (4.26), (4.27) и (4.28) получим:

$$\begin{aligned}
T(\hat{p}) &= \frac{2Q_1^2(\hat{p})k}{\left( A'(\hat{p})k + C'(\hat{p}) \right)^2 + \left( B'(\hat{p})k + D'(\hat{p}) \right)^2} = \\
\frac{W(\hat{p})}{V(\hat{p})} &= \frac{W(\hat{p})}{M^2(\hat{p}) + N^2(\hat{p})} \quad (4.29)
\end{aligned}$$

где  $V(\hat{p}) = M^2(\hat{p}) + N^2(\hat{p}) = \left[ M(\hat{p}) - jN(\hat{p}) \right] \left[ M(\hat{p}) + jN(\hat{p}) \right]$  Сопоставляя (4.29) и (4.23), (4.24), получим:

$$Z_{BX2}(\hat{p}) = \frac{M(\hat{p})}{N(\hat{p})}, \quad Z_{BЫX1}(\hat{p}) = \frac{N(\hat{p})}{M(\hat{p})}. \quad (4.30)$$

Таким образом, если найденная на этапе аппроксимации функция

$$T(\hat{p}) = \frac{W(\hat{p})}{V(\hat{p})} = \frac{W(\hat{p})}{\left(\hat{p} - \hat{p}_1\right) \dots \left(\hat{p} - \hat{p}_n\right)} \quad (n - \text{чётное})$$

удовлетворяет условиям физической реализуемости, то полином  $V(\hat{p})$  можно представить как произведение двух комплексно-сопряженных полиномов вида

$$V(\hat{p}) = \left[ M(\hat{p}) - jN(\hat{p}) \right] \left[ M(\hat{p}) + jN(\hat{p}) \right],$$

откуда по (4.30) можно сформировать функции  $Z_{BX2}(\hat{p})$  и  $Z_{BЫX1}(\hat{p})$ .

### Порядок реализации

1. По полученным на этапе аппроксимации корням  $\hat{p}_k$  полинома  $V(\hat{p})$

определим  $\left[ M(\hat{p}) \pm jN(\hat{p}) \right]$  как произведение двучленов  $\left( \hat{p} - \hat{p}_k \right)$  с четными (или нечетными) индексами  $k$ .

$$\left[ M(\hat{p}) + jN(\hat{p}) \right] = \left( \hat{p} - \hat{p}_1 \right) \left( \hat{p} - \hat{p}_3 \right) \left( \hat{p} - \hat{p}_5 \right) \dots$$

или

$$\left[ M(\hat{p}) - jN(\hat{p}) \right] = \left( \hat{p} - \hat{p}_2 \right) \left( \hat{p} - \hat{p}_4 \right) \left( \hat{p} - \hat{p}_6 \right) \dots$$

$$Z_{BX2}(\hat{p}) = \frac{M(\hat{p})}{N(\hat{p})}.$$

2. Сформируем

3. Разложим полученную функцию в цепную дробь по Кауэру и построим схему правой половины фильтра.

4. Достроим левую часть фильтра из условия антисимметрии

$$Y_{BЫX1}(\hat{p}) = Z_{BX2}(\hat{p})$$

5. Получим дуальную схему фильтра, используя соотношение

$$Z_{BX2}(\hat{p}) = \frac{M(\hat{p})}{N(\hat{p})}.$$



Пример 4.4. Реализовать ускоренным методом Попова схему ФНЧ-

прототипа по полученной в примере 3.3 функции  $T(\hat{p})$  ( $n = 4$ );

$$T(\hat{p}) = \frac{1/4,296}{\left(\hat{p} - \hat{p}_1\right)\left(\hat{p} - \hat{p}_2\right)\left(\hat{p} - \hat{p}_3\right)\left(\hat{p} - \hat{p}_4\right)},$$

где  $\hat{p}_1 = -0,1347 + j0,9793$ ;

$\hat{p}_2 = -0,3252 + j0,4056$ ;

$\hat{p}_3 = -0,3252 - j0,4056$ ;

$\hat{p}_4 = -0,1347 - j0,9793$ .

1. Определим

$$\begin{aligned} [M(\hat{p}) \pm jN(\hat{p})] &= (\hat{p} - \hat{p}_1)(\hat{p} - \hat{p}_3) = \\ &= \underbrace{(\hat{p}^2 + 0,4599\hat{p} + 0,441)}_{M(\hat{p})} - j \underbrace{(0,5737\hat{p} + 0,2639)}_{N(\hat{p})} \end{aligned}$$

2. Сформируем  $Z_{BX2}(\hat{p})$

$$Z_{BX2}(\hat{p}) = \frac{M(\hat{p})}{N(\hat{p})} = \frac{\hat{p}^2 + 0,4599\hat{p} + 0,441}{0,5737\hat{p} + 0,2639}.$$

3. Разложим  $Z_{BX2}(\hat{p})$  в цепную дробь

$$Z_{BX2}(\hat{p}) = \underbrace{1,743\hat{p}}_Z + \frac{1}{\underbrace{1,3\hat{p}}_Y + \frac{1}{\underbrace{1,671}_Z}}$$

и построим нормированную схему правой половины фильтра (рис.4.13).

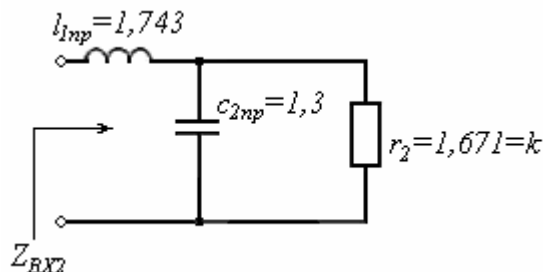


Рис.4.13 Правая половина синтезируемого фильтра.

4. Построим левую половину схемы фильтра, исходя из условия антисимметрии (рис.4.14);

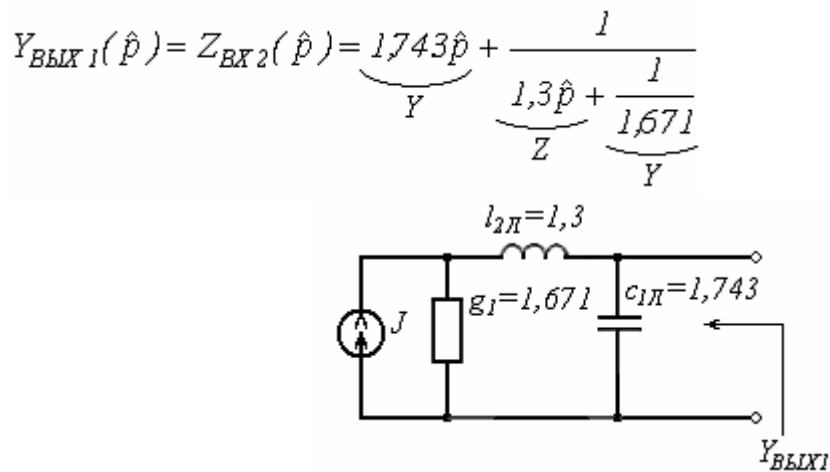


Рис.4.14 Левая половина синтезируемого фильтра.

После объединения левой и правой половин (рис. 4.13 и 4.14) и замены источника тока на эквивалентный источник напряжения получим полную нормированную схему ФНЧ-прототипа (рис. 4.15)

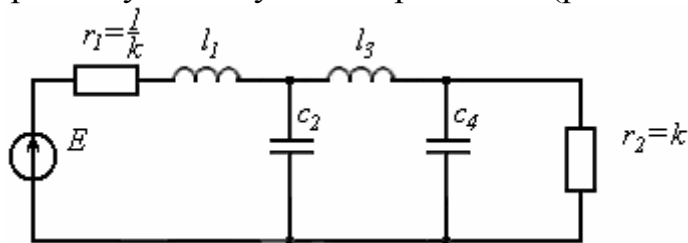


Рис. 4.15 Полная схема ФНЧ-прототипа.

$$r_1 = \frac{l}{g_1} = \frac{1}{1,671}; \quad l_1 = l_{2л} = 1,3; \quad c_2 = c_{1л} = 1,743;$$

$$l_3 = l_{1п} = 1,743; \quad c_4 = c_{2п} = 1,3; \quad r_2 = 1,671 = k$$

$$Z'_{\text{ex}2}(\hat{p}) = \frac{N(\hat{p})}{M(\hat{p})}$$

5. Получим дуальную схему фильтра по  $M(\hat{p})$  (рис. 4.16)

$$Y'_{\text{ex}2}(\hat{p}) = Z'_{\text{ex}2}(\hat{p}) = 1,743\hat{p} + \frac{1}{1,3\hat{p} + \frac{1}{1,671}}$$

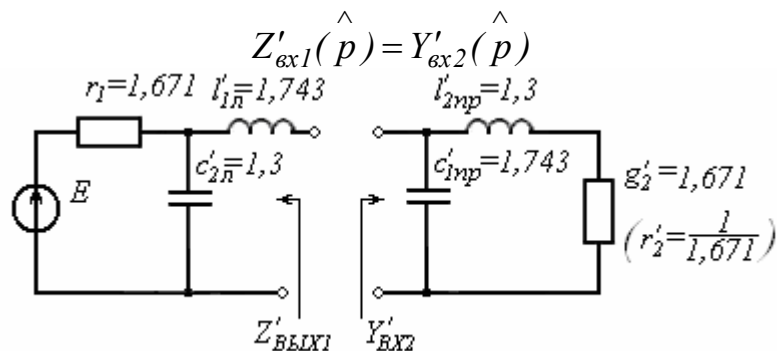


Рис. 4.16 Объединение правой и левой частей синтезируемого фильтра.

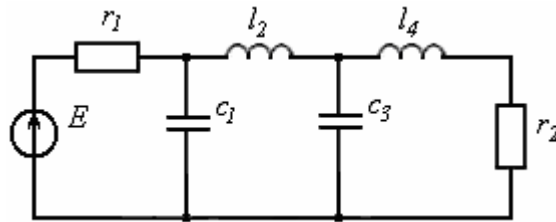


Рис.4.17 Полная дуальная схема ФНЧ-прототипа.

$$r_1 = 1,671; c_1 = c'_{2л} = 1,3; l_2 = l'_{1л} = 1,743;$$

$$c_3 = c'_{1пр} = 1,743; l_4 = l'_{2пр} = 1,3; r_2 = \frac{1}{g'_2} = \frac{1}{1,671}$$

В

[Оглавление](#)

## 5. Переход от схемы ФНЧ-прототипа к схеме заданного фильтра

### 5.1 Переход от нормированной схемы ФНЧ-прототипа к схеме заданного фильтра

Для преобразования передаточной функции ФНЧ-прототипа в функцию

ФВЧ используется соотношение  $\Omega_p = \frac{1}{\Omega}$ , а в функцию ПФ -

$$\Omega_p = \frac{1}{a} \left( \Omega - \frac{1}{\Omega} \right)$$

Указанное преобразование частоты осуществляет замену нормированных элементов схемы ФНЧ-прототипа на нормированные элементы (или комбинации элементов) заданной схемы согласно табл.5.1. [1].

Таблица5.1. Замена элементов ФНЧ – прототипа элементами ФВЧ и ПФ.

Нормированные элементы схемы ФНЧ-прототипа	Нормированные элементы схемы ФВЧ	Нормированные элементы схемы ПФ

В

[Оглавление](#)

## 5.2. Денормирование и расчёт элементов схемы заданного фильтра

Для перехода от нормированной схемы к денормированной схеме с заданными нагрузочным сопротивлением  $R_2$  и граничной частотой  $f_2$  для ФНЧ и ФВЧ или  $f_0$  для ПФ осуществляется изменение уровня сопротивления и масштаба частоты с помощью следующих множителей:

а) преобразующий множитель сопротивления:

$$n_r = \frac{R_2}{r_2}, \quad (5.1)$$

где  $R_2$  — нагрузочное сопротивление;

$r_2$  — нормированное нагрузочное сопротивление;

б) преобразующий множитель частоты:

$$\left. \begin{aligned} n_\omega &= \frac{\omega_2}{\Omega_2} = 2\pi f_2 && - \text{ФНЧ} \\ n_\omega &= \frac{\omega_2}{\Omega_{p2}} = 2\pi f_2 && - \text{ФВЧ} \\ n_\omega &= \frac{\omega_0}{\Omega_{p2}} = 2\pi f_0 && - \text{ПФ} \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

Тогда коэффициенты денормирования индуктивности и ёмкости определяются по формулам:

$$K_l = \frac{n_r}{n_\omega}, \quad K_c = \frac{1}{n_\omega n_r} \quad (5.3)$$

и денормированные значения элементов схемы – с помощью (5.4):

$$L_k = K_l l_k, \quad C_q = K_c c_q \quad (5.4)$$

**Пример 5.1.** Рассчитать схему ФНЧ, рассмотренного в примерах 3.1 и 4.1 (рис. 4.1), в которой  $R_2 = 800 \text{ Ом}$ ,  $f_2 = 4 \text{ кГц}$ .

1. Рассчитаем преобразующие множители по сопротивлению  $n_r$  (5.1) и по частоте  $n_\omega$  (5.2) для ФНЧ

$$n_r = \frac{R_2}{r_2} = \frac{800}{1} = 800 \text{ Ом}$$

$$n_\omega = 2\pi f_2 = 25120 \text{ рад/с}$$

и коэффициенты денормирования  $K_l$  и  $K_c$  (5.3)

$$K_l = \frac{n_r}{n_\omega} = 3,1847 \cdot 10^{-2} \text{ Гн}$$

$$K_c = \frac{1}{n_r \cdot n_\omega} = 4,976 \cdot 10^{-8} \text{ Ф.}$$

2. Денормированные значения элементов схемы ФНЧ по (5.4) (рис.5.1).

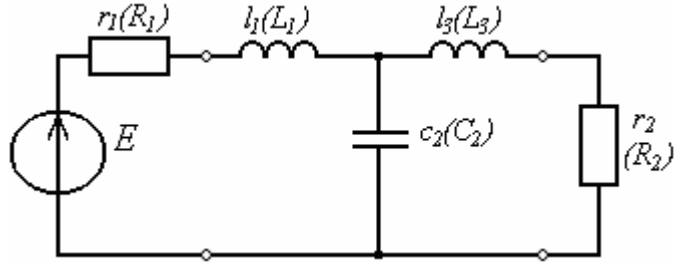


Рис. 5.1 Схема фильтра нижних частот третьего порядка.

$$R_1 = r_1 \cdot n_r = 800 \text{ Ом}, L_1 = K_l \cdot l_1 = 2,913 \cdot 10^{-2} \text{ Гн}, C_2 = K_c \cdot c_2 = 9,096 \cdot 10^{-8} \text{ Ф},$$

$$L_3 = K_l \cdot l_3 = 2,913 \cdot 10^{-2} \text{ Гн}, R_2 = r_2 \cdot n_r = 800 \text{ Ом}.$$

Пример 5.2. Рассчитать схему ФВЧ, рассмотренного в примерах 3.2 и 4.3, в которой  $R_2 = 800 \text{ Ом}$ ,  $f_2 = 20 \text{ кГц}$ .

1. Из двух дуальных схем ФНЧ-прототипа (рис. 4.9 и 4.11) выберем рис. 4.9 с большим числом индуктивностей, которые в результате перехода к схеме ФВЧ преобразуются в ёмкости.

Осуществим переход от нормированной схемы ФНЧ-прототипа (рис. 4.9) к схеме ФВЧ по табл. 5.1, согласно которой каждая индуктивность  $l_k$  переходит в

ёмкость  $c_k = \frac{1}{l_k}$ , а каждая ёмкость  $c_q$  - в индуктивность  $l_q = \frac{1}{c_q}$  (рис. 5.2).

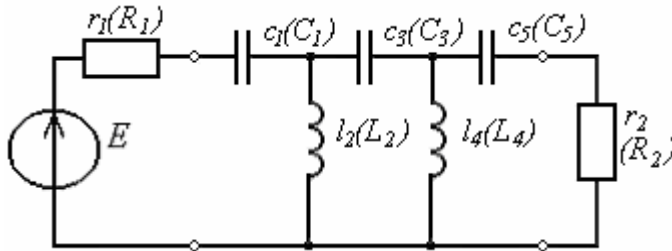


Рис. 5.2 Схема фильтра верхних частот пятого порядка.

Где

$$r_1 = r_2 = 1; \quad c_1 = \frac{1}{l_1} = 1,8728; \quad l_2 = \frac{1}{c_2} = 0,7159;$$

$$c_3 = \frac{1}{l_3} = 0,5792; \quad l_4 = \frac{1}{c_4} = 0,7159; \quad c_5 = \frac{1}{l_5} = 1,8728$$

2. Рассчитаем преобразующие множители по сопротивлению  $n_r$  (5.1), по частоте  $n_\omega$  (5.2) для ФНЧ

$$n_r = \frac{R_2}{r_2} = 800 \text{ Ом};$$

$$n_\omega = 2\pi f_2 = 6,28 \cdot 20 \cdot 10^3 = 125600 \text{ рад/с}$$

и коэффициенты денормирования  $K_l$  и  $K_c$  (5.3)

$$K_l = \frac{n_r}{n_\omega} = 6,369 \cdot 10^{-3} \text{ Гн},$$

$$K_c = \frac{1}{n_r \cdot n_\omega} = 9,9522 \cdot 10^{-9} \text{ Ф.}$$

3. Определим денормированные значения элементов схемы ФВЧ (рис. 5.2).

$$R_1 = R_2 = 800 \text{ Ом}; C_1 = C_5 = K_c \cdot c_1 = 1,8638 \cdot 10^{-8} \text{ Ф};$$

$$L_2 = L_4 = K_l \cdot l_2 = 4,5597 \cdot 10^{-3} \text{ Гн};$$

$$C_3 = K_c \cdot c_3 = 5,7643 \cdot 10^{-9} \text{ Ф.}$$

Пример 5.3 Рассчитать схему ПФ, рассмотренного в примерах 3.3 и 4.4, в которой  $R_2 = 800 \text{ Ом}$ ,  $f_0 = 10 \text{ кГц}$ ,  $a = 0,75$ .

1. Осуществим переход от нормированной схемы ФНЧ-прототипа (рис.4.15) к схеме ПФ по табл. 5.1, согласно которой каждая индуктивность  $l_k$  переходит в последовательный контур с элементами

$$l_{kn} = \frac{l_k}{a} \text{ и } c_{kn} = \frac{a}{l_k},$$

а каждая ёмкость  $c_q$  - в параллельный контур с элементами

$$c_{qn} = \frac{c_q}{a} \text{ и } l_{qn} = \frac{a}{c_q} \text{ (рис. 5.3)}$$

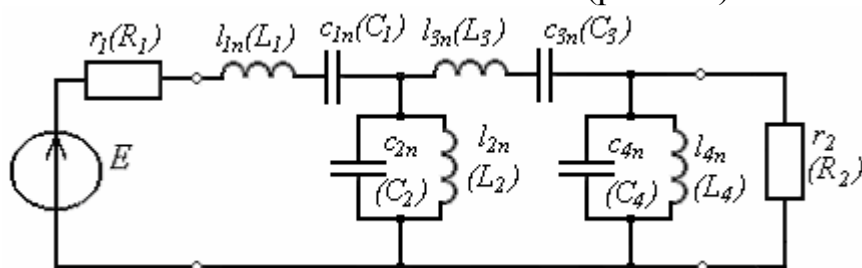


Рис. 5.3 Схема полосового фильтра восьмого порядка.

$$l_{1n} = \frac{l_1}{a} = 1,7333 ; c_{1n} = \frac{a}{l_1} = 0,5769 ;$$

$$l_{2n} = \frac{a}{c_2} = 0,4308 ; c_{2n} = \frac{a}{l_2} = 2,324 ;$$

$$l_{3n} = \frac{l_3}{a} = 2,324 ; c_{3n} = \frac{a}{l_3} = 0,4308 ;$$

$$l_{4n} = \frac{a}{c_4} = 0,5769 ; c_{4n} = \frac{c_4}{a} = 1,7333 ;$$

2. Рассчитаем  $n_r$ ,  $n_\omega$  (по (5.2)) для ПФ,  $K_b$ ,  $K_c$ .

$$n_r = \frac{R_2}{r_2} = \frac{800}{1,671} = 478,75 \text{ Ом};$$

$$n_\omega = 2\pi f_0 = 6,28 \cdot 10^4 \text{ рад/с};$$

$$K_l = \frac{n_r}{n_\omega} = 7,6234 \cdot 10^{-3} \text{ Гн};$$

$$K_c = \frac{1}{n_r n_\omega} = 3,3261 \cdot 10^{-8} \Phi;$$

3. Определим денормированные значения элементов схемы ПФ (рис. 5.3) по формулам (5.4).

$$R_1 = n_r r_1 = 286,5 \text{ Ом}; \quad L_1 = K_l \cdot l_{1n} = 13,21 \text{ мГн};$$

$$C_1 = K_c c_{1n} = 1,9189 \cdot 10^{-8} \text{ Гн}; \quad L_2 = K_l l_{2n} = 3,284 \text{ мГн};$$

$$C_2 = K_c c_{2n} = 7,735 \cdot 10^{-8} \Phi; \quad L_3 = K_l l_{3n} = 17,72 \text{ мГн};$$

$$C_3 = K_c c_{3n} = 1,432 \cdot 10^{-8} \Phi; \quad L_4 = K_l l_{4n} = 4,398 \text{ мГн};$$

$$C_4 = K_c c_{4n} = 5,765 \cdot 10^{-8} \Phi; \quad R_2 = n_r r_2 = 800 \text{ Ом};$$

Примечания. Можно показать, что:

1. Схемы фильтров Баттерворта, реализуемые по Дарлингтону и Попову, получатся одинаковыми как нормированные, так и денормированные. При этом во всех случаях ( $n$  – чётное и  $n$  – нечётное)  $r_1 = r_2 = 1$ ;

2. Схемы фильтров Чебышева, реализуемые по Дарлингтону и Попову, получаются одинаковыми только денормированные. При этом для  $n$  – нечётного  $r_1 = r_2 = 1$ , а для  $n$  – четного в случае реализации по Дарлингтону  $r_1 = 1$ , а по Попову -  $r_1 \cdot r_2 = 1$ .

**В**

### Оглавление

## **6. Расчет характеристик спроектированного фильтра**

После выполнения синтеза электрического фильтра важно убедиться в его соответствии техническим требованиям. Для этого разработчиком обязательно производится расчёт частотных характеристик рабочего ослабления  $A(f)$  и рабочей фазы  $B(f)$  спроектированного фильтра, по которым проверяется выполнение технических требований:

1) рабочее ослабление в ПП не должно превышать заданной величины  $\Delta A$ :

$$A(f) \leq \Delta A \quad (6.1)$$

2) рабочее ослабление в ПН не должно быть ниже заданного значение  $A_{\min}$ :

$$A(f) \geq A_{\min} \quad (6.2);$$

3) рабочая фаза  $B(f)$  позволяет судить о выполнении требований к её линейности в пределах полосы пропускания (если таковые имеются).

Эта задача может решена:

- во-первых, расчетом указанных характеристик  $A(f)$  и  $B(f)$  по

полученной на этапе аппроксимации функции  $T(\hat{p})$ . Этим расчетом проверяется соответствие аппроксимированной рабочей передаточной функции

$T(\hat{p})$  и, следовательно, функции рабочего ослабления  $A(f)$  заданным техническим требованиям, то есть правильность выполнения этапа аппроксимации;

- во-вторых, расчет частотных характеристик  $A(f)$  и  $B(f)$  по операторной передаточной функции  $T(\hat{p})$ , полученной для разработанной на этапе реализации схемы фильтра заданным техническим условиям, то есть правильность синтеза фильтра в целом.

В первом случае расчет частотных характеристик  $A(f)$  и  $B(f)$  предлагается студентам выполнить аналитически, а во втором – с использованием ЭВМ.

В

[Оглавление](#)

## 6.1 Аналитический метод расчета характеристик фильтра

При расчете любого типа фильтра вычисляют нормированные частотные характеристики ФНЧ-прототипа, а затем, используя преобразования частоты, конструируют соответствующие частотные характеристики заданного ФВЧ или ПФ. Таким образом, расчёт характеристик  $A(f)$  и  $B(f)$  состоит из двух этапов:

- расчёт нормированных  $A(\Omega)$  и  $B(\Omega)$  ( $A(\Omega_p)$  и  $B(\Omega_p)$ ) ФНЧ (ФНЧ-прототипа);
- преобразование нормированных  $A(\Omega)$  и  $B(\Omega)$  ( $A(\Omega_p)$  и  $B(\Omega_p)$ ) в соответствующие частотные характеристики  $A(f)$  и  $B(f)$  ФНЧ, ФВЧ и ПФ.

### 6.1.1 Расчёт нормированных частотных характеристик ФНЧ

Расчёт нормированных частотных характеристик рабочего ослабления  $A(\Omega)$ , ( $A(\Omega_p)$ ) и рабочей фазы  $B(\Omega)$ , ( $B(\Omega_p)$ ) ФНЧ (ФНЧ-прототипа) производим, пользуясь следующими соотношениями (1.1), (1.6):

$$\underline{\Gamma} = \ln \frac{I}{T} = A + jB, \quad (6.3)$$

где  $\underline{\Gamma} = T(j\Omega) = T(p) \Big|_{p = j\Omega(j\Omega_p)}$ ;



$$\left. \begin{aligned} A(\Omega) &= |\Gamma| = 20 \lg \left| \frac{1}{T(j\Omega)} \right| \\ B(\Omega) &= \arg\{\Gamma\} = \arg\left\{ \frac{1}{T(j\Omega)} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

Зададимся частотами  $\Omega(\Omega_p)$  для расчёта характеристик. Выберем несколько частот для ПП в пределах  $\Omega = 0 \div 1$  ( $\Omega_p = 0 \div 1$ ) и одну  $\Omega = \Omega_3$  ( $\Omega_p = \Omega_{3p}$ ) для ПН.

#### а) Расчёт $A(\Omega)$ в ПП

Для фильтров Баттерворта, имеющих монотонно нарастающий характер (рис. 3.1, 3.4) зависимостей  $A(\Omega)$  и  $B(\Omega)$ , производим выбор пяти частот произвольно, включая  $\Omega_1 = 0$  и  $\Omega_2 = 1$ .

Для фильтров же Чебышева с равноволновой характеристикой рабочего ослабления в ПП необходимо выбрать в качестве расчётных частоты экстремумов  $A(\Omega)$ . Число экстремальных точек  $A(\Omega)$  равно  $(n+1)$  ( $n$ -порядок фильтра). Обратим внимание на то, что при  $n$ -четном имеем на  $\Omega = 0$  максимум рабочего ослабления  $A(\Omega)$ , равный  $\Delta A$ , а при  $n$ -нечетном – минимум ослабления  $A(\Omega)$ , равный 0 (рис.3.3а). Значения  $A(\Omega)$  в точках  $\Omega_{maxm}$  должны быть равны  $\Delta A$ , а в точках  $\Omega_{minv}$  – нулю, то есть:

$$A(\Omega) \Big|_{\Omega = \Omega_{maxm}} = \Delta A \quad \text{и} \quad A(\Omega) \Big|_{\Omega = \Omega_{minv}} = 0 \quad (6.5)$$

Для определения  $\Omega_{maxm}$  и  $\Omega_{minv}$  воспользуемся формулами:

$$\left. \begin{aligned} \Omega_{maxm} &= \cos \frac{(m-1)\pi}{n}, \text{ где } m = 1, 2, \dots, n+1 \\ \Omega_{minv} &= \sin \frac{(2v-1)\pi}{n}, \text{ где } v = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (6.6)$$

из которых выбираются только положительные значения, или табл. 6.1, где приведены значения этих частот для ФНЧ до седьмого порядка.

#### б) Расчет $A(\Omega)$ в ПН

Так как в ПН зависимости  $A(\Omega)$  как фильтров Баттерворта, так и фильтров Чебышева имеют монотонно нарастающий характер (см. рис. 3.1 и 3.3а), достаточно убедиться в выполнении условия (6.2) лишь на граничной частоте ПН. Поэтому в качестве расчётной выбираем в ПН одну частоту  $\Omega = \Omega_3$ .

Примечание. Следует отметить, что на этапе аппроксимации уже выполняется расчет значений аппроксимированной (3.8) функции  $A(\Omega)$  на частотах:  $\Omega_1 = 0$ ,  $\Omega_2 = 1$  и  $\Omega_3$ . Эти значения можно использовать в данном

разделе курсовой работы.

в) Расчёт  $B(\Omega)$  производится по (6.4) на тех же частотах, что и расчёт  $A(\Omega)$ .

Таблица 6.1 Значения частот минимумов и максимумов для фильтра Чебышева.

$n$	$\Omega_{min}$	$\Omega_{max}$
1	0	1
2	0,707	0; 1
3	0; 0,866	0,5; 1
4	0,383; 0,924	0; 0,707; 1
5	0; 0,588; 0,951	0,309; 0,809; 1
6	0,259; 0,707; 0,966	0; 0,5; 0,866; 1
7	0; 0,434; 0,782; 0,975	0,022; 0,623; 0,901; 1

### 6.1.2 Преобразование частотных характеристик фильтра

Для преобразования нормированных  $A(\Omega)$  и  $B(\Omega)$  в соответствующие частотные характеристики  $A(f)$  и  $B(f)$  ФНЧ, ФВЧ и ПФ необходимо рассчитать значения денормированных и преобразованных (в случае ФВЧ и ПФ) частот, соответствующих нормированным частотам  $\Omega$  ФНЧ.

Для ФНЧ осуществляем лишь денормирование частот характеристик согласно (2.2):  $f = \Omega \cdot f_2$

Для ФВЧ и ПФ используем преобразование частоты и её денормирование по (2.3), (2.4) ÷ (2.7). Тогда для ФВЧ:

$$\Omega = \frac{1}{\Omega_p}; \quad f = \frac{f_2}{\Omega_p} = f_2 \cdot \Omega \quad (6.7)$$

в результате чего частотам  $f$  будут соответствовать рассчитанные ранее значения  $A(\Omega_p)$  и  $[ - B(\Omega_p) ]$ .

Для ПФ:

$$\left. \begin{aligned} \Omega &= \frac{1}{2}(\Omega_p a + \sqrt{a^2 \Omega_p^2 + 4}), \Omega > 1, \\ \Omega' &= \frac{1}{\Omega}, f = \Omega f_0, a = \frac{f_2 - f_2'}{f_0} \end{aligned} \right\} \quad (6.8)$$

где  $\Omega'$  - нормированные частоты, соответствующие частотам,  $f'$

расположенным слева от  $f_0$  (рис. 2.3а) и геометрически симметричным частотам  $f$ . В результате данного преобразования каждой паре частот  $f$  и  $f'$ , связанных

соотношением  $f \cdot f' = f_0^2$ , будут соответствовать рассчитанные ранее значения  $A(\Omega_p)$  и значения  $[\pm B(\Omega_p)]$ .

После преобразования и денормирования частот:  $\Omega \rightarrow f$  ( $\Omega_p \rightarrow f$ ) получаем искомые частотные характеристики  $A(f)$  и  $B(f)$  фильтра. По результатам расчёта строим зависимости рабочего ослабления и рабочей фазы. Убеждаемся в выполнении технических требований и делаем соответствующие выводы.

**Пример 6.1.** Выполнить аналитический расчёт частотных характеристик  $A(f)$  и  $B(f)$  ФВЧ по аппроксимированной в примере 3.2 функции

$$T(p) = \frac{1/0,479}{(p^2 + 0,716p + 1,3421)(p^2 + 1,8746p + 1,34)(p + 1,1586)}$$

с  $f_2 = 20$  кГц,  $f_1 = 10$  кГц,  $\Delta A = 1,1$  дБ,  $A_{min} = 20$  дБ.

1. Выберем расчётные частоты  $\Omega_p$ :

в ПП – 5 частот (так как фильтр Баттерворта), включая  $\Omega_{p1} = 0$  и  $\Omega_{p2} = 1$ :

$$\Omega_p = 0; 0,25; 0,5; 0,75; 1.$$

и в ПН —  $\Omega_p = \Omega_{p3} = 2$ .

Найдём функцию  $\frac{1}{T}$ , с помощью которой согласно (6.3), (6.4) определим искомые  $A(\Omega_p)$  и  $B(\Omega_p)$ .

$$\frac{1}{T} = 0,479 \left\{ \left[ (1,3421 - \Omega_p^2) + j0,716\Omega_p \right] \times \right. \\ \left. \times \left[ (1,3424 - \Omega_p^2) + j1,8746\Omega_p \right] (1,1586 + j\Omega_p) \right\}$$

Проведём подробный расчёт на двух частотах  $\Omega_p = 0$  и  $\Omega_p = 1$ :

$$\Omega_p = 0, \quad \frac{1}{T} = 0,479 \cdot 1,3421 \cdot 1,3424 \cdot 1,1586 = 0,999 \cdot e^{j0^\circ}$$

откуда по (6.4)  $A = 20 \lg \left| \frac{1}{T} \right| = 20 \lg 0,999 \cong 0$

и  $B = \arg \left\{ \frac{1}{T} \right\} = 0$

$$\Omega_p = 1 \quad \frac{1}{T} = 0,479 \left[ (0,3421 + j0,716)(0,3424 + j1,8746) \times \right. \\ \left. \times (1,1586 + j) \right] = 1,10855 \cdot e^{j185^\circ}$$

откуда  $A = 20 \lg 1,10855 = 0,896 \approx 0,9$  дБ

$B = 185^\circ$ .

2. Аналогично производим расчёты на остальных частотах. Результаты расчёта занесём в табл.6.2 учитывая, что знак рабочей фазы для ФВЧ будет отрицательным.

Таблица 6.2 Расчётные значения рабочего ослабления и рабочей фазы на заданных частотах.

$\Omega_p$	0	0,25	0,5	0,75	1,0	2,0
$\Omega$	$\infty$	4	2	1,333	1	0,5
$f$ (кГц)	$\infty$	80	40	27	20	10
$A$ (дБ)	0	0,00032	0,00057	0,0556	0,896	26,9
$B$ (град)	0	-40,3	-82	-128,4	-185	-336,9

3. Выполним преобразование и денормирование частоты для ФВЧ по (6.7), заполняя соответствующие графы табл. 6.2 ( $\Omega$  и  $f$ ). Например,

$$\Omega_p = 0,25 \Rightarrow \Omega = \frac{1}{\Omega_p} = 4 \Rightarrow$$

$$f = f_2 \cdot 4 = 80 \text{ кГц.}$$

4. Построим графики  $A(f)$  и  $B(f)$  (рис. 6.1) по результатам расчёта.

Проверка технических требований по табл. 6.2 и рис. 6.1 подтверждает соответствие аппроксимированной в примере 3.2  $T(\hat{p})$  техническому заданию.

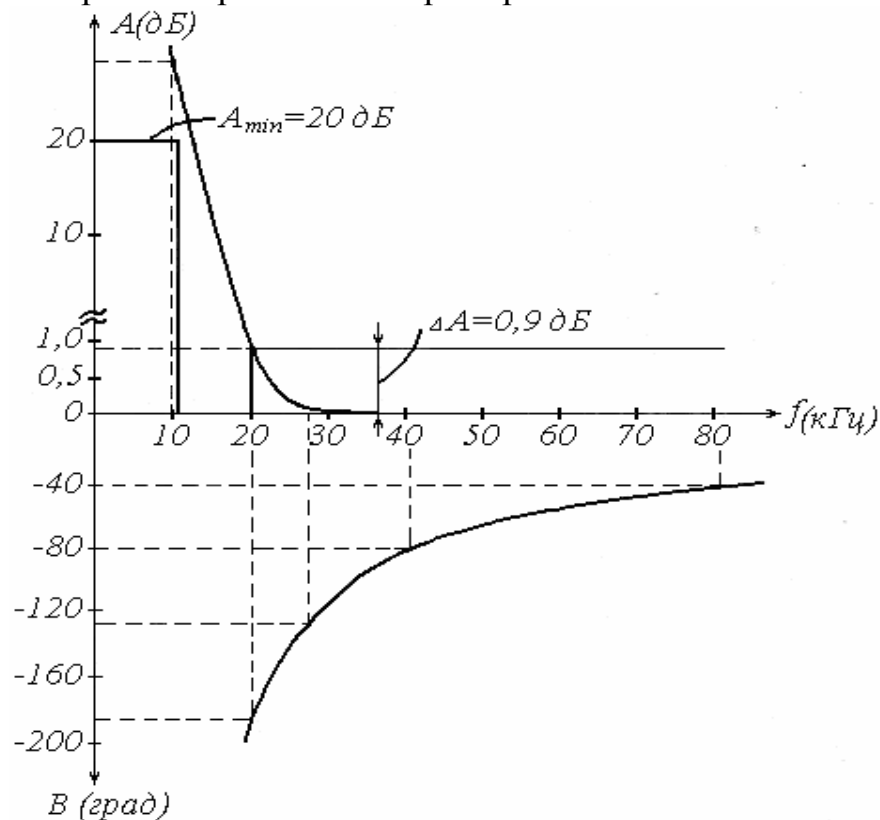


Рис. 6.1 Графики зависимости рабочего ослабления и рабочей фазы фильтра верхних частот.

**Пример 6.2** Рассчитать  $A(f)$  и  $B(f)$  ПФ по функции  $T(\hat{p})$  ФНЧ-прототипа, полученной в примере 3.3:

$$T(\hat{p}) = \frac{1/4,296}{(\hat{p}^2 + 0,2694\hat{p} + 0,9772)(\hat{p}^2 + 0,6504\hat{p} + 0,2703)}$$

с  $f_0 = 10$  кГц,  $f'_2 = 6,93$  кГц,  $f_2 = 14,43$  кГц,  $f_3 = 20$  кГц,  $f'_3 = 5$  кГц,  $\Delta A = 1,1$  дБ,  $A_{min} = 28$  дБ,  $a = 0,75$ .

1. Выберем в качестве расчётных частот в ПП - частоты экстремумов  $\Omega_{p \max}$  и  $\Omega_{p \min}$  по табл. 6.1 (так как фильтр Чебышева):  $\Omega_p = 0; 0,383; 0,707; 0,924; 1,0$  и в ПН -  $\Omega_p = \Omega_{p3} = 2$ .

2. Определим функцию  $\frac{1}{T} = 4,296 \left\{ [(0,9772 - \Omega_p^2) + j0,2694\Omega_p] \cdot [(0,2703 - \Omega_p^2) + j0,6504\Omega_p] \right\}$ ,

по которой рассчитаем  $A(\Omega_p)$  и  $B(\Omega_p)$  (6.4). Расчётные значения сведём в табл. 6.3, учитывая, что рабочая фаза ПФ имеет знак  $\pm$  в зависимости от расположения частот относительно центральной  $f_0$ .

3. Выполним преобразование и денормирование частоты для ПФ по (6.8). Например:

$$\Omega_p = 0,383 \Rightarrow \Omega' = \frac{1}{2}(0,383 \cdot 0,75 + \sqrt{0,75^2 \cdot 0,383^2 + 4}) = 0,8667 \Rightarrow$$

$$f' = f_0 \Omega' = 10 \cdot 0,8667 = 8,667 \text{ кГц. Здесь } a = 0,75.$$

$$\Omega = \frac{1}{\Omega'} = 1,1538 = 1,154 \Rightarrow f = f_0 \cdot \Omega = 10 \text{ кГц} \cdot 1,154 = 11,54 \text{ кГц}$$

Заполним соответствующие графы  $(\Omega, \Omega', f, f')$  табл. 6.3.

4. По результатам расчёта построим графики рис.6.2 и 6.3. По ним убеждаемся в выполнении технических требований к ПФ, что свидетельствует о правильности выполнения этапа аппроксимации в примере 3.3.

Таблица 6.3 Расчётные значения рабочего ослабления и рабочей фазы на заданных частотах.

$\Omega_p$	0	0,383	0,707	0,924	1	2
$\Omega'$	1	0,8667	0,769	0,714	0,693	0,5
$\Omega$	1	1,154	1,3	1,4	1,443	2
$f'$ (кГц)	10	8,667	7,69	7,14	6,93	5
$f$ (кГц)	10	11,54	13	14	14,43	20
$A$ (дБ)	1,1	0	1,098	0	1,1	34,3
$B$ (град)	0	$\mp 70,5$	$\mp 138,5$	$\mp 197,8$	$\mp 233,12$	$\mp 330,6$

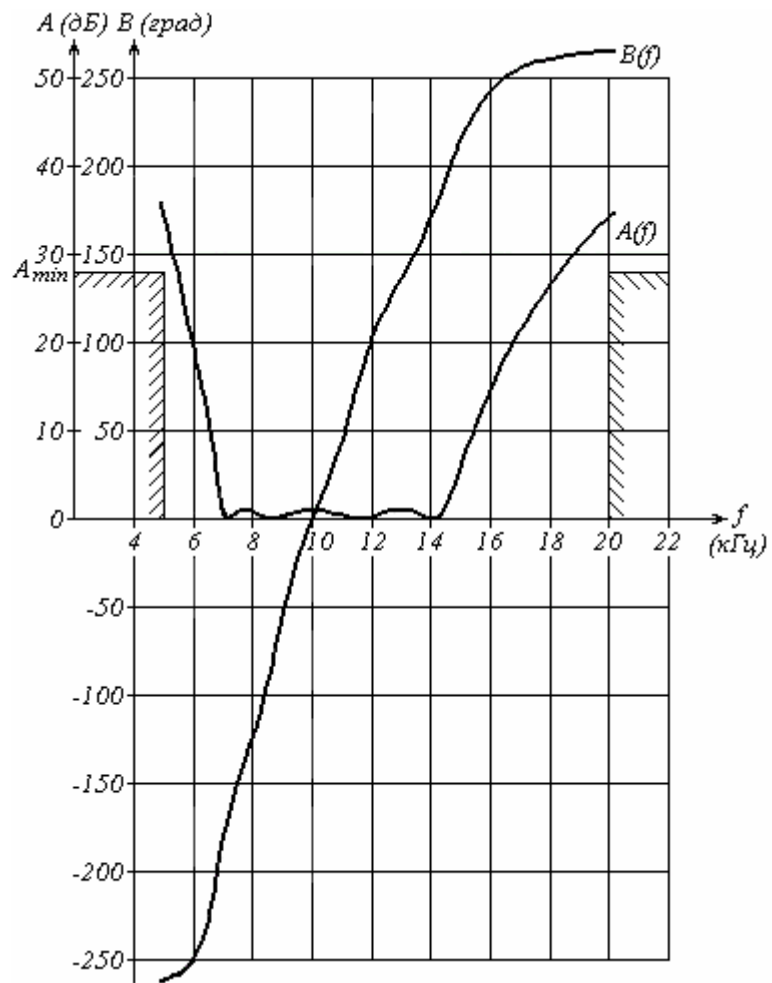


Рис. 6.2 Графики зависимости рабочего ослабления и рабочей фазы полосового фильтра.

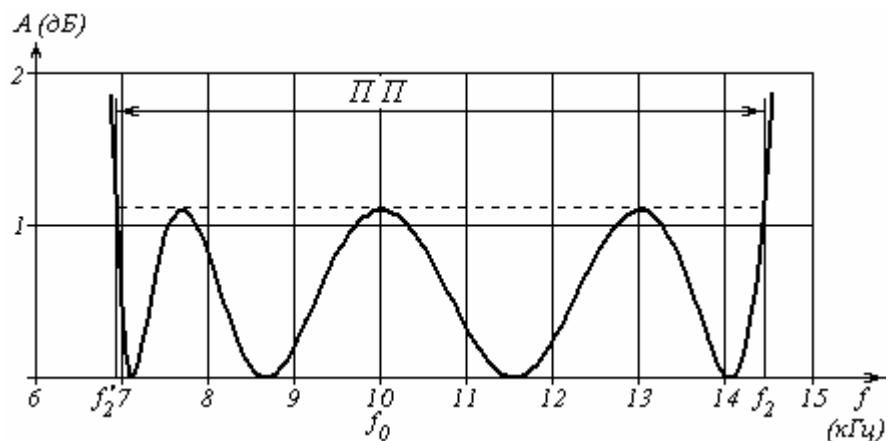


Рис. 6.3 Графики зависимости рабочего ослабления полосового фильтра в полосе пропускания.

В [Оглавление](#) **Ошибка! Закладка не определена.** [Оглавление](#)

В

[Оглавление](#)

## 6.2. Расчёт характеристик фильтра на ЭВМ

### 6.2.1. Расчёт частотных характеристик фильтра на ЭВМ

Как было отмечено выше, наиболее полной проверкой правильности расчета спроектированного фильтра является расчет частотных зависимостей  $A(f)$  и  $B(f)$  по передаточной функции  $T(j\omega)$ , выраженной через элементы фильтра. Фильтр представляет собой реактивный четырехполюсник лестничной структуры. С учетом источника сигнала с внутренним сопротивлением  $R_1$  и сопротивления нагрузки  $R_2$  полная схема имеет вид, представленный на рис.6.3.

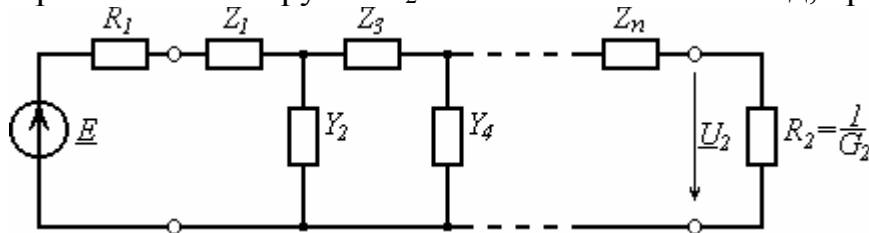


Рис. 6.3 Представление фильтра в виде четырехполюсника с лестничной структурой.

Рабочая передаточная функция такой схемы может быть определена следующим образом:

$$T(j\omega) = \frac{1}{\Delta(j\omega)} 2\sqrt{\frac{R_1}{R_2}}, \quad (6.9)$$

где

$$\Delta(j\omega) = \begin{vmatrix} R_1 + Z_1(j\omega) & 1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 \\ -1 & Y_2(j\omega) & 1 & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & -1 & Z_3(j\omega) & 1 & | & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & Y_4(j\omega) & | & 0 & 0 \\ - & - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & Z_n(j\omega) & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & -1 & G_2 \end{vmatrix}$$

Так как двухполюсник в продольных и поперечных ветвях лестничной схемы являются реактивными, то после раскрытия по строке или столбцу континуант  $\Delta(j\omega)$  будет иметь вещественную и мнимую часть:

В результате выражение (6.9) примет вид:

$$\begin{aligned} \Delta(j\omega) &= a + jb \\ T(j\omega) &= \frac{2\sqrt{R_1 G_2}}{a + jb} \end{aligned} \quad (6.10)$$

Рабочее ослабление фильтра с учетом выражения (6.10) может быть рассчитано так:

$$A(\omega) = 20 \lg \frac{1}{|T(j\omega)|} = 20 \lg \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2\sqrt{R_1 G_2}} \quad (6.11)$$

Так как в ряде случаев при проектировании фильтров предъявляются требования к фазовым характеристикам, то может возникнуть необходимость проверочного расчета частотной зависимости рабочей фазы  $B(f)$  в соответствии с выражением:

$$B(\omega) = \arg \frac{I}{T(j\omega)} = \operatorname{arctg} \frac{b}{a} \quad (6.12)$$

Нахождение континуанта  $\Delta(j\omega)$  и расчет вручную в соответствии с выражениями (6.11) и (6.12) частотных характеристик  $A(f)$  и  $B(f)$  являются достаточно громоздкими и длительными по выполнению. Поэтому расчеты рекомендуется выполнять на ЭВМ в программе MathCAD По следующему алгоритму:

1. Ввести величины элементов и обозначить  $j = \sqrt{-1}$ .
2. Записать  $\Delta(j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f)$  в соответствии со своей схемой и  $T(j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f)$  по выражению (6.9)
3. Записать формулы для  $A(f)$  и  $B(f)$  через  $T(j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f)$ .
4. Построить графики  $A(f)$  и  $B(f)$ , используя графическую палетку.
5. Вычислить рабочие ослабление и фазу на нужных частотах ( $0.., f_2, f_3$ )
6. Сделать выводы о выполнении требований к фильтру.

### 6.2.2 Расчет временных характеристик на ЭВМ

Для расчета временных характеристик, например переходной характеристики  $h(t)$ , необходимо получить операторное выражение этой характеристики  $H(p) = T_u(p)/p$ , где  $T_u(p)$  — операторный коэффициент передачи по напряжению разработанного фильтра. Для этого нужно записать  $\Delta(p)$  для своей схемы, используя операторные сопротивления и проводимости продольных и поперечных ветвей фильтра.

Тогда  $T_u(p) = 1/\Delta(p)$ .

Переходная характеристика может быть найдена как оригинал операторного выражения  $h(t) + 1/(\Delta(p) \cdot p)$ .

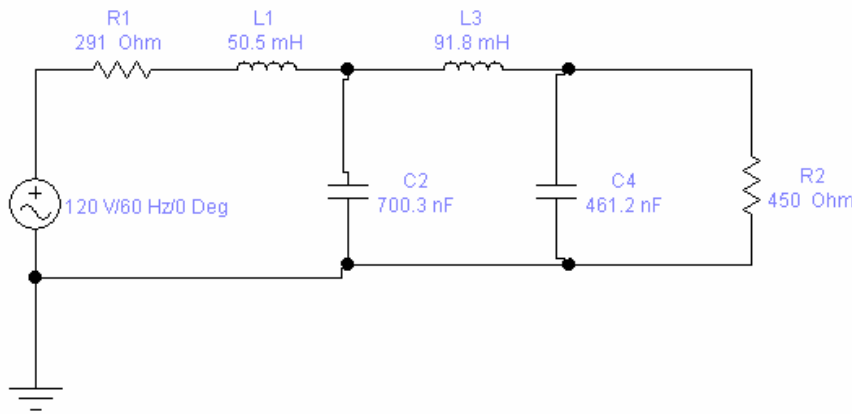
Для расчета на ЭВМ в программе MathCAD рекомендуется следующий порядок:

1. Ввести величины элементов и записать  $\Delta(p)$ .
2. Записать формулу для  $H(p)$  через  $\Delta(p)$ .
3. Найти  $h(t)$ , используя методы символического вычисления и обратного преобразования Лапласа.
4. Построить график  $h(t)$ , используя графический интерфейс.

### 6.2.3. Пример расчета

Ниже приведен пример расчета характеристик ФНЧ Чебышева 4 порядка с  $\Delta A = 0,2 \text{ дБ}$ ,  $f_2 = 1000 \text{ Гц}$ ,  $f_3 = 2400 \text{ Гц}$ ,  
 $A_{\min} = 30 \text{ дБ}$  с использованием MathCAD 2001.





Сначала записывают исходные данные путем присвоения.

$R1=291$ ,  $R2=450$ ,  $L1=0.0605$ ,  $C2=7,002 \cdot 10^{-7}$ ,  $L3=0,0918$ ,  $C4=4,612 \cdot 10^{-7}$ ,  $j = \sqrt{-1}$   
 Далее записывают присвоением матрицу схемы фильтра, причем для ускорения расчетов матрица (континуант) сразу записана в операторном виде.

$$\Delta(p) = \begin{pmatrix} R1 + pL1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & pC2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & pL3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & pC4 + \frac{1}{R2} \end{pmatrix} \quad T_u(p) = \frac{I}{|\Delta(p)|} \quad \text{Здесь знак } | \quad |$$

используется для вычисления определителя по матрице, потом записывают присвоением формулу рабочего ослабления.

$$A(f) = 20 \log \left( \frac{I}{|T_u(j2\pi f)| \cdot 2 \sqrt{\frac{R1}{R2}}} \right) \quad \text{Здесь знак } | \quad | \text{ используется для вычисления}$$

модуля функции. Графики зависимости рабочего ослабления для полос непропускания и пропускания приведены на рис.6.4 и 6.5.

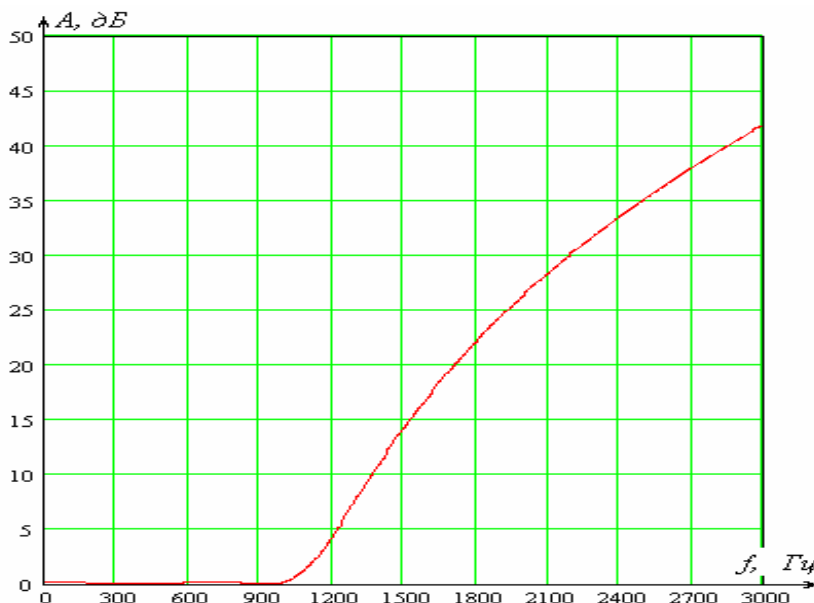


Рис.6.4 Графики зависимости рабочего ослабления синтезируемого фильтра.

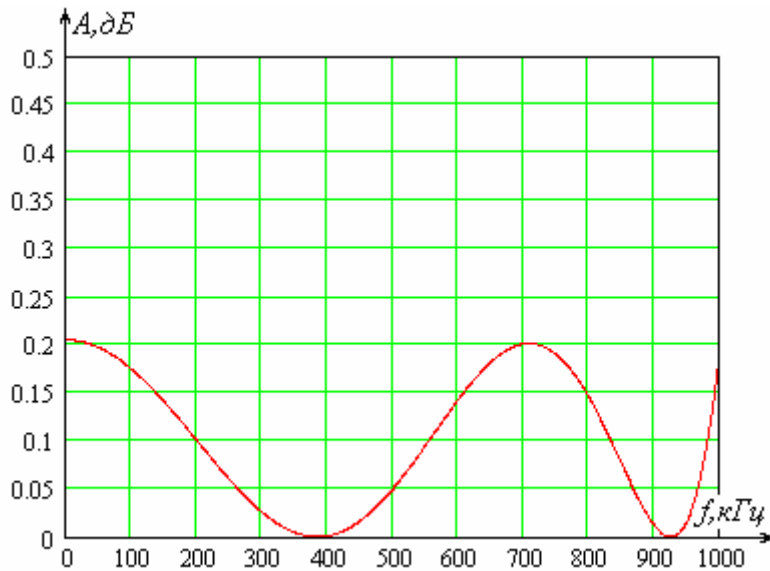


Рис.6.5 Графики зависимости рабочего ослабления синтезируемого фильтра в полосе пропускания. Далее вычисляют, используя знак равенства, ослабление на конкретных контрольных частотах:

$$A(0) = 0.205 \quad A(1000) = 0.195 \quad A(2400) = 33.598$$

Как видно из графиков и данных вычислений ослабления требования к фильтру выполняются достаточно хорошо.

Mathcad иногда сразу не считает ослабление, тогда надо вводить промежуточные обозначения.  $i := \sqrt{-1}$

$$\begin{aligned}
 \underline{D}(f) &:= |\Delta(2\pi \cdot f \cdot i)| \\
 D1(f) &:= |D(f)| \\
 D(0) &= 1.647 \\
 D1(0) &= 1.647 \\
 \underline{A}(f) &:= 20 \log \left( \frac{D1(f)}{2 \sqrt{\frac{R1}{R2}}} \right)
 \end{aligned}$$

Расчет фазовой характеристики

$$B(f) := \arg \left( \frac{1}{T(2\pi \cdot f \cdot i)} \right)$$

или  $\underline{B}(f) := \arg(D(f))$

$$B(0) = 0 \quad B(1000) = -3.121$$

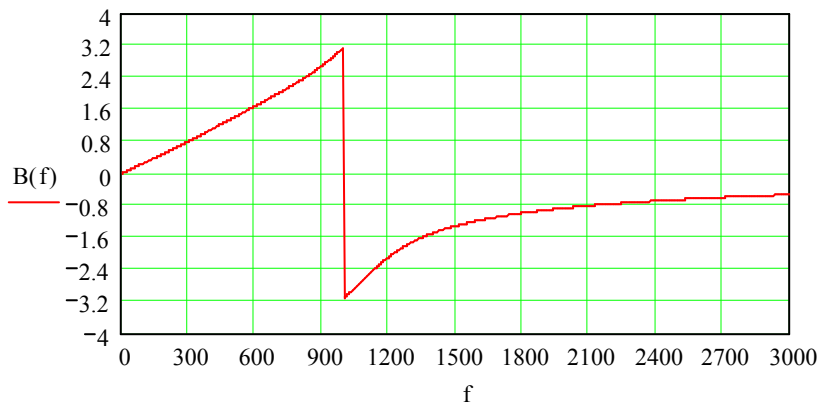


График рабочей фазы в радианах .

В инженерной практике расчеты ведут в градусах и график должен быть непрерывным возрастающим (стремиться к  $90^{\circ} \cdot 4 = 360^{\circ}$  по критерию устойчивости Михайлова). С учетом этого график следует достроить вручную параллельным переносом

Можно воспользоваться программированием операндом Add Line и if.

$$B(f) := \arg\left(\frac{1}{T(2\pi \cdot f \cdot i)}\right) \cdot \frac{180}{\pi}$$

$$B1(x) := \begin{cases} 0 & \text{if } x < 0 \\ \arg\left(\frac{1}{T(2\pi \cdot x \cdot i)}\right) \cdot \frac{180}{\pi} & \text{if } 0 \leq B(x) \\ \arg\left(\frac{1}{T(2\pi \cdot x \cdot i)}\right) \cdot \frac{180}{\pi} + 360 & \text{if } B(x) < 0 \end{cases}$$

$$B1(1000) = 181.166 \quad B1(0) = 0 \quad B1(3000) = 329.297$$

$$B1(100000) = 359.122$$

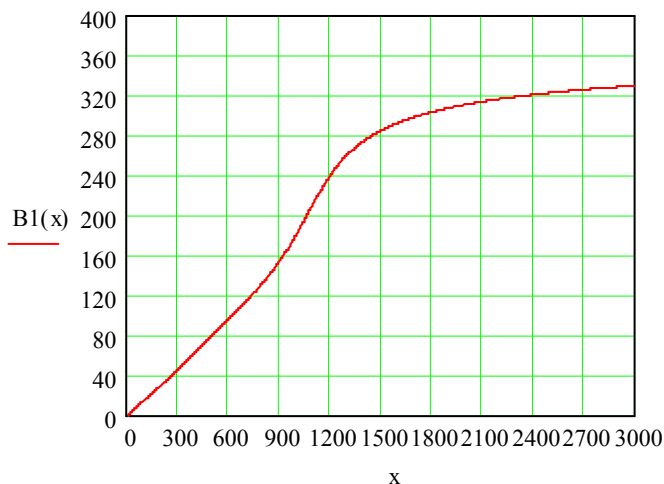


График фазовой характеристики ФНЧ

Для вычисления переходной характеристики использованы следующие выражения :

$$H(p) := \frac{Tu(p)}{p} \quad H(p) \text{ invlaplace, } p$$

Здесь используется палетка “Символика”, которая дает возможность получить оригинал по изображению (обратное преобразование Лапласа). Само выражение  $h(t)$  получается очень громоздким, далее показан график этой функции (рис. 6.6)

$$h(t) := [(.60728744939271255061 - .85680841975860964597 \cdot \exp(-3403.402788444322496 \cdot t) \cdot \cos(2792.3879810124948703 \cdot t) - .$$

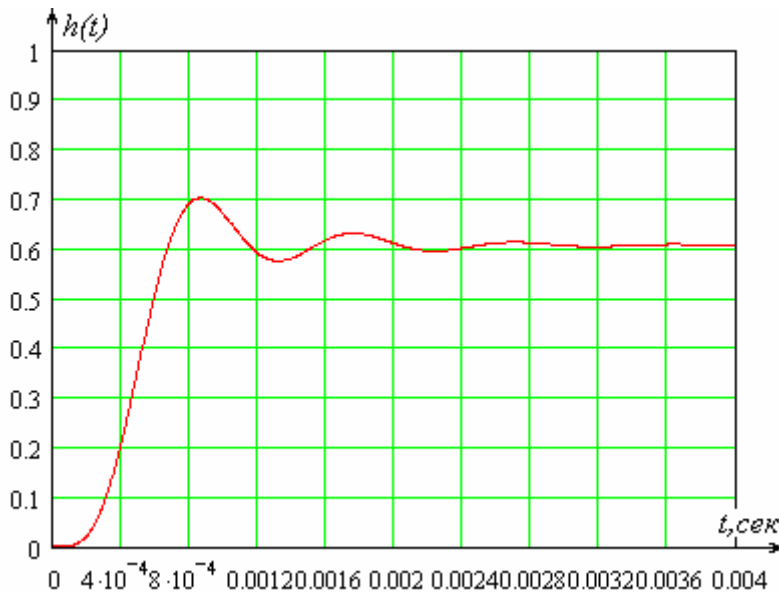


Рис.6.6 График переходной характеристики  $h(t)$  ФНЧ.

Используя переходную характеристику можно выполнить расчет отклика фильтра  $u(t)$  на прямоугольный импульс с амплитудой 1 В и длительностью  $4 \cdot 10^{-4}$  с

$$u(t) := \begin{cases} h(t) & \text{if } 0 \leq t \leq 4 \cdot 10^{-4} \\ (h(t) - h(t - 4 \cdot 10^{-4})) & \text{if } t > 4 \cdot 10^{-4} \end{cases}$$

Здесь применяется палетка “Программирование” и операнд Add Line. График выходного напряжения показан на рис.6.7



Рис.6.7 График зависимости выходного напряжения при подаче на вход прямоугольного импульса

### Расчет спектров

Расчет спектра амплитуд последовательности прямоугольных импульсов можно осуществить по формуле

$$U_k := \left( 2 \frac{U_1}{\pi \cdot k} \right) \cdot \left| \sin \left( \pi \cdot \frac{k}{N} \right) \right|$$

где  $U_1=1$  В - амплитуда импульсов,  $N=T/t_u=5$  –скважность,  $k$ – номер гармоники (1.....10) Постоянная составляющая считается отдельно и она равна  $U_0=U_1/N$ .

Спектр фаз последовательности при выборе начала координат в середине

$$\Psi_k := \begin{cases} 0 & \text{if } \sin\left(k \cdot \frac{\pi}{N}\right) > 0 \\ \pi & \text{if } \sin\left(k \cdot \frac{\pi}{N}\right) < 0 \end{cases}$$

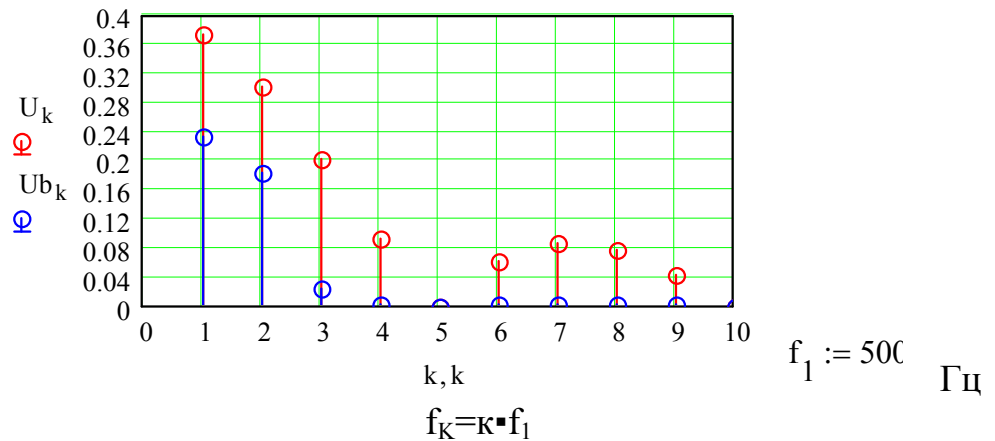
импульса определяется выражением  
 При выборе начала координат в начале импульса необходимо добавлять к фазе каждой гармонике слагаемое  $(-2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_1 \cdot t_u / 2)$ .

Выходные спектры определяются выражениями

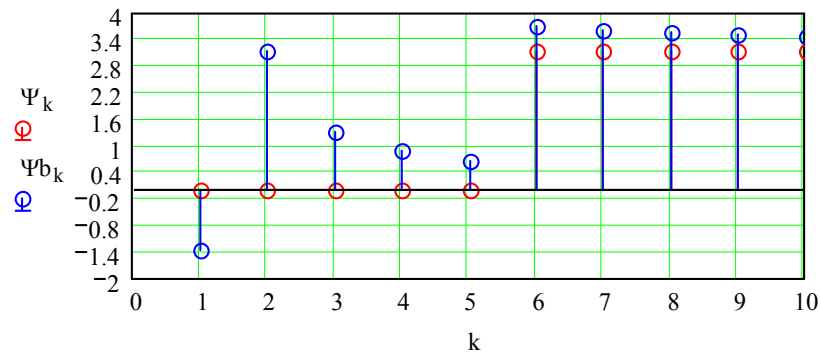
$$U_{b_k} := U_k \cdot \left| \text{Tu}(2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_1 \cdot j) \right|, \quad d1_k := \arg(\text{Tu}(2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_1 \cdot j)),$$

$$\Psi_{b_k} := \Psi_k + d1_k,$$

где  $f_1$  – частота следования импульсов (частота 1 гармоники).



Амплитудно- частотный спектр последовательности прямоугольных импульсов на входе и выходе ФНЧ при скважности 5, амплитуде 1 В и граничной частоте ПП 1000 Гц. Здесь нет  $U_0$ , ее надо дорисовать



Спектры фаз входной и выходной последовательности импульсов

Сигнал на выходе ФНЧ рассчитывается по формуле

$$u_2(t) := U_0 \cdot \text{Tu}(0) + \sum_{k=1}^{10} U_{b_k} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_1 \cdot t + \Psi_{b_k})$$

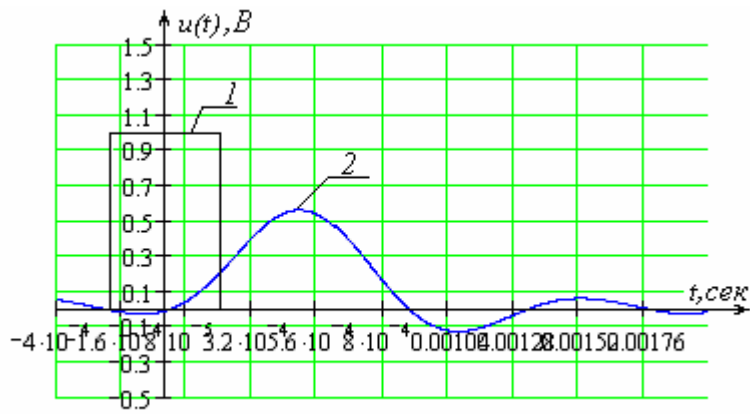
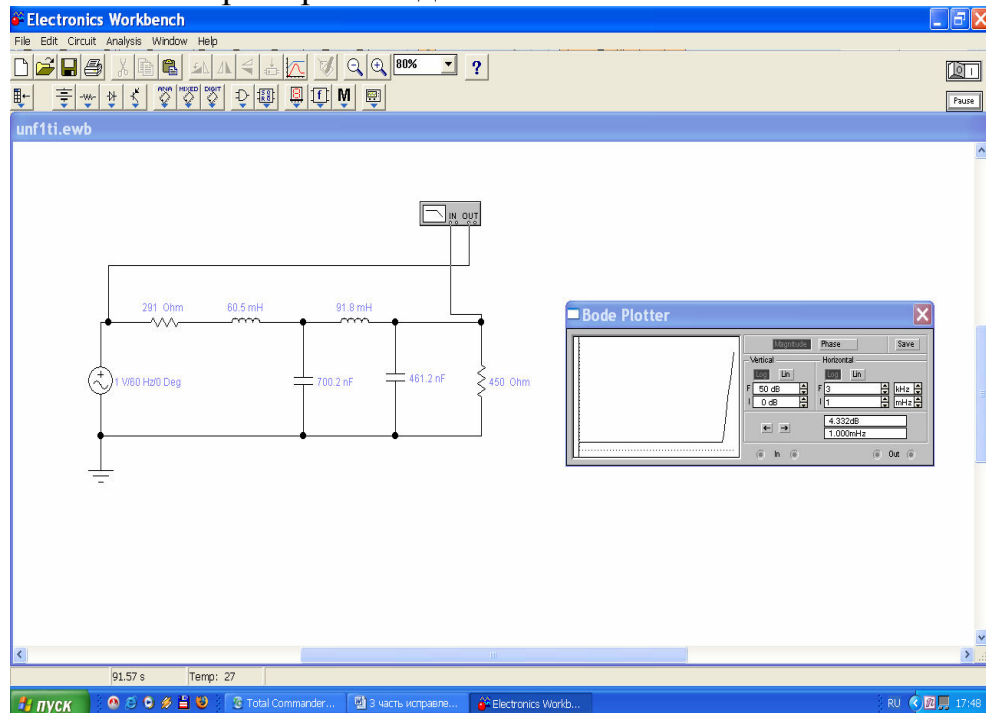


Рис. 6.8 Графики напряжения на входе фильтра (1) и выходе фильтра (2) .

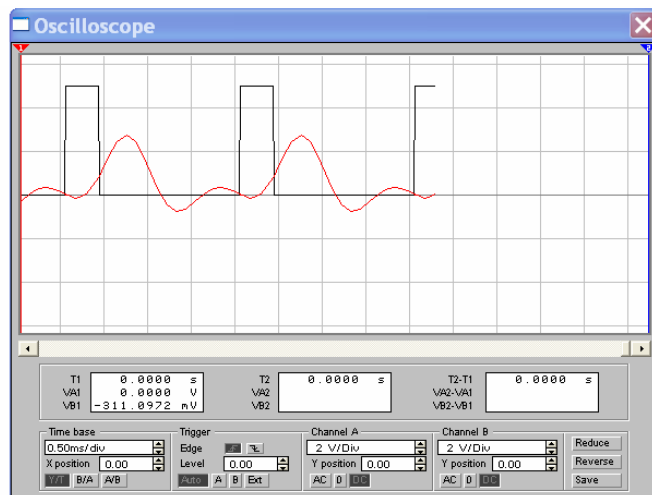
Для ФВЧ и ПФ  $T(0)=0$ , поэтому на выходе не будет постоянной составляющей.(следует исключить это слагаемое в расчетной формуле выходного напряжения).

В [Оглавление](#)

### Пример исследования ФНЧ в EWB-5.

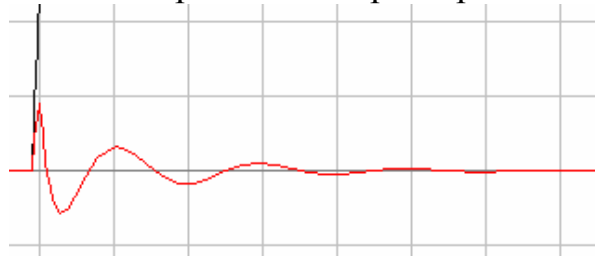


Характеристика ослабления ФНЧ



Отклик ФНЧ на последовательность импульсов

Примерный вид переходной характеристики для ФВЧ



## 7. ПРИЛОЖЕНИЯ

### 7.1. ЗАДАНИЕ К КУРСОВОЙ РАБОТЕ ПО ОТЦ-3 “РАСЧЕТ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ФИЛЬТРОВ ПО РАБОЧИМ ПАРАМЕТРАМ”

1. Спроектировать электрический фильтр по заданному варианту.
2. Получить с учетом нагрузочных сопротивлений формулы коэффициента передачи фильтра  $T(p)$  и рабочего коэффициента передачи  $Tr(p)$  через денормированные величины элементов.
3. Рассчитать  $Ar$  и  $Bp$  через полученный рабочий коэффициент передачи  $Tr(p)$  при  $p=j\omega$ .
4. Рассчитать спектр последовательности прямоугольных импульсов на входе фильтра с параметрами : напряжение (э.д.с.) источника сигнала  $Uи=1$  В, скважность  $N=T/tи=5$ , частота следования импульсов  $fи=0,5f_2$  для ФНЧ,  $0,5f_3$  для ФВЧ,  $0,5f_0$  для ПФ (не менее 10 гармоник).
5. Рассчитать спектр последовательности прямоугольных импульсов на выходе фильтра через полученный коэффициент передачи  $T(j\omega)$  (10 гармоник).
6. Построить последовательность импульсов на выходе как сумму рассчитанных гармоник.

7. Рассчитать переходную характеристику фильтра  $h(t)$ , используя полученный коэффициент передачи  $T(p)$ .
8. Построить импульс на выходе фильтра, используя  $h(t)$  и  $h(t-t_i)$  и сравнить с полученными импульсами по п.6.

**В**

[Оглавление](#)

## **7.2. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАНИЕ К КУРСОВОЙ РАБОТЕ ПО ОТЦ-3 (для СНИР)**

9. Рассчитать  $A_p$  и  $B_p$  фильтра при отклонении величин элементов на +10% и -10% и сравнить с номинальной характеристикой.
10. Рассчитать  $A_p$  и  $B_p$  с учетом потерь в катушках индуктивностей.
11. Рассчитать  $A_p$  и  $B_p$  с учетом температурных коэффициентов  $L$  катушек и  $C$  конденсаторов.
12. Рассчитать  $A_p$  и  $B_p$  с учетом отклонений нагрузочных сопротивлений на +,-20%.
13. Рассчитать на выходе фильтра спектр и форму импульса с частотным заполнением ( $f=0.5f_2$ ;  $f=f_3 \dots$ ).

**В**

[Оглавление](#)

### **Литература**

1. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи. М.: Гардарики, 1999, с. 167-180.
2. Бакалов В.П., Дмитриков В.Ф., Крук Б.И. Основы теории цепей -М.: Радио и связь, 2000, с.443-474.
3. Ханзел Г. Справочник по расчету фильтров. М.: Сов. Радио, 1974. 288с.
4. Попов П.А. Ускоренный синтез симметричного реактивного четырехполюсника. Радиотехника, т. 29, N 11, 1974.
5. Соколов В.Ф., Клиентова Т.Г., Членова Е.Д. Расчет фильтров по рабочим параметрам. Методическая разработка к курсовой работе по ТЭЦ, ПИИРС, 1992, 68с.
6. Алексеев А.П. Информатика 2001. –М.: Солон - Р, 2001, с. 269-329.
7. Дубинин А.Е., Михайлов В.И., Цаплин Н.Н., Членова Е.Д. Расчет электрических фильтров по рабочим параметрам. Учебное пособие к курсовой работе, ГОУВПО ПГАТИ, Самара,2005.

**В**

[Оглавление](#)