

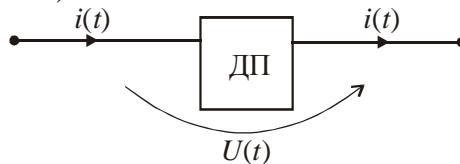
## ОТЦ 3 часть

### 1 лекция

#### Введение в теорию двухполюсников

Под *полюсами* в ЭЦ понимают выводы, их количество (как параметр), через которые данная электрическая цепь соединяется и взаимодействует с другими цепями. По количеству этих выводов (проводников или полюсов) выделяют двухполюсники, трехполюсники, четырёхполюсники и многополюсники.

Еще понятие «полюс» употребляется в математическом смысле для некоторых характеристик электрической цепи: операторных и частотных (значение переменной, когда функция стремится к бесконечности).



#### Классификация двухполюсников

По своим свойствам двухполюсники делятся на автономные и неавтономные. Автономными являются двухполюсники, которые самостоятельно создают напряжение на разомкнутых зажимах или ток при замкнутых зажимах, то есть без внешних подключений. Неавтономные двухполюсники сами по себе ничего не создают.

Также двухполюсники можно разделить на линейные (только линейные элементы) и нелинейные. У линейных двухполюсников свойства не зависят от величин токов и напряжений в двухполюснике.

Также можно произвести деление двухполюсников на активные и пассивные. Активные двухполюсники отдают больше энергии, чем потребляют; пассивные двухполюсники больше потребляют, чем отдают. В данном случае вводят понятие средней мощности: 
$$P_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T iudt$$

Для пассивных двухполюсников  $P_{cp} \geq 0$ , а для активных –  $P_{cp} < 0$ .

По элементам можно разделить двухполюсники с элементами с сосредоточенными параметрами (R, L, C элементы) и с распределёнными параметрами (например, длинными линиями).

Можно выделить двухполюсники без потерь энергии (реактивные, содержащие L, C элементы), двухполюсники с малыми потерями (содержат катушки индуктивности, конденсаторы) и двухполюсники с потерями энергии (диссипативные, то есть содержат резисторы).

В общем случае при нахождении характеристик двухполюсников используют операторные функции, то есть операторное напряжение и операторный ток.

#### Операторное сопротивление двухполюсника и его свойства

Под операторным сопротивлением двухполюсника понимают операторного изображения напряжения к операторному изображению тока через двухполюсник. 
$$Z(p) = \frac{U(p)}{I(p)}$$

Операторное сопротивление представляет собой некоторую функцию комплексной переменной  $p = \sigma + j\omega$ . Эта функция зависит от типа двухполюсника. Она может быть трансцендентной функцией, если в двухполюснике имеется участок с распределёнными параметрами, и рациональной, если таких участков нет.

В дальнейшем будем рассматривать только двухполюсники без участков с распределёнными параметрами, то есть рациональные функции.

Если при каком-то  $p$  сопротивление  $Z(p) = 0$ , то это называется нулем сопротивления двухполюсника. Если при каком-то  $p$  сопротивление  $Z(p) = \infty$ , то это называется полюсом. Для пассивных двухполюсников все нули и полюсы располагаются в левой полуплоскости комплексной переменной  $p$ . В крайнем случае, могут быть нули и полюсы на мнимой оси.

Полиномы, у которых нули располагаются в левой полуплоскости, называют полиномами Гурвица. Если двухполюсник пассивный, то цепь будет устойчивой; если двухполюсник активный, то цепь может быть и неустойчивой.

Для пассивных двухполюсников функция сопротивления или проводимости является положительной вещественной функцией. Она вещественна, если  $p$  – вещественная величина, её вещественная часть положительна, когда положительна вещественная часть  $p$ .

Из операторного сопротивления можно получить комплексное:

$$Z(p) \Big|_{p=j\omega} = \underline{Z}(\omega) = Z(\omega) e^{j\varphi(\omega)} = R(\omega) + jX(\omega)$$

Для пассивных двухполюсников  $R(\omega) \geq 0$ , а для активных может выполняться соотношение:  $R(\omega) < 0$ .  $P(\omega) = I^2 R(\omega) = UI \cos \varphi(\omega)$

Функции  $Z(\omega)$ ,  $\varphi(\omega)$ ,  $R(\omega)$ ,  $X(\omega)$  являются частотными характеристиками.

Используя определённый математический аппарат от операторных функций можно перейти к временным функциям и получить временные характеристики двухполюсника, которые оценивают реакцию двухполюсника на стандартное воздействие. Для пассивного двухполюсника по свободным составляющим эта реакция должна носить затухающий характер, то есть стремиться к 0 (за исключением крайнего случая, когда какие-то нули или полюсы располагаются на мнимой оси).

Простейшие двухполюсники имеют сопротивления  $R$ ,  $pL = j\omega L$ ,  $\frac{1}{pC} = \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C}$ .

Сложные двухполюсники состояются из различных комбинаций простых.

Активные двухполюсники содержат по схемам замещения управляемые или зависимые источники. Автономные двухполюсники содержат независимые источники.

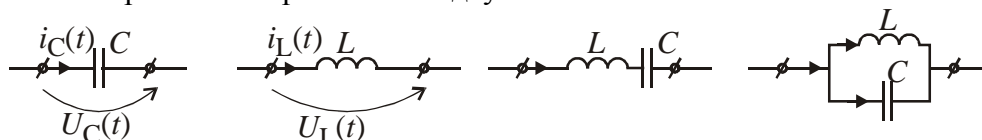
### Реактивные двухполюсники

Реактивные двухполюсники содержат только реактивные элементы (L и C). В принципе они неавтономные и могут быть линейными и нелинейными. Эти двухполюсники относят к разряду пассивных, так как они, сколько получают энергии, столько отдают. Соответственно все нули и полюсы располагаются на мнимой оси.

Практически, для реальных цепей реактивные двухполюсники – это двухполюсники из катушек индуктивности и конденсаторов (двухполюсники с малыми потерями).

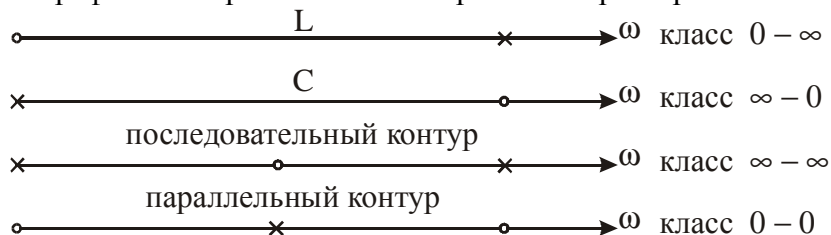
### Простейшие реактивные двухполюсники

Схемы простейших реактивных двухполюсников:



У всех реактивных двухполюсников комплексное сопротивление чисто мнимое:  $\underline{Z}(\omega) = jX(\omega)$ . Соответственно мнимая часть или реактивное сопротивление характеризует частотные свойства двухполюсника.

Иногда вместо графиков сопротивлений изображают характеристические оси:



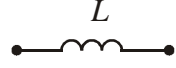

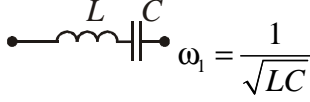
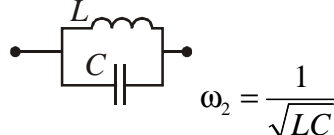
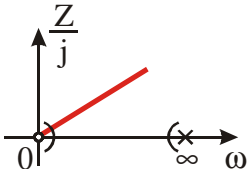
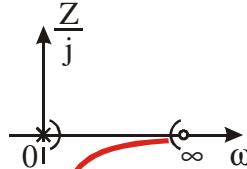
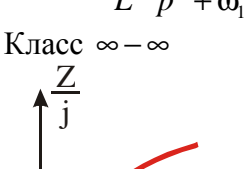
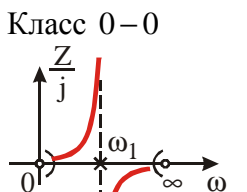
Значение величины сопротивления реактивного двухполюсника в крайних точках, на крайних частотах 0 и  $\infty$  называют классом реактивного двухполюсника.

Все это касается и сложных двухполюсников, которые являются комбинацией простых.

Функция  $X(\omega)$  – всегда возрастающая в математическом смысле, то есть её производная по частоте – положительная.

Так как активных сопротивлений в этих схемах нет, то комплексное сопротивление реактивных двухполюсников не содержит активной составляющей и является мнимым:  $\underline{Z} = \pm jX$ ,

то есть содержит только реактивную составляющую. Реактивные двухполюсники представляют собой идеализированную модель реальных двухполюсников, составленных из катушек индуктивностей и конденсаторов.

			
$Z(p) = pL$ $Z(j\omega) = j\omega L$ $Y(p) = \frac{1}{pL}$ Класс 0 – ∞ 	$Z(p) = \frac{1}{pC}$ $Z(j\omega) = \frac{1}{j\omega C}$ $Y(p) = pC$ Класс ∞ – 0 	$Z(p) = pL + \frac{1}{pC} = \frac{L(p^2 + \omega_1^2)}{p}$ $Z(j\omega) = \frac{H \cdot (\omega_1^2 - \omega^2)}{j\omega}$ $Y(p) = \frac{p}{L} \cdot \frac{1}{p^2 + \omega_1^2}$ Класс ∞ – ∞ 	$Z(p) = \frac{pL \frac{1}{pC}}{pL + \frac{1}{pC}} = \frac{p}{C} \cdot \frac{1}{p^2 + \omega_2^2}$ $Z(j\omega) = \frac{j\omega H}{\omega_2^2 - \omega^2}$ $Y(p) = \frac{C(p^2 + \omega_2^2)}{p}$ Класс 0 – 0 

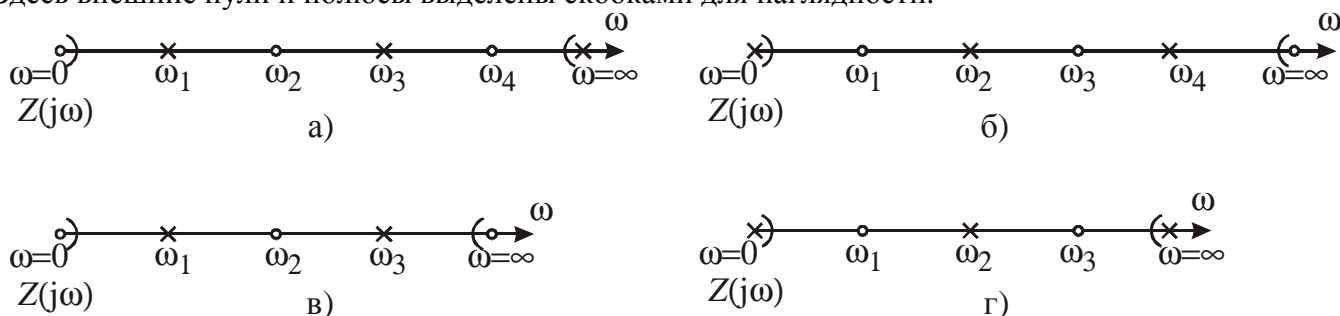
Если на вход реактивного двухполюсника подать гармоническое колебание и менять его частоту, то сопротивление двухполюсника на разных частотах будет иметь различные значения. Зависимость комплексного сопротивления  $\underline{Z}(\omega)$  от частоты называется частотной характеристикой реактивного двухполюсника.

Значение частоты  $\omega$ , при котором функция сопротивления двухполюсника обращается в нуль, называется нулями входного сопротивления. Значение частоты  $\omega$ , при которых функция сопротивления равно бесконечности, называется полюсами функции сопротивления. Нули на графиках обозначают кружочками, полюсы – крестиками.

Во многих случаях, характеризуя частотную зависимость сопротивления реактивного двухполюсника, можно ограничиться графиком, который определяет лишь частоты нулей и полюсов сопротивления. Его называют характеристической строкой двухполюсника (или полюсно–нулевыми диаграммами).

В зависимости от характера сопротивления на концах частотного диапазона ( $\omega = 0$  и  $\omega = \infty$ ), двухполюсники можно разделить на четыре класса. Нумерация класса условна и состоит из двух цифр (0 и ∞). Первая цифра класса определяет величину сопротивления на частоте  $\omega = 0$ , вторая – на частоте  $\omega = \infty$ . Выберем здесь следующую нумерацию классов: 1 класс: (0, ∞); 2 класс: (∞, 0); 3 класс (0, 0); 4 класс (∞, ∞). Нули и полюсы сопротивления двухполюсника можно разделить на внешние, определяемые классом, и собственные (внутренние), определяемые резонансами. Частоты резонанса напряжений являются нулями сопротивления двухполюсника, а частоты резонанса токов – полюсами.

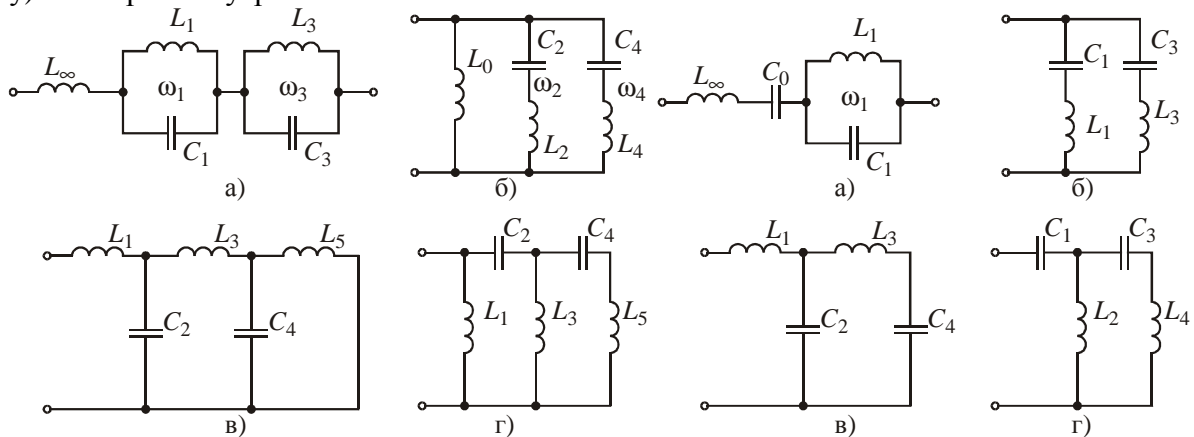
Характеристические строки двухполюсников указанных 4-х классов приведены на рисунке. Здесь внешние нули и полюсы выделены скобками для наглядности.



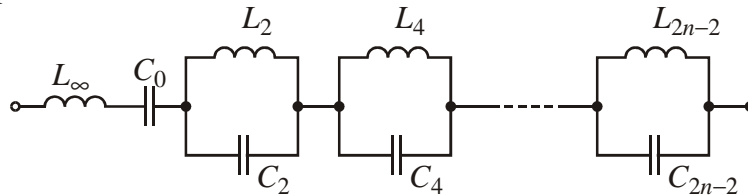
## 2 лекция

### Канонические схемы реактивных двухполосников

**Канонические схемы** – схемы, построенные по определённому правилу (канону). Наиболее распространёнными в теории электрических цепей являются схемы, построенные по правилу (канону) Фостера и Кауэра.



**I схема Фостера** представляется в виде последовательного соединения параллельных колебательных контуров:

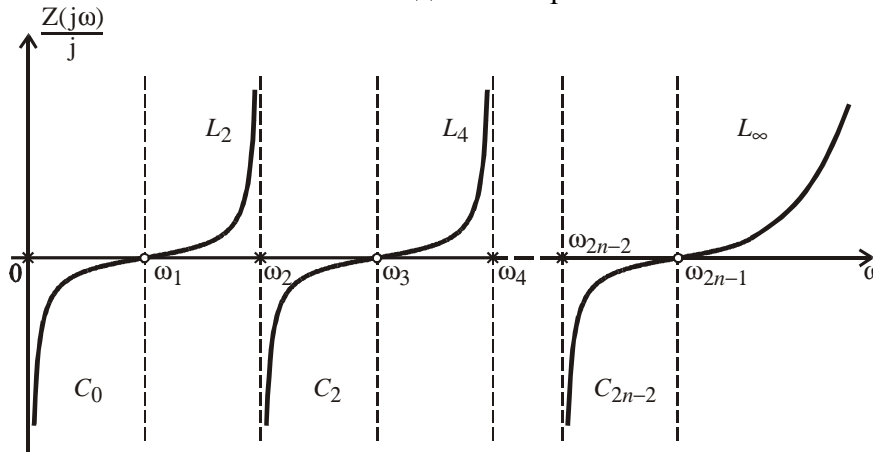


Класс данного двухполосника:  $(\infty, \infty)$

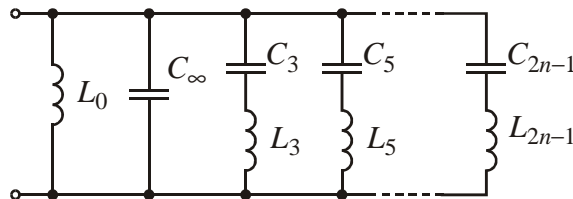
Входное операторное сопротивление имеет вид:

$$Z(p) = H \frac{(p^2 + \omega_1^2)(p^2 + \omega_3^2) \dots (p^2 + \omega_{2n-1}^2)}{p(p^2 + \omega_2^2)(p^2 + \omega_4^2) \dots (p^2 + \omega_{2n-2}^2)}$$

Представим график частотной зависимости входного сопротивления:



**II схема Фостера** представляется в виде параллельного соединения последовательных колебательных контуров:

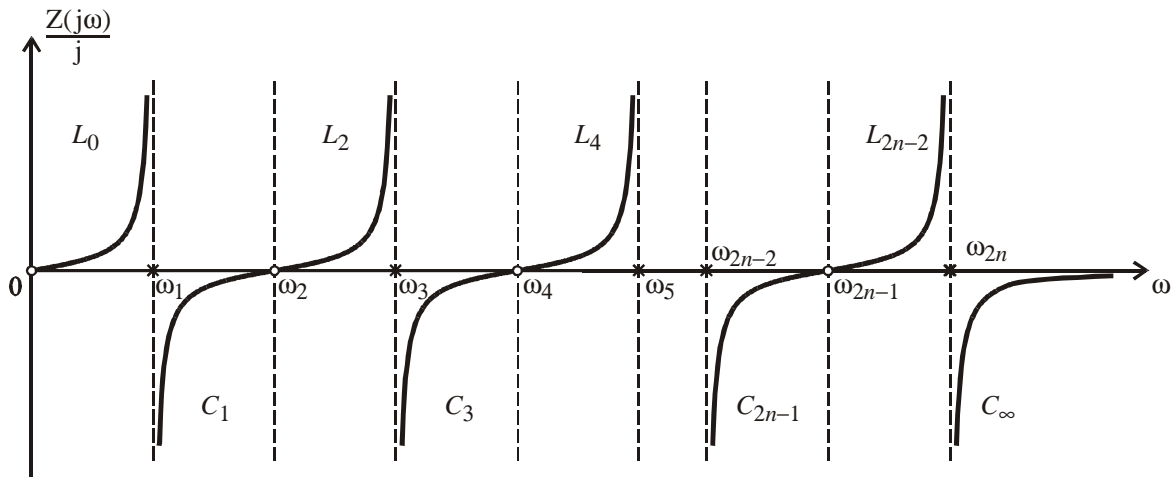


Класс данного двухполосника:  $(0, 0)$

Входное операторное сопротивление имеет вид:

$$Z(p) = H \frac{p(p^2 + \omega_3^2)(p^2 + \omega_5^2) \dots (p^2 + \omega_{2n-1}^2)}{(p^2 + \omega_2^2)(p^2 + \omega_4^2) \dots (p^2 + \omega_{2n}^2)}$$

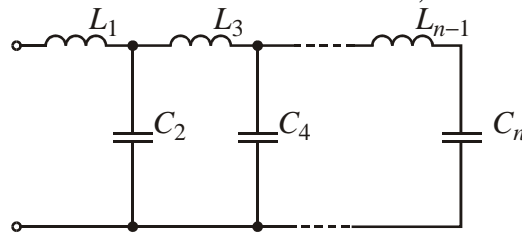
Представим график частотной зависимости входного сопротивления:



В схемах Кауэра двухполюсники представлены в виде цепочных (лестничных) схем.

**I схема Кауэра** представляется в следующем виде:

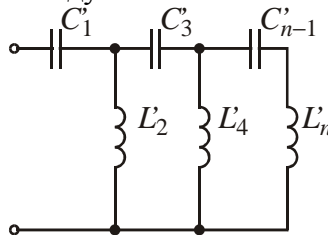
- а) в продольных плечах располагаются индуктивные элементы;
- б) в поперечных плечах располагаются ёмкостные элементы;



Класс данного двухполюсника:  $(\infty, \infty)$

**II схема Кауэра** представляется в следующем виде:

- а) в продольных плечах располагаются ёмкостные элементы;
- б) в поперечных плечах располагаются индуктивные элементы;



Класс данного двухполюсника:  $(\infty, \infty)$

Входные операторные сопротивления записываются аналогично, как и по схемам Фостера.

Основные общие свойства реактивных двухполюсников вытекают из формулы Фостера.

- 1) Если известно расположение нулей и полюсов реактивного двухполюсника (то есть известна характеристическая строка), его частотная характеристика определяется с точностью до постоянного множителя  $H$ .
- 2) Нули и полюсы сопротивления, то есть частоты резонансов напряжений и токов чередуются. Это же относится и к нулям и полюсам класса.
- 3) В зависимости от величины сопротивления двухполюсника на частоте  $\omega = 0$  множитель  $j\omega$  записывается либо в числителе (для 1 и 3 классов), либо в знаменателе (для 2 и 4 классов).
- 4) В числителе  $\underline{Z}(\omega)$  стоят скобки с частотами резонансов напряжений, которые являются нулями входного сопротивления. В знаменателе  $\underline{Z}(\omega)$  стоят скобки с частотами резонансов токов (полюсов сопротивления).
- 5) Входное сопротивление  $\underline{Z}(\omega)$  возрастает (в алгебраическом смысле) с ростом частоты, то есть

$$\frac{d \frac{\underline{Z}(\omega)}{j}}{d\omega} > 0$$



### 3 лекция

#### Синтез реактивных двухполосников

**Синтез** – это создание электрической цепи по заданным требованиям.

Основные этапы синтеза:

1. Установление требований.
2. Математическое описание требований к цепи.
3. Разработка схемы цепи и расчёт величин элементов.
4. Проверка соответствия цепи заданным требованиям.
5. При практической реализации необходимо провести миниатюризацию цепи и измерение её параметров.

Синтез реактивных двухполосников заключается в разработке схем и расчёте величин элементов. При этом должны выполняться условия физической реализуемости и требования к цепи. Обычно синтез реактивных двухполосников ведётся по какой-либо из канонических схем.

#### Синтез по схемам Фостера

Математически процедура **синтеза по I схеме Фостера** основана на разложении функции входного операторного сопротивления в ряд Лорана в следующем виде:

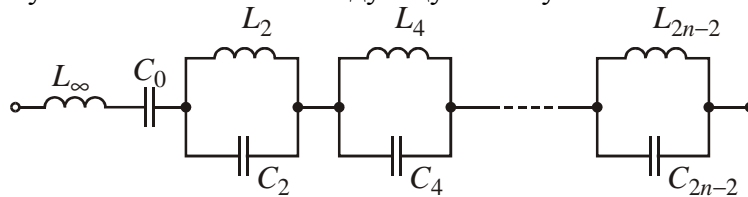
$$Z(p) = pL_\infty + \frac{1}{pC_0} + \sum_{k=1}^n \frac{p}{C_{2k-2}(p^2 + \omega_{2k-2}^2)},$$

Причём неизвестные коэффициенты определяются по следующим соотношениям:

$$L_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{Z(p)}{p}, \quad \frac{1}{C_0} = \lim_{p \rightarrow 0} Z(p)p,$$

$$\frac{1}{C_{2k-2}} = \lim_{p^2 \rightarrow -\omega_{2k-2}^2} \frac{p^2 + \omega_{2k-2}^2}{p} Z(p), \quad L_{2k-2} = \frac{1}{\omega_{2k-2}^2 C_{2k-2}}.$$

Далее, подставляем полученные значения в следующую схему:



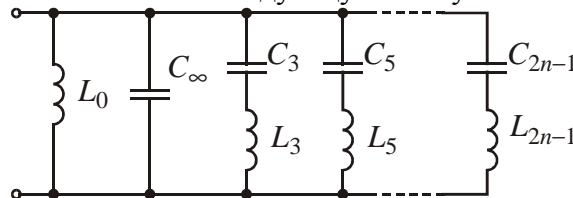
Процедура **синтеза по II схеме Фостера** основана на разложении функции входной операторной проводимости в ряд Лорана в следующем виде:

$$Y(p) = \frac{1}{Z(p)} = pC_\infty + \frac{1}{pL_0} + \sum_{k=1}^n \frac{p}{L_{2k-1}(p^2 + \omega_{2k-1}^2)},$$

Причём неизвестные коэффициенты определяются по следующим соотношениям:

$$C_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{Y(p)}{p}, \quad \frac{1}{L_0} = \lim_{p \rightarrow 0} Y(p)p, \quad \frac{1}{L_{2k-1}} = \lim_{p^2 \rightarrow -\omega_{2k-1}^2} \frac{p^2 + \omega_{2k-1}^2}{p} Y(p), \quad C_{2k-1} = \frac{1}{\omega_{2k-1}^2 L_{2k-1}}.$$

Далее, подставляем полученные значения в следующую схему:



#### Синтез по схемам Кауэра.

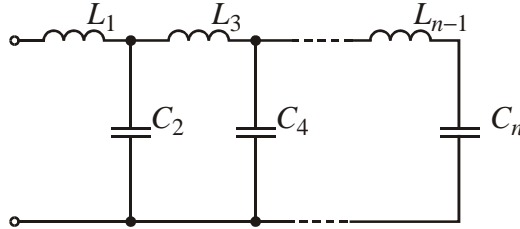
**Синтез по I схеме Кауэра** заключается в разложении функции операторного сопротивления в цепную дробь с выделением целой части по переменной  $p$ . (Разложение по положительным степеням). Для входной реактивной функции сопротивления необходимо полином числителя и знаменателя расположить в порядке убывания по степеням. За делительное принимается полином высшей степени. Если такой полином находится в числителе функции  $Z(p)$ , то схема начинается с продольного плеча с элементом  $pL$ . В противном случае синтез ведётся по функции  $Y(p)$ , следовательно, схема начинается с поперечного плеча с элементом  $\frac{1}{pC}$ .

Цепная дробь записывается в следующем виде:

$$Z(p) = Z_1(p) + \frac{1}{Y_2(p) + \frac{1}{Z_3(p) + \frac{1}{Y_4(p) + \dots}}}$$

где  $Z_1(p) = pL_1$ ,  $Y_2(p) = pC_2$ ,  $Z_3(p) = pL_3$ ,  $Y_4(p) = pC_4$  и т.д.

Далее, подставляем полученные значения при  $p$  в следующую схему:

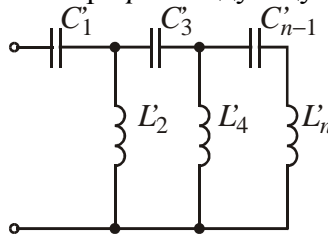


**Синтез по П схеме Кауэра** заключается в разложении функции операторного сопротивления в цепную дробь по отрицательным степеням. Полиномы числителя и знаменателя располагаются по возрастанию. Начинают деление с низшей степени  $p$ .

$$Z'(p) = Z'_1(p) + \frac{1}{Y'_2(p) + \frac{1}{Z'_3(p) + \frac{1}{Y'_4(p) + \dots}}}$$

где  $Z'_1(p) = \frac{1}{pC'_1}$ ,  $Y'_2(p) = \frac{1}{pL'_2}$ ,  $Z'_3(p) = \frac{1}{pC'_3}$ ,  $Y'_4(p) = \frac{1}{pL'_4}$  и т.д.

Далее, подставляем полученные значения при  $p$  в следующую схему:



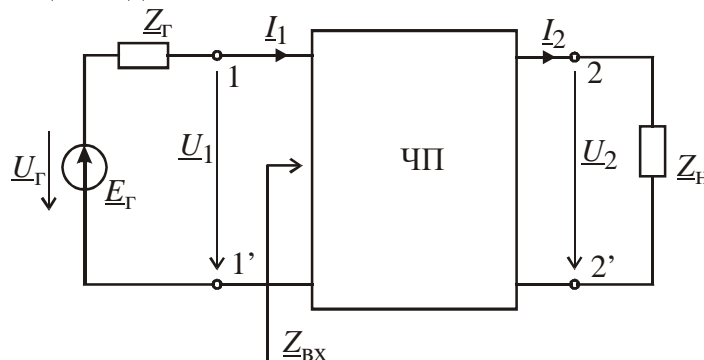
### Понятие о четырёхполюсниках и их классификация

**Четырёхполюсником** (ЧП) называют электрическую цепь (или её часть), имеющую две пары зажимов для подключения к источнику и приемнику электрической энергии.

**Входные зажимы** – зажимы, к которым подключается источник электрической энергии.

**Выходные зажимы** – зажимы, к которым подключается приемник электрической энергии.

ЧП изображают в следующем виде:

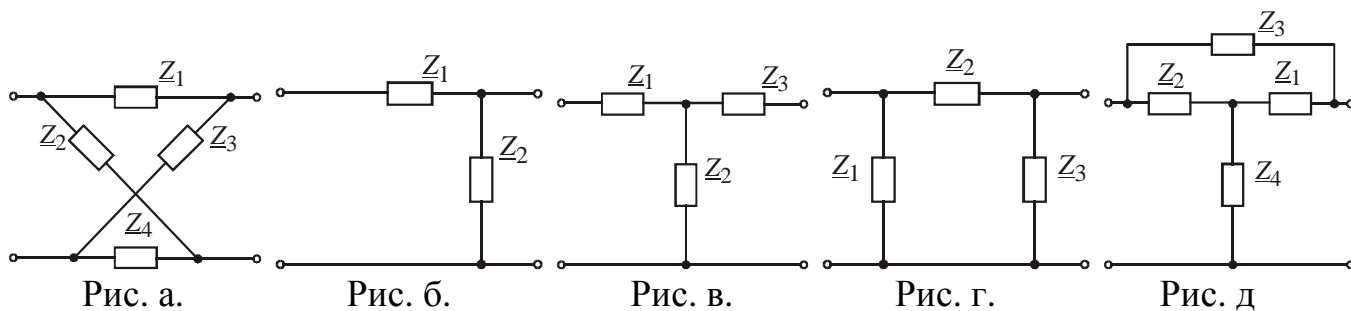


#### Классификация ЧП по типу

1. Линейные и нелинейные ЧП.
2. Автономные и неавтономные ЧП.
3. Активные и пассивные ЧП.
4. Обратимые и необратимые ЧП.
5. Симметричные и несимметричные ЧП.
6. Уравновешенные и неуравновешенные ЧП.

#### Классификация ЧП по структуре

1. Мостовые ЧП (рис. а).
2. Г-образные ЧП (рис. б).
3. Т-образные ЧП (рис. в).
4. П-образные ЧП (рис. г).
5. Т-перекрытые ЧП (рис. д)



Уравнения передачи и внутренние параметры четырёхполюсников.

Уравнения передачи ЧП – уравнения, дающие зависимость между входными и выходными напряжениями и токами. Параметры ЧП – величины, связывающие в уравнениях передачи напряжения и токи. Уравнения передачи ЧП существуют в шести формах:

1. Уравнения передачи в **Z-параметрах**. 
$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{Z} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} \text{ или } \begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{Z}_{11}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{12}\underline{I}_2 \\ \underline{U}_2 = \underline{Z}_{21}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{22}\underline{I}_2 \end{cases}.$$

$\underline{Z}_{11} = \left( \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} \right)_{\underline{I}_2=0} = \underline{Z}_{1X}$  – входное сопротивление при разомкнутых выходных зажимах (2, 2').

$\underline{Z}_{12} = \left( \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2} \right)_{\underline{I}_1=0}$  – взаимное сопротивление при разомкнутых входных зажимах (1, 1').

$\underline{Z}_{21} = \left( \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_1} \right)_{\underline{I}_2=0}$  – взаимное сопротивление при разомкнутых выходных зажимах (2, 2').

$\underline{Z}_{22} = \left( \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} \right)_{\underline{I}_1=0} = \underline{Z}_{2X}$  – выходное сопротивление при разомкнутых входных зажимах (1, 1').

2. Уравнения передачи в **Y-параметрах**. 
$$\begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{Y} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} \text{ или } \begin{cases} \underline{I}_1 = \underline{Y}_{11}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{12}\underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 = \underline{Y}_{21}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{22}\underline{U}_2 \end{cases}.$$

$\underline{Y}_{11} = \left( \frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_1} \right)_{\underline{U}_2=0} = \underline{Y}_{1K}$  – входная проводимость при замкнутых выходных зажимах (2, 2').

$\underline{Y}_{12} = \left( \frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_2} \right)_{\underline{U}_1=0}$  – взаимная проводимость при замкнутых входных зажимах (1, 1').

$\underline{Y}_{21} = \left( \frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_1} \right)_{\underline{U}_2=0}$  – взаимная проводимость при замкнутых выходных зажимах (2, 2').

$\underline{Y}_{22} = \left( \frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_2} \right)_{\underline{U}_1=0} = \underline{Y}_{2K}$  – выходная проводимость при замкнутых входных зажимах (1, 1').

3. Уравнения передачи в **A-параметрах**. 
$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} \text{ или } \begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{A}_{11}\underline{U}_2 + \underline{A}_{12}\underline{I}_2 \\ \underline{I}_1 = \underline{A}_{21}\underline{U}_2 + \underline{A}_{22}\underline{I}_2 \end{cases}.$$

$\underline{A}_{11} = \left( \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} \right)_{\underline{I}_2=0}$  – обратный коэффициент передачи по напряжению при Х.Х.

$\underline{A}_{12} = \left( \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2} \right)_{\underline{U}_2=0}$  – взаимное сопротивление при замкнутых выходных зажимах (2, 2').

$\underline{A}_{21} = \left( \frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_2} \right)_{\underline{I}_2=0}$  – взаимная проводимость при разомкнутых выходных зажимах (2, 2').

$\underline{A}_{22} = \left( \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} \right)_{\underline{U}_2=0}$  – обратный коэффициент передачи по току при К.З.



4. Уравнения передачи в **В-параметрах**. 
$$\begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} \text{ или } \begin{cases} \underline{U}_2 = \underline{B}_{11}\underline{U}_1 + \underline{B}_{12}\underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 = \underline{B}_{21}\underline{U}_1 + \underline{B}_{22}\underline{I}_1 \end{cases}$$

5. Уравнения передачи в **Н-параметрах**. 
$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{H} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} \text{ или } \begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{H}_{11}\underline{I}_1 + \underline{H}_{12}\underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 = \underline{H}_{21}\underline{I}_1 + \underline{H}_{22}\underline{U}_2 \end{cases}$$

6. Уравнения передачи в **F-параметрах**. 
$$\begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{F} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} \text{ или } \begin{cases} \underline{I}_1 = \underline{F}_{11}\underline{U}_1 + \underline{F}_{12}\underline{I}_2 \\ \underline{U}_2 = \underline{F}_{21}\underline{U}_1 + \underline{F}_{22}\underline{I}_2 \end{cases}$$

**Самостоятельно!!!** Определить оставшиеся параметры и их физический смысл.

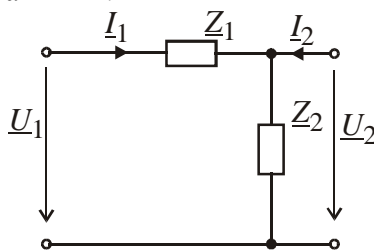
Свойства и способы определения параметров четырёхполюсников.

Основные свойства параметров ЧП:

1. Параметры определяются только схемой ЧП и её элементов.
2. Между параметрами существует взаимная связь (см. Шебес, стр. 330)
3. Обратимый ЧП характеризуется не более чем тремя независимыми параметрами:  
 $\underline{Z}_{11}, \underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21}, \text{ и } \underline{Z}_{22}; \underline{Y}_{11}, \underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21} \text{ и } \underline{Y}_{22}; \underline{H}_{11}, \underline{H}_{12} = -\underline{H}_{21}, \text{ и } \underline{H}_{22};$   
 $\underline{F}_{11}, \underline{F}_{12} = -\underline{F}_{21} \text{ и } \underline{F}_{22}; \underline{A}_{11}\underline{A}_{22} - \underline{A}_{12}\underline{A}_{21} = 1; \underline{B}_{11}\underline{B}_{22} - \underline{B}_{12}\underline{B}_{21} = 1;$
4. Обратимый симметричный ЧП имеет только два независимых параметра:  
 $\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_{22}, \underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21}, \underline{Y}_{11} = \underline{Y}_{22}, \underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21}.$
5. Параметры ЧП имеют определённый физический смысл.

Способы определения параметров ЧП

1. Составление уравнений по законам Кирхгофа (либо по МКТ или по МУН) и представлением их решения в виде одной из форм уравнений передачи.
2. По значениям напряжений и токов в режимах Х.Х. и К.З.
3. Разбивкой сложного ЧП на более простые ЧП, параметры которых известны.
4. Эквивалентными преобразованиями.



$$\underline{Z}_{11} = \left( \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} \right)_{\underline{I}_2=0} = \frac{\underline{I}_1(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)}{\underline{I}_1} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2; \quad \underline{Z}_{22} = \left( \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} \right)_{\underline{I}_1=0} = \frac{\underline{I}_2 \underline{Z}_2}{\underline{I}_2} = \underline{Z}_2;$$

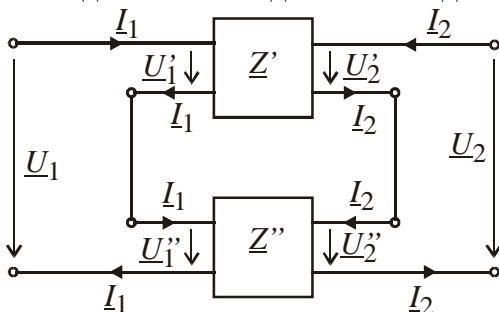
$$\underline{Z}_{12} = \left( \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2} \right)_{\underline{I}_1=0} = \frac{\underline{I}_2 \underline{Z}_2}{\underline{I}_2} = \underline{Z}_2; \quad \underline{Z}_{21} = \left( \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_1} \right)_{\underline{I}_2=0} = \frac{\underline{I}_1 \underline{Z}_2}{\underline{I}_1} = \underline{Z}_2.$$

## 4 лекция

Способы соединений четырёхполюсников.

### 1. Последовательное соединение ЧП

Последовательно соединяются входные и выходные зажимы.



$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix}.$$

Матрица токов одинакова. Напряжения складываются.  $\mathbf{U} = \mathbf{U}' + \mathbf{U}'' = \mathbf{Z}' \cdot \mathbf{I} + \mathbf{Z}'' \cdot \mathbf{I}$

Получаем:  $\mathbf{U} = (\mathbf{Z}' + \mathbf{Z}'')\mathbf{I}$

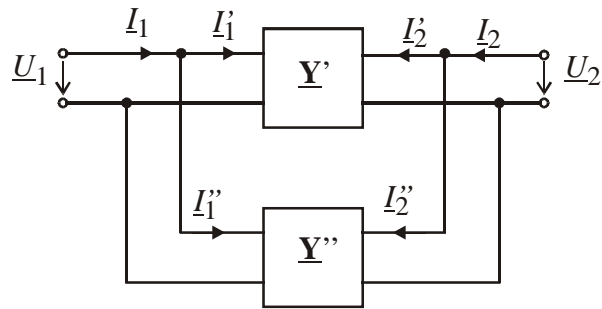
**Вывод:** при последовательном соединении ЧП матрица сопротивлений эквивалентного ЧП равна сумме матриц сопротивлений соединенных ЧП.

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}' + \mathbf{Z}'' = \begin{bmatrix} \underline{Z}'_{11} + \underline{Z}''_{11} & \underline{Z}'_{12} + \underline{Z}''_{12} \\ \underline{Z}'_{21} + \underline{Z}''_{21} & \underline{Z}'_{22} + \underline{Z}''_{22} \end{bmatrix}.$$

**2. Параллельное соединение ЧП**

Входные и выходные зажимы соединяются параллельно. При этом, целесообразно использовать матрицы проводимостей.

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}' + \mathbf{Y}'' = \begin{bmatrix} \underline{Y}'_{11} + \underline{Y}''_{11} & \underline{Y}'_{12} + \underline{Y}''_{12} \\ \underline{Y}'_{21} + \underline{Y}''_{21} & \underline{Y}'_{22} + \underline{Y}''_{22} \end{bmatrix}.$$



Матрица напряжений одинакова. Токи складываются.  $\mathbf{I} = \mathbf{I}' + \mathbf{I}'' = \mathbf{Y}' \cdot \mathbf{U} + \mathbf{Y}'' \cdot \mathbf{U}$   
 Получаем:  $\mathbf{I} = (\mathbf{Y}' + \mathbf{Y}'') \mathbf{U}$ .

**Вывод:** при параллельном соединении ЧП матрица проводимостей эквивалентного ЧП равна сумме матриц проводимостей соединенных ЧП.

**3. Последовательно-параллельное соединение ЧП**

Входные зажимы соединяются последовательно, а выходные – параллельно. При этом используются уравнения в H-параметрах.

**Самостоятельно построить схему последовательно-параллельного соединения!**

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}' + \mathbf{H}'' = \begin{bmatrix} \underline{H}'_{11} + \underline{H}''_{11} & \underline{H}'_{12} + \underline{H}''_{12} \\ \underline{H}'_{21} + \underline{H}''_{21} & \underline{H}'_{22} + \underline{H}''_{22} \end{bmatrix}.$$

**4. Параллельно-последовательное соединения ЧП**

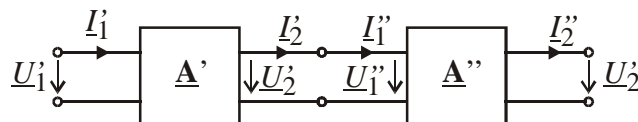
Входные зажимы соединяются параллельно, а выходные – последовательно. При этом используются уравнения в F-параметрах.

**Самостоятельно построить схему параллельно-последовательного соединения!**

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}' + \mathbf{F}'' = \begin{bmatrix} \underline{F}'_{11} + \underline{F}''_{11} & \underline{F}'_{12} + \underline{F}''_{12} \\ \underline{F}'_{21} + \underline{F}''_{21} & \underline{F}'_{22} + \underline{F}''_{22} \end{bmatrix}.$$

**5. Каскадное соединение ЧП**

При каскадном соединении выходное напряжение первого ЧП равно входному напряжению второго  $\underline{U}'_2 = \underline{U}''_1$ . Необходимо согласовать направления токов – выходного первого ЧП и входного второго так, чтобы  $\underline{I}'_2 = \underline{I}''_1$ . Удобно использовать уравнения в A-параметрах.



$$\mathbf{A} = \mathbf{A}' \times \mathbf{A}''.$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \underline{A}'_{11} & \underline{A}'_{12} \\ \underline{A}'_{21} & \underline{A}'_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \underline{A}''_{11} & \underline{A}''_{12} \\ \underline{A}''_{21} & \underline{A}''_{22} \end{bmatrix}.$$

Указанные формулы нахождения матриц сложных ЧП справедливы лишь при выполнении **условий регулярности** их соединений. Соединение ЧП **регулярно**, если токи, протекающие через оба первичных и оба вторичных зажима каждого ЧП, равны по величине и обратны по направлению.

Параметры холостого хода и короткого замыкания. Входное сопротивление четырёхполюсника. Параметры ХХ и КЗ можно представить в виде:

$$\underline{Z}_{1X} = \underline{Z}_{11}, \underline{Z}_{2X} = \underline{Z}_{22}, \underline{Z}_{1K} = \frac{1}{\underline{Y}_{11}}, \underline{Z}_{2K} = \frac{1}{\underline{Y}_{22}}.$$

Этих параметров достаточно для описания обратимого ЧП.

$$\frac{\underline{Z}_{1K}}{\underline{Z}_{1X}} = \frac{\underline{Z}_{2K}}{\underline{Z}_{2X}}. \text{ – условие обратимости ЧП.}$$

Для симметричного обратимого ЧП выполняется условие:

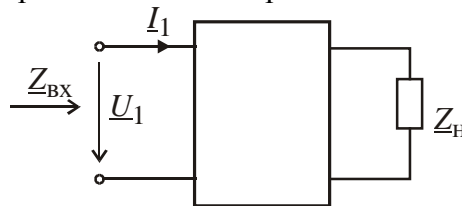
$$\underline{Z}_{1K} = \underline{Z}_{2K}, \underline{Z}_{1X} = \underline{Z}_{2X}.$$

**Вывод:** симметричный обратимый ЧП определяется 2 независимыми параметрами.

Параметры ХХ и КЗ могут быть выражены через любую систему коэффициентов, например через коэффициенты А:

$$\underline{Z}_{1K} = \frac{A_{12}}{A_{22}}, \underline{Z}_{2K} = \frac{A_{12}}{A_{11}}, \underline{Z}_{1X} = \frac{A_{11}}{A_{21}}, \underline{Z}_{2X} = \frac{A_{22}}{A_{21}}.$$

**Входное сопротивление ЧП** – сопротивление со стороны входных зажимов ЧП.



$$\underline{Z}_{\text{BX1}} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{A_{11}U_2 + A_{12}I_2}{A_{21}U_2 + A_{22}I_2}.$$

Поскольку  $\underline{Z}_H = \frac{U_2}{I_2}$ , то получаем:  $\underline{Z}_{\text{BX1}} = \frac{A_{11}\underline{Z}_H + A_{12}}{A_{21}\underline{Z}_H + A_{22}}.$

Входное сопротивление с другой стороны ЧП определяется в виде:

$$\underline{Z}_{\text{BX2}} = \frac{A_{22}\underline{Z}_H + A_{12}}{A_{21}\underline{Z}_H + A_{11}}.$$

На практике удобна формула для входного сопротивления через параметры ХХ и КЗ:

**Согласованное включение и характеристические сопротивления ЧП.**

Режим **согласованного включения** является наиболее благоприятным при передаче сигналов, поскольку при этом отсутствуют отражения электрической энергии на стыках «генератор-четырёхполюсник» и «четырёхполюсник-нагрузка» и искажение сигнала. Отсюда следует, что в режиме согласования должны выполняться условия:

$$\underline{Z}_{\text{BX1}} = \underline{Z}_r, \underline{Z}_{\text{BX2}} = \underline{Z}_H.$$

Существует пара сопротивлений, для которых выполняются выше указанные условия. Эти сопротивления называются **характеристическими** и обозначаются:

$\underline{Z}_{c1}$  – сопротивление, определяемое со стороны входных зажимов.

$\underline{Z}_{c2}$  – сопротивление, определяемое со стороны выходных зажимов.

**Режимом согласованного включения ЧП** называется такой режим работы, когда  $\underline{Z}_r = \underline{Z}_{c1}$  и  $\underline{Z}_H = \underline{Z}_{c2}$ . Отсюда следует:  $\underline{Z}_{\text{BX1}} = \underline{Z}_r = \underline{Z}_{c1}$  и  $\underline{Z}_{\text{BX2}} = \underline{Z}_H = \underline{Z}_{c2}$ .

Характеристические сопротивления через А-параметры определяются в виде:

$$\underline{Z}_{c1} = \frac{A_{11}\underline{Z}_{c2} + A_{12}}{A_{21}\underline{Z}_{c2} + A_{22}}, \underline{Z}_{c2} = \frac{A_{22}\underline{Z}_{c1} + A_{12}}{A_{21}\underline{Z}_{c1} + A_{11}}.$$

После алгебраических преобразований получаем:

$$\underline{Z}_{c1} = \sqrt{\frac{A_{11}A_{12}}{A_{21}A_{22}}}, \underline{Z}_{c2} = \sqrt{\frac{A_{22}A_{12}}{A_{21}A_{11}}}.$$

Характеристические сопротивления через параметры ХХ и КЗ определяются в виде:

$$\underline{Z}_{c1} = \sqrt{\underline{Z}_{1X}\underline{Z}_{1K}}, \underline{Z}_{c2} = \sqrt{\underline{Z}_{2X}\underline{Z}_{2K}}.$$

Для обратимого симметричного ЧП выполняется равенство:

$$\underline{Z}_{c1} = \underline{Z}_{c2} = \underline{Z}_c.$$

### Характеристическая мера передачи четырёхполюсника.

При согласованном включении потери энергии будут только в ЧП. Чтобы учесть эти потери вводят **характеристическую меру передачи**, определяемую как:

$$\Gamma_c = \frac{1}{2} \ln \frac{U_1 I_1}{U_2 I_2}.$$

Поскольку  $\underline{U}_1 = \underline{I}_1 \underline{Z}_{c1}$  и  $\underline{U}_2 = \underline{I}_2 \underline{Z}_{c2}$ , то:

$$\Gamma_c = \ln \left( \frac{I_1}{I_2} \sqrt{\frac{Z_{c1}}{Z_{c2}}} \right) = \ln \left( \frac{U_1}{U_2} \sqrt{\frac{Z_{c2}}{Z_{c1}}} \right).$$

Для симметричного обратимого ЧП:

$$\Gamma_c = \ln \frac{I_1}{I_2} = \ln \frac{U_1}{U_2}.$$

Характеристическая мера передачи через А-параметры:

$$\Gamma_c = \ln \left( \sqrt{A_{11} A_{22}} + \sqrt{A_{12} A_{21}} \right).$$

Часто характеристическую меру передачи определяют с помощью гиперболических функций.

Т.к.  $e^{\Gamma_c} = \text{sh} \Gamma_c + \text{ch} \Gamma_c$ , то  $\text{ch} \Gamma_c = \sqrt{A_{11} A_{22}}$ ,  $\text{sh} \Gamma_c = \sqrt{A_{12} A_{21}}$ .

Характеристическая мера передачи через параметры ХХ и КЗ:

$$\text{th} \Gamma_c = \frac{\text{sh} \Gamma_c}{\text{ch} \Gamma_c} = \sqrt{\frac{A_{12}}{A_{22}} \cdot \frac{A_{21}}{A_{11}}} = \sqrt{\frac{Z_{1K}}{Z_{1X}}} = \sqrt{\frac{Z_{2K}}{Z_{2X}}}.$$

Более удобная формула для практики:

$$\Gamma_c = \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{1 + \sqrt{\frac{Z_{1K}}{Z_{1X}}}}{1 - \sqrt{\frac{Z_{1K}}{Z_{1X}}}} \right] = \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{1 + \sqrt{\frac{Z_{2K}}{Z_{2X}}}}{1 - \sqrt{\frac{Z_{2K}}{Z_{2X}}}} \right].$$

Физический смысл характеристической меры передачи:

$$\Gamma_c = \frac{1}{2} \ln \frac{U_1 I_1}{U_2 I_2} = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{|U_1| e^{j\varphi_{u1}}}{|U_2| e^{j\varphi_{u2}}} \cdot \frac{|I_1| e^{j\varphi_{i1}}}{|I_2| e^{j\varphi_{i2}}} \right).$$

После алгебраических преобразований:

$$\Gamma_c = \frac{1}{2} \ln \frac{|U_1 I_1|}{|U_2 I_2|} + j \frac{1}{2} ((\varphi_{u1} - \varphi_{u2}) + (\varphi_{i1} - \varphi_{i2})) = A_c + jB_c, \text{ где}$$

$A_c = \frac{1}{2} \ln \frac{|U_1 I_1|}{|U_2 I_2|} = \ln \frac{S_1}{S_2}$  – характеристическое ослабление. Единица измерения: непер (Нп).

На практике характеристическое ослабление принято вычислять в децибелах (дБ):

$$A_c = 10 \lg \frac{|U_1 I_1|}{|U_2 I_2|} = 10 \lg \frac{S_1}{S_2}.$$

Для обратимого симметричного ЧП:  $A_c = \ln \frac{|U_1|}{|U_2|} = \ln \frac{|I_1|}{|I_2|}$  [Нп],  $A_c = 20 \lg \frac{|U_1|}{|U_2|} = 20 \lg \frac{|I_1|}{|I_2|}$  [дБ].

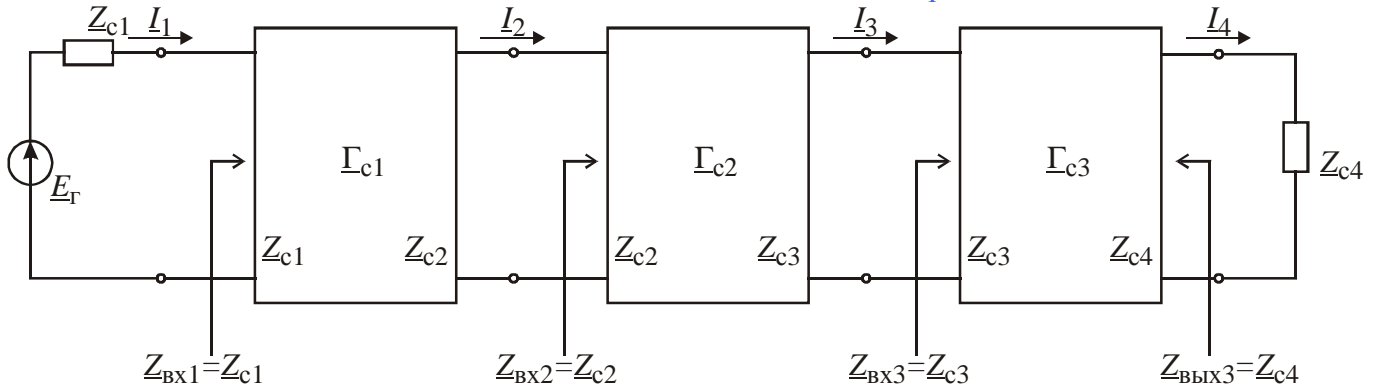
Связь между Нп и дБ: 1 Нп = 8,686 дБ, 1 дБ = 0,115 Нп.

$B_c = \frac{1}{2} ((\varphi_{u1} - \varphi_{u2}) + (\varphi_{i1} - \varphi_{i2}))$  – характеристическая фаза. Единица измерения: рад (град).

**Вывод:** к характеристическим параметрам ЧП относятся:

1. Характеристические сопротивления  $\underline{Z}_{c1}$ ,  $\underline{Z}_{c2}$ .
2. Характеристическая мера передачи  $\Gamma_c$ .
3. Характеристическое ослабление  $A_c$ .
4. Характеристическая фаза  $B_c$ .

### Расчёт каскадного согласованного соединения четырёхполюсников.



**Согласование** четырёхполюсников состоит в том, что характеристические сопротивления со стороны их соединения выбраны равными друг другу, а внутреннее сопротивление генератора и сопротивление нагрузки – равными характеристическим сопротивлениям крайних четырёхполюсников.

Характеристическая мера передачи определяется:

$$\underline{\Gamma}_c = \ln \left( \frac{I_1}{I_4} \sqrt{\frac{Z_{c1}}{Z_{c4}}} \right) = \ln \left( \frac{I_1}{I_2} \cdot \frac{I_2}{I_3} \cdot \frac{I_3}{I_4} \cdot \sqrt{\frac{Z_{c1}}{Z_{c2}}} \cdot \sqrt{\frac{Z_{c2}}{Z_{c3}}} \cdot \sqrt{\frac{Z_{c3}}{Z_{c4}}} \right).$$

После несложных преобразований получаем:

$$\underline{\Gamma}_c = \ln \left( \frac{I_1}{I_2} \sqrt{\frac{Z_{c1}}{Z_{c2}}} \right) + \ln \left( \frac{I_2}{I_3} \sqrt{\frac{Z_{c2}}{Z_{c3}}} \right) + \ln \left( \frac{I_3}{I_4} \sqrt{\frac{Z_{c3}}{Z_{c4}}} \right) = \underline{\Gamma}_{c1} + \underline{\Gamma}_{c2} + \underline{\Gamma}_{c3}.$$

**Вывод:** характеристическая мера передачи результирующего ЧП равна сумме характеристических мер передачи соединяемых ЧП.

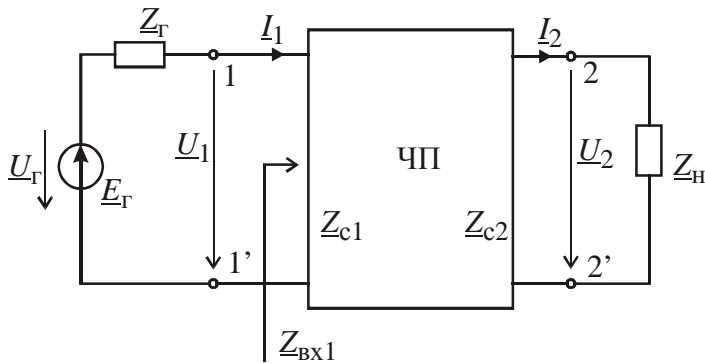
## 5 лекция

### Рабочая мера передачи и передаточная функция четырёхполюсника.

Обеспечить идеальное согласование ЧП с генератором и нагрузкой в широкой полосе частот возможно в случае, когда внутреннее сопротивление генератора, сопротивление нагрузки и характеристические сопротивления являются резистивными. Добиться равенства комплексных сопротивлений на всем частотном диапазоне не удастся. Вследствие этого возникают дополнительные потери энергии.

Рассмотрим работу ЧП в реальных условиях:

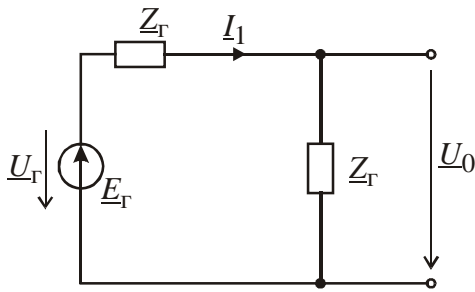
$$\underline{Z}_Г \neq \underline{Z}_{c1}, \underline{Z}_н \neq \underline{Z}_{c2}, \text{ то есть } \underline{Z}_{вх1} \neq \underline{Z}_Г, \underline{Z}_{вых2} \neq \underline{Z}_н.$$



Мощность, выделяемая в нагрузке:

$$\underline{S}_2 = \underline{U}_2 I_2 = \frac{\underline{U}_2^2}{\underline{Z}_н}.$$

Максимальная мощность  $\underline{S}_m$  выделяется на сопротивлении, равном внутреннему сопротивлению генератора по следующей схеме:



$$S_m = U_0 I = I^2 Z_r = \left( \frac{U_r}{2Z_r} \right)^2 Z_r = \frac{U_r^2}{4Z_r}.$$

Рабочая мера передачи определяется в виде:  $\Gamma_p = \frac{1}{2} \ln \frac{U_0 I}{U_2 I_2} = \frac{1}{2} \ln \frac{S_m}{S_2} = A_p + jB_p$ .

$$A_p = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{S_m}{S_2} \right| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{U_r^2 Z_H}{4U_2^2 Z_r} \right| = \ln \left| \frac{U_r}{2U_2} \right| + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{Z_H}{Z_r} \right| - \text{рабочее ослабление (Нп)}.$$

$$A_p = 20 \lg \left| \frac{U_r}{2U_2} \right| + 10 \lg \left| \frac{Z_H}{Z_r} \right| - \text{рабочее ослабление (дБ)}.$$

Теоретически рабочее ослабление вычисляют по формуле:  $A_p = A_c + \Delta A_1 + \Delta A_2 + \Delta A_3$ , где  $A_c$  – характеристическое ослабление ЧП;  $\Delta A_1, \Delta A_2$  – дополнительные ослабления, связанные из-за несогласованности на входе и выходе ЧП:

$$\Delta A_1 = 20 \lg \left| \frac{Z_{c1} + Z_r}{2\sqrt{Z_{c1} Z_r}} \right|, \quad \Delta A_2 = 20 \lg \left| \frac{Z_{c2} + Z_H}{2\sqrt{Z_{c2} Z_H}} \right|.$$

$\Delta A_3$  – дополнительное ослабление за счёт многократного отражения энергии от входных и выходных зажимов ЧП:

$$\Delta A_3 = 20 \lg \left| 1 - \frac{Z_{c1} - Z_r}{Z_{c1} + Z_r} \cdot \frac{Z_{c2} - Z_H}{Z_{c2} + Z_H} e^{-2\Gamma_c} \right|.$$

При **полном согласовании**:  $A_p = A_c$ .

Рабочее ослабление является вещественной частью **рабочей меры передачи**:

$$\Gamma_p = A_p + jB_p, \text{ где } B_p - \text{рабочая фаза.}$$

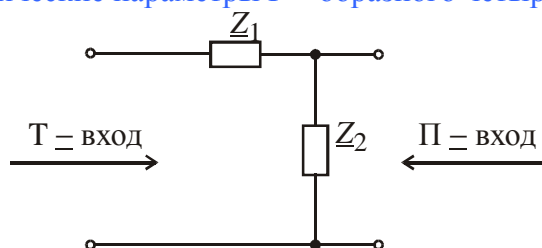
Рабочая передаточная функция определяется в виде:  $T_p = 2 \frac{U_2}{U_r} \sqrt{\frac{Z_r}{Z_H}}$ .

Т.к.  $A_p = \ln \left| \frac{U_r}{2U_2} \right| + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{Z_H}{Z_r} \right|$ , то легко установить следующую связь:  $A_p = \ln \frac{1}{|T_p|}$ .

**Вывод:** к рабочим параметрам ЧП относят:

1. Входное сопротивление  $Z_{вх}$ ;
2. Рабочее ослабление  $A_p$ ;
3. Рабочая мера передачи  $\Gamma_p$ ;
4. Рабочая фаза  $B_p$ ;
5. Рабочая передаточная функция  $T_p$ ;

**Характеристические параметры  $\Gamma$  – образного четырёхполюсника.**



Характеристические сопротивления:

$$\underline{Z}_{c1} = \sqrt{\underline{Z}_{1X} \underline{Z}_{1K}}, \quad \underline{Z}_{c2} = \sqrt{\underline{Z}_{2X} \underline{Z}_{2K}}.$$

$$\underline{Z}_{1X} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2, \quad \underline{Z}_{1K} = \underline{Z}_1.$$

$$\underline{Z}_{2X} = \underline{Z}_2, \quad \underline{Z}_{2K} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}.$$

Отсюда получаем:

$$\underline{Z}_{c1} = \sqrt{\underline{Z}_1 (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)} = \sqrt{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 \left(1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}\right)} = \underline{Z}_T, \quad \underline{Z}_{c2} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{Z}_2} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}}} = \underline{Z}_\Pi.$$

Определим характеристическую меру передачи через  $\Lambda$  – параметры:

$$\text{ch} \Gamma_c = \sqrt{\underline{A}_{11} \underline{A}_{22}}, \quad \text{sh} \Gamma_c = \sqrt{\underline{A}_{12} \underline{A}_{21}}, \quad \text{где}$$

$$\underline{A}_{11} = 1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}, \quad \underline{A}_{12} = \underline{Z}_1, \quad \underline{A}_{21} = \frac{1}{\underline{Z}_2}, \quad \underline{A}_{22} = 1.$$

После подстановки получаем:

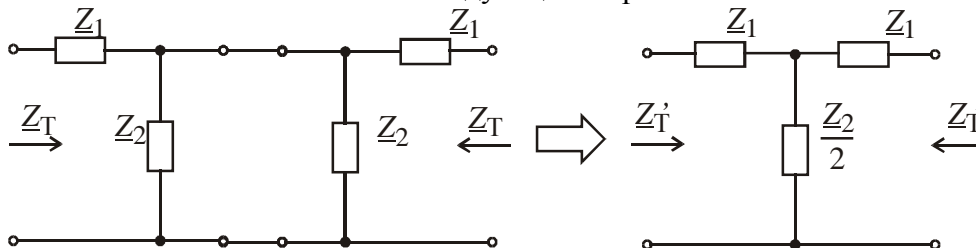
$$\text{ch} \Gamma_c = \sqrt{\left(1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}\right) \cdot 1} = \sqrt{1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}}, \quad \text{sh} \Gamma_c = \sqrt{\underline{Z}_1 \frac{1}{\underline{Z}_2}} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}}.$$

Выучить формулы для  $\Gamma$ -образного ЧП:

$$\underline{Z}_T = \sqrt{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 \left(1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}\right)}, \quad \underline{Z}_\Pi = \sqrt{\frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}}}, \quad \text{ch} \Gamma_c = \sqrt{1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}}, \quad \text{sh} \Gamma_c = \sqrt{\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}}.$$

Характеристические параметры  $\Gamma$  – образного четырёхполюсника.

$\Gamma$ -образный ЧП может быть составлен следующим образом:



Поскольку  $\Gamma$ -образные ЧП соединены согласованно и регулярно, то характеристические параметры  $\Gamma$ -образного ЧП определяются как:

$$\underline{Z}'_T = \underline{Z}_T = \sqrt{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 \left(1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}\right)}, \quad \underline{\Gamma}'_c = 2 \Gamma_c.$$

Поскольку  $\text{ch} \underline{\Gamma}'_c = \text{ch} 2 \Gamma_c = 1 + 2 \text{sh}^2 \Gamma_c$ , а  $\text{sh} \Gamma_c = \sqrt{\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}}$ , то  $\text{ch} \underline{\Gamma}'_c = 1 + 2 \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}$

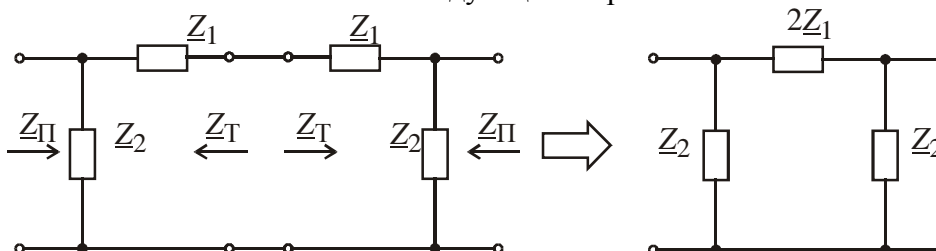
Выучить формулы для  $\Pi$ -образного ЧП:

$$\underline{Z}'_T = \sqrt{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 \left(1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}\right)}, \quad \text{ch} \underline{\Gamma}'_c = 1 + 2 \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}.$$

Поскольку ЧП симметричный, то  $\text{ch} \underline{\Gamma}'_c = \sqrt{\underline{A}_{11} \underline{A}_{22}} = \underline{A}_{11} = 1 + 2 \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}$ .

Характеристические параметры  $\Pi$  – образного четырёхполюсника.

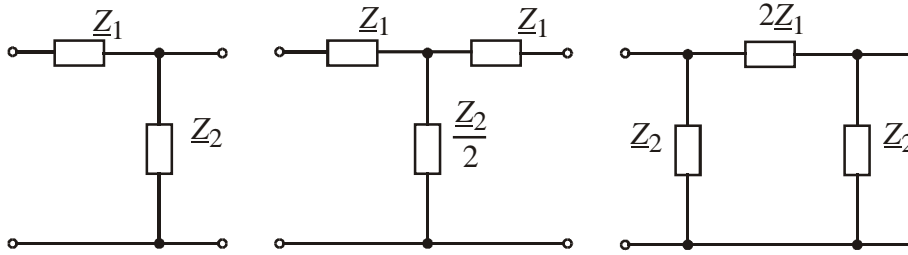
$\Pi$ -образный ЧП может быть составлен следующим образом:



Аналогично, как и для Т-образного ЧП можно показать, что характеристические параметры определяются в виде:

$$\underline{Z}'_{\Pi} = \underline{Z}_{\Pi} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}}}, \operatorname{ch} \Gamma'_c = 1 + 2 \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}. \text{ (Формулы выучить!)}$$

Четырёхполюсники Г, Т и П-образного типов образуют класс **лестничных схем**



Последние 3 схемы находят широкое применение в **электрических фильтрах**.

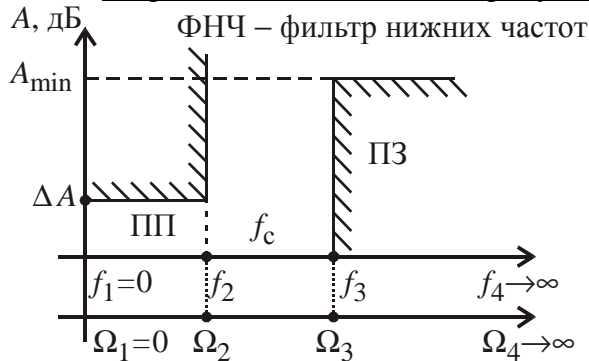
## 6 лекция

**Аналоговые частотно-избирательные фильтры. Определение и классификация**

**Электрический фильтр** – четырёхполюсник, пропускающий без заметного ослабления колебания определённых частот и подавляющий колебания других частот.

**Классификация фильтров.**

1. По расположению полосы пропускания (ПП) и полосы задерживания (ПЗ).



$f_1$  – нижняя граничная частота ПП [Гц];

$f_2$  – верхняя граничная частота ПП [Гц];

$f_3$  – нижняя граничная частота ПЗ [Гц];

$f_4$  – верхняя граничная частота ПЗ [Гц];

$\Omega_1$  – нормированная нижняя граничная частота ПП;

$\Omega_2$  – нормированная верхняя граничная частота ПП;

$\Omega_3$  – нормированная нижняя граничная частота ПЗ;

$\Omega_4$  – нормированная верхняя граничная частота ПЗ;

$f_c$  – частота среза [Гц] (**Ослабление равно 3 дБ**)

$A_{\min}$  – минимальное допустимое ослабление в ПЗ;

$\Delta A$  – максимальное допустимое ослабление в ПП;

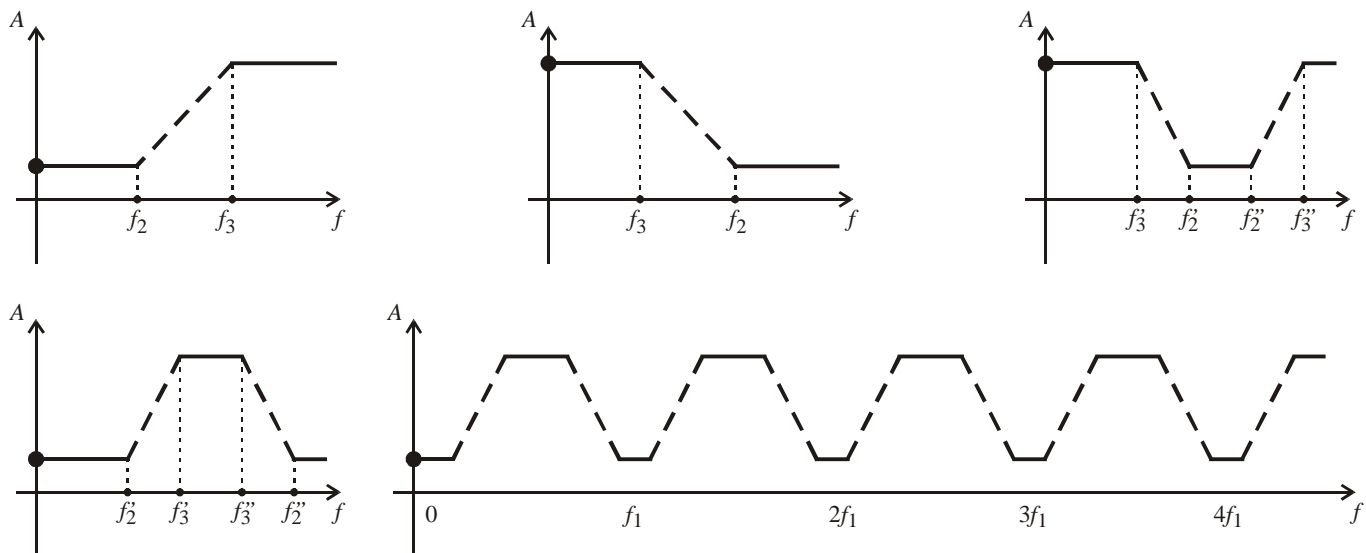
**Переходной областью** называют диапазон частот:  $f_2 < f < f_3$ , или  $\Omega_2 < \Omega < \Omega_3$ . **Нормирование** у ФНЧ по частоте проводят относительно верхней граничной частоты ПП  $f_2$ .

$$\Omega_1 = \frac{f_1}{f_2} = 0, \Omega_2 = \frac{f_2}{f_2} = 1, \Omega_3 = \frac{f_3}{f_2}, \Omega_4 = \frac{f_4}{f_2} = \infty.$$

При расчёте фильтров по рабочим параметрам никаких требований к переходной области не предъявляются.

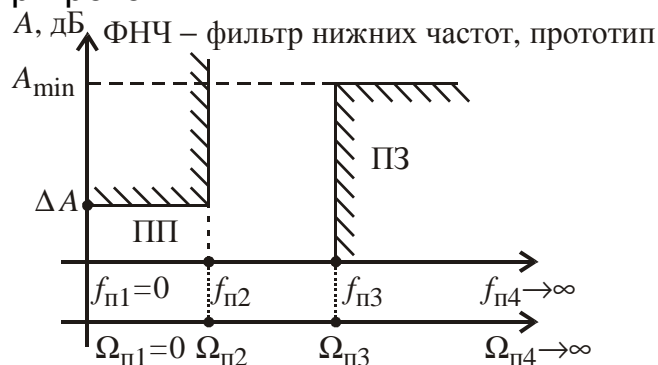
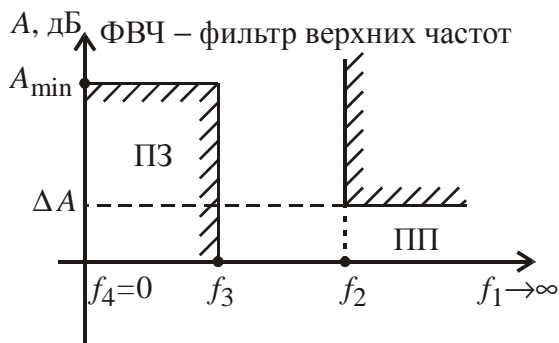
Существуют также: ФВЧ – фильтр **верхних** частот, ПФ – **полосовой** фильтр, ЗФ – **заграждающий** фильтр, ГФ – **гребенчатые** фильтры (многополосные):





Самостоятельно!!! Дайте определение каждому из перечисленных фильтров.

### Фильтр-прототип



$f_{p1}, f_{p2}, f_{p3}, f_{p4}$  – граничные частоты ФНЧП [Гц]. Для ФНЧП справедливы соотношения:

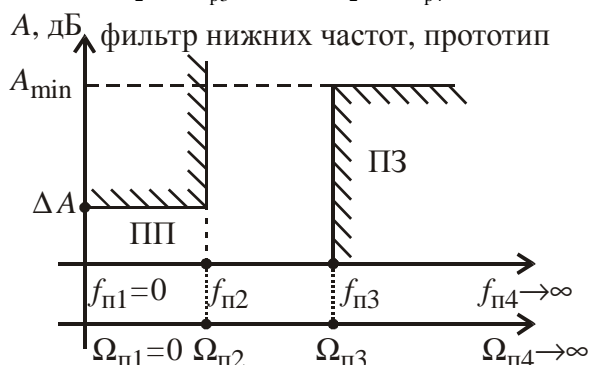
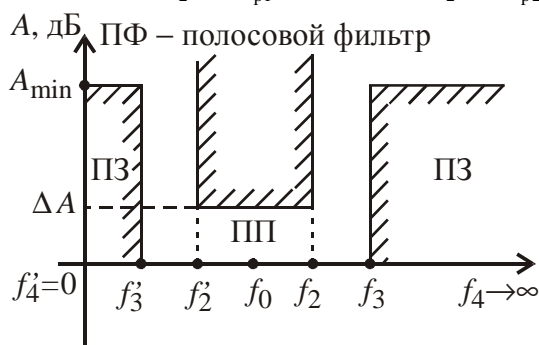
$$f_{p1} = f_4, f_{p2} = f_3, f_{p3} = f_2, f_{p4} = f_1.$$

$\Omega_{p1}, \Omega_{p2}, \Omega_{p3}, \Omega_{p4}$  – нормированные граничные частоты ФНЧП.

$$\Omega_{p1} = \frac{f_{p1}}{f_{p2}} = 0, \Omega_{p2} = \frac{f_{p2}}{f_{p2}} = 1, \Omega_{p3} = \frac{f_{p3}}{f_{p2}}, \Omega_{p4} = \frac{f_{p4}}{f_{p2}} = \infty.$$

Для перехода обратно к схеме ФВЧ используются соотношения:

$$\Omega_1 = \frac{f_1}{f_2} = \frac{1}{\Omega_{p1}} = \infty, \Omega_2 = \frac{f_2}{f_2} = \frac{1}{\Omega_{p2}} = 1, \Omega_3 = \frac{f_3}{f_2} = \frac{1}{\Omega_{p3}}, \Omega_4 = \frac{f_4}{f_2} = \frac{1}{\Omega_{p4}} = 0.$$



$f_0 = f_1 = f'_1 = \sqrt{f_2 f_2'} = \sqrt{f_3 f_3'}$  – центральная (среднегеометрическая) частота [Гц].

Для ФНЧП справедливы следующие соотношения:

$$f_{p1} = f_1 - f'_1 = 0, f_{p2} = f_2 - f'_2, f_{p3} = f_3 - f'_3, f_{p4} = f_4 - f'_4 = \infty.$$

$$\Omega_{p1} = \frac{f_{p1}}{f_{p2}} = 0, \Omega_{p2} = \frac{f_{p2}}{f_{p2}} = 1, \Omega_{p3} = \frac{f_{p3}}{f_{p2}}, \Omega_{p4} = \frac{f_{p4}}{f_{p2}} = \infty.$$

Для ПФ выполняются соотношения:

$$\Omega_1 = \frac{f_1}{f_0} = 1, \quad \Omega_1' = \frac{f_1'}{f_0} = 1, \quad \Omega_1 = \frac{1}{\Omega_1'}, \quad \Omega_2 = \frac{f_2}{f_0}, \quad \Omega_2' = \frac{f_2'}{f_0}, \quad \Omega_2 = \frac{1}{\Omega_2'}$$

$$\Omega_3 = \frac{f_3}{f_0}, \quad \Omega_3' = \frac{f_3'}{f_0}, \quad \Omega_3 = \frac{1}{\Omega_3'}, \quad \Omega_4 = \frac{f_4}{f_0} = \infty, \quad \Omega_4' = \frac{f_4'}{f_0} = 0, \quad \Omega_4 = \frac{1}{\Omega_4'}$$

Для перехода от ФНЧП к схеме ПФ и обратно используются соотношения:

$$\Omega_p = \frac{1}{a} \left( \Omega - \frac{1}{\Omega} \right), \quad \Omega = \frac{1}{2} \left( \Omega_p a + \sqrt{a^2 \Omega_p^2 + 4} \right),$$

где  $a = \frac{f_2 - f_2'}{f_0} = \frac{f_3 - f_3'}{f_0}$  – коэффициент преобразования.

## 2. По использованию элементов

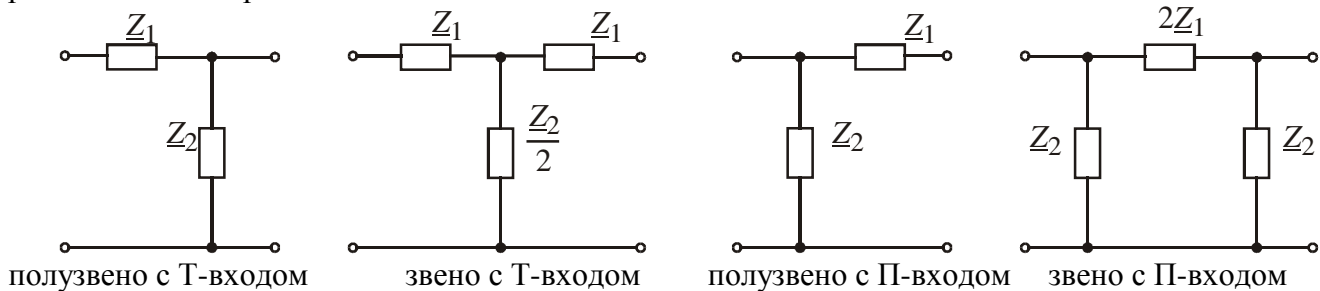
- LC-фильтры (содержат индуктивности и ёмкости)
- RC-фильтры (содержат резисторы и ёмкости)
- Резонаторные фильтры
- ARC-фильтры (активные фильтры содержат усилительные элементы)

## 3. Классификация по схемам

- Лестничные (цепочные) фильтры
- Мостовые фильтры
- Фильтры с цепями обратной связи

### Лестничные LC – фильтры

**Лестничные LC – фильтры** – это фильтры из каскадно соединенных Г, Т и П-образных реактивных четырёхполюсников.



Собственная мера передачи звеньев Т и П типа определяется:

$$\operatorname{ch} \Gamma_c = 1 + 2 \frac{Z_1}{Z_2}, \quad \text{где } \Gamma_c = A_c + jB_c.$$

С другой стороны:  $\operatorname{ch}(A_c + jB_c) = \operatorname{ch} A_c \cos B_c + j \operatorname{sh} A_c \sin B_c$ .

Поскольку  $Z_1$  и  $Z_2$  реактивные сопротивления, то  $\operatorname{ch} A_c \cos B_c = 1 + 2 \frac{Z_1}{Z_2}$ ,  $\operatorname{sh} A_c \sin B_c = 0$ .

В полосе пропускания (ПП) ослабление равно нулю, поэтому  $\operatorname{sh} A_c = 0$ ,  $\sin B_c \neq 0$ .

В полосе задерживания (ПЗ) ослабление отлично от нуля, следовательно  $\operatorname{sh} A_c \neq 0$ ,  $\sin B_c = 0$ .

Для определения граничных частот ПП выполняются условия  $\operatorname{sh} A_c = 0$ ,  $\sin B_c = 0$ .

В (ПП) так как  $A_c = 0$ , то  $\operatorname{ch} A_c = 1$ , отсюда следует  $\cos B_c = 1 + 2 \frac{Z_1}{Z_2}$ ,  $-1 \leq 1 + 2 \frac{Z_1}{Z_2} \leq 1$ .

Из последнего неравенства следует, что реактивные сопротивления в (ПП) **не могут быть одного знака**, т.е. одно из них имеет индуктивный характер, другое – ёмкостной.

$$-2 \leq -2 \left| \frac{Z_1}{Z_2} \right| \leq 0 \quad \text{или} \quad 1 \geq \left| \frac{Z_1}{Z_2} \right| \geq 0 \quad \text{определяет полосу пропускания.}$$

$$\left| \frac{Z_1}{Z_2} \right| = 0, \quad \left| \frac{Z_1}{Z_2} \right| = 1 \quad \text{определяют частоты среза}$$

В полосе задерживания  $\sin B_c = 0$ , то есть  $\cos B_c$  принимает значения  $\pm 1$ , поэтому

$$B_c = \pm \pi, \quad \operatorname{ch} A_c = 2 \left| \frac{Z_1}{Z_2} \right| - 1 \quad \text{определяет полосу задерживания.}$$

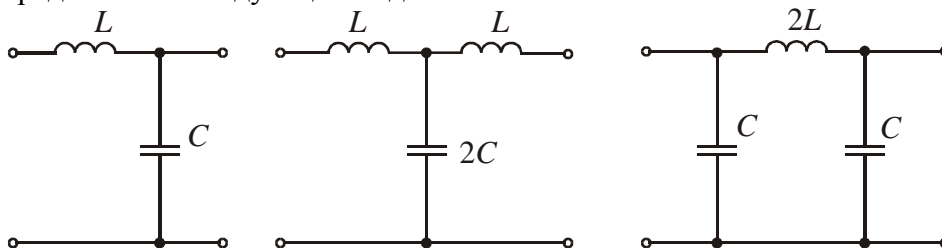
## 7 лекция

Фильтры нижних частот (ФНЧ) типа «к». Частотные зависимости ослабления, фазы и характеристических сопротивлений.

Для фильтров типа «к» выполняется условие:

$$\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 = k^2, \text{ где}$$

$k$  – вещественное число, не зависящее от частоты, следовательно двухполюсники  $\underline{Z}_1$  и  $\underline{Z}_2$  являются обратными. Рассмотрим ФНЧ типа «к». Г-образное полузвено, Т и П-образные звенья этого фильтра представим в следующем виде:



Для этих фильтров:  $\underline{Z}_1 = j\omega L$ ,  $\underline{Z}_2 = \frac{1}{j\omega C}$ . Произведение сопротивлений:  $\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 = \frac{L}{C} = R_0^2$ .

$R_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = k$  – **номинальное сопротивление фильтра**. Определим граничные частоты ПП.

$$\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = -\omega^2 LC, \quad \left| \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} \right| = \frac{\omega^2}{\omega_0^2} = \frac{f^2}{f_0^2}, \text{ где } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$

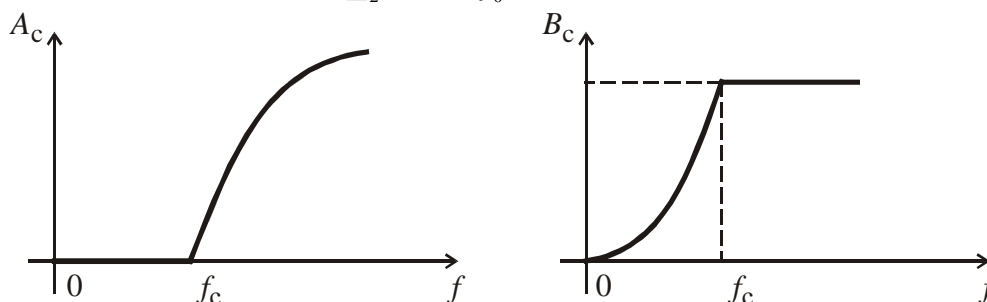
**Первая граничная частота** ПП получается из выражения:  $\left| \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} \right| = 0$ , откуда  $f_1 = 0$ .

**Вторая граничная частота** ПП получается из выражения:  $\left| \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} \right| = 1$ , откуда  $f_2 = f_0$ .

Полоса пропускания (ПП) находится в диапазоне частот:  $[0, f_0]$ .  $f_0 = f_c$  – **частота среза**.

В (ПП) собственное ослабление фильтра  $A_c = 0$ , а собственная фаза определяется выражением:

$$\cos B_c = 1 + 2 \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = 1 - 2 \frac{f^2}{f_0^2}. \text{ (изменяется от } 0 \text{ до } \pi)$$



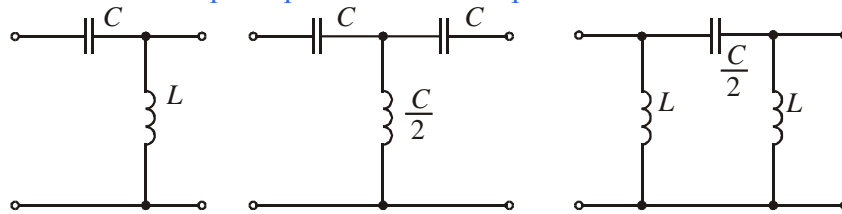
Собственные сопротивления фильтров сильно изменяются с частотой:

$$\underline{Z}_T = \sqrt{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 \left( 1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} \right)} = R_0 \sqrt{1 - \frac{f^2}{f_0^2}} = R_0 \sqrt{1 - \Omega^2}, \quad \underline{Z}_\Pi = \sqrt{\frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}}} = \frac{R_0}{\sqrt{1 - \frac{f^2}{f_0^2}}} = \frac{R_0}{\sqrt{1 - \Omega^2}}.$$

Построим графики частотной зависимости собственных сопротивлений.



Фильтры верхних частот (ФВЧ) типа «к». Частотные зависимости ослабления, фазы и характеристических сопротивлений.



Для этих фильтров:  $\underline{Z}_1 = \frac{1}{j\omega C}$ ,  $\underline{Z}_2 = j\omega L$ . Произведение сопротивлений:  $\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 = \frac{L}{C} = R_0^2$ .

Определим граничные частоты ПП.

$$\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = -\frac{1}{\omega^2 LC}, \quad \left| \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} \right| = \frac{\omega_0^2}{\omega^2} = \frac{f_0^2}{f^2}, \quad \text{где } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$

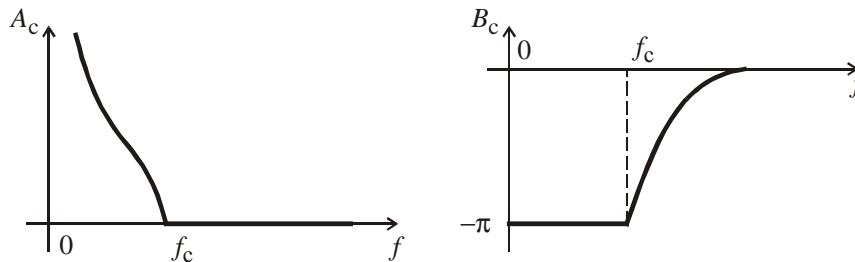
Первая граничная частота ПП получается из выражения:  $\left| \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} \right| = 0$ , откуда  $f_1 = \infty$ .

Вторая граничная частота ПП получается из выражения:  $\left| \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} \right| = 1$ , откуда  $f_2 = f_0$ .

Полоса пропускания (ПП) находится в диапазоне частот:  $[f_0, \infty)$ .  $f_0 = f_c$  – частота среза.

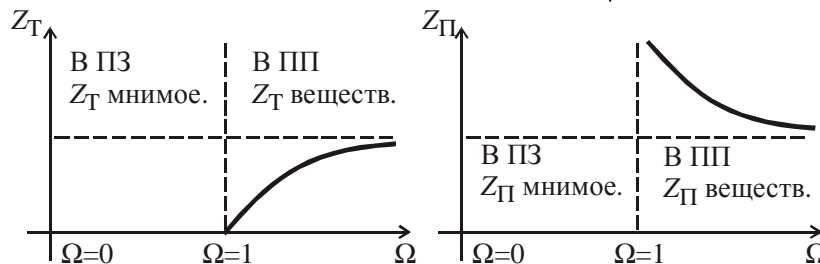
В (ПП) собственное ослабление фильтра  $A_c = 0$ , а собственная фаза определяется выражением:

$$\cos B_c = 1 + 2 \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = 1 - 2 \frac{f_0^2}{f^2}. \quad (\text{изменяется от } -\pi \text{ до } 0)$$

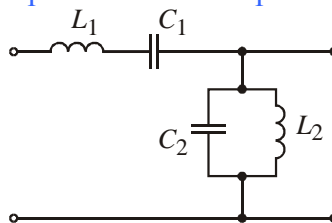


Собственные сопротивления фильтров изменяются с частотой:

$$\underline{Z}_T = \sqrt{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 \left( 1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} \right)} = R_0 \sqrt{1 - \frac{f_0^2}{f^2}} = R_0 \sqrt{1 - \frac{1}{\Omega^2}}, \quad \underline{Z}_\Pi = \frac{\sqrt{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}}{\sqrt{1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}}} = \frac{R_0}{\sqrt{1 - \frac{f_0^2}{f^2}}} = \frac{R_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{\Omega^2}}}.$$



Полосовые фильтры (ПФ) типа «к». Частотные зависимости ослабления, фазы и характеристических сопротивлений.



Самостоятельно построить!!! Т и П-образный полосовой фильтр

Для данного фильтра имеем:  $\underline{Z}_1 = j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1}$ ,  $\underline{Z}_2 = \frac{1}{\underline{Y}_2} = \frac{1}{j\omega C_2 + \frac{1}{j\omega L_2}}$ .

Определим произведение этих сопротивлений:

$$\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 = \frac{\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}}{\omega C_2 - \frac{1}{\omega L_2}} = \frac{\omega L_1}{\omega C_2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{\omega^2 L_1 C_1}}{1 - \frac{1}{\omega^2 L_2 C_2}} = \frac{L_1}{C_2} \cdot \frac{1 - \frac{\omega_{01}^2}{\omega^2}}{1 - \frac{\omega_{02}^2}{\omega^2}}, \text{ где } \omega_{01}^2 = \frac{1}{L_1 C_1}, \omega_{02}^2 = \frac{1}{L_2 C_2}.$$

$$\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 = R_0^2 \text{ при условии, что } \omega_{01} = \omega_{02} = \omega_0 \text{ или } L_1 C_1 = L_2 C_2 = \frac{1}{\omega_0^2}.$$

В этом случае данный ЧП является полосовым фильтром типа «к», т.к.  $\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 = R_0^2 = k^2$ .

$$\begin{aligned} \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} &= j \left( \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right) \cdot j \left( \omega C_2 - \frac{1}{\omega L_2} \right) = -L_1 \omega \left( 1 - \frac{1}{\omega^2 L_1 C_1} \right) \frac{1}{L_2 \omega} (\omega^2 L_2 C_2 - 1) = \\ &= -\frac{L_1}{L_2} \left( 1 - \frac{\omega_{01}^2}{\omega^2} \right) \cdot \left( \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1 \right) = -\frac{L_1}{L_2} \left( \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \cdot \frac{\omega_{01}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{01}^2}{\omega^2} \right) = -\frac{L_1}{L_2} \left( \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 2 + \frac{\omega_{01}^2}{\omega^2} \right) \end{aligned}$$

Откуда 
$$\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = -\frac{L_1}{L_2} \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2.$$

Из равенства следует, что  $\underline{Z}_1$  и  $\underline{Z}_2$  разного знака. Это необходимо, чтобы ЧП был фильтром.

**Определим граничные частоты** полосы пропускания из условий:

$$\left| \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} \right| = \frac{L_1}{L_2} \left( \frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right)^2 = 0, \quad \left| \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} \right| = \frac{L_1}{L_2} \left( \frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right)^2 = 1.$$

После алгебраических преобразований:  $f = f_0, \frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}, \frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} = -\sqrt{\frac{L_2}{L_1}}.$

Из последних двух равенств определяем:

$$f_1 = f_0 \left( \sqrt{\frac{L_2}{4L_1} + 1} - \sqrt{\frac{L_2}{4L_1}} \right), \quad f_2 = f_0 \left( \sqrt{\frac{L_2}{4L_1} + 1} + \sqrt{\frac{L_2}{4L_1}} \right).$$

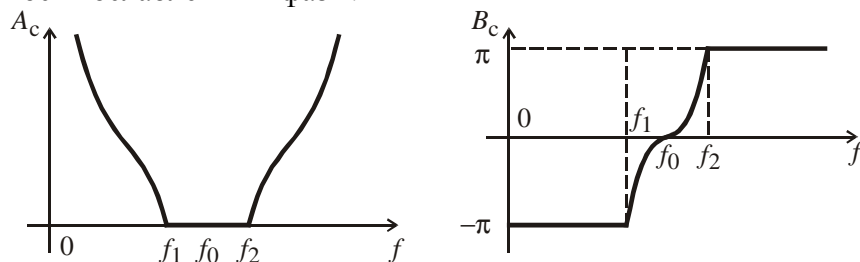
Видно, что  $f_1 f_2 = f_0^2$  – центральная частота.

**Две полосы пропускания** в диапазоне частот:  $[f_1, f_0]$  и  $[f_0, f_2]$ .

**Две полосы задерживания** в диапазоне частот:  $[0, f_1]$  и  $(f_2, \infty)$ .

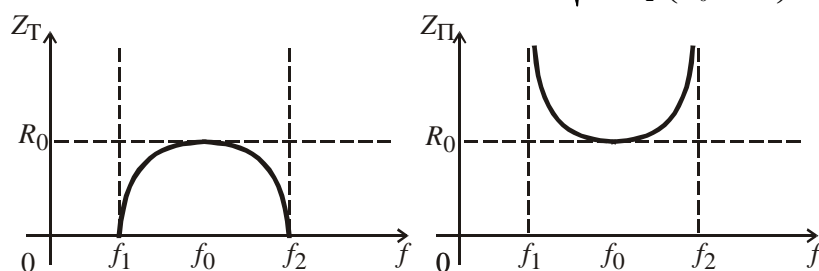
Построим частотные зависимости характеристических параметров:

Частотные зависимости ослабления и фазы:



Частотные зависимости характеристических сопротивлений:

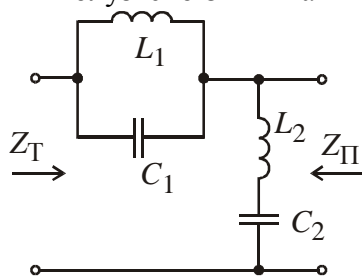
$$\underline{Z}_T = \sqrt{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 \left( 1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} \right)} = R_0 \sqrt{1 - \frac{L_1}{L_2} \left( \frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right)^2}, \quad \underline{Z}_\Pi = \sqrt{\frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}}} = \frac{R_0}{\sqrt{1 - \frac{L_1}{L_2} \left( \frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right)^2}}.$$



## 8 лекция

Заграждающие фильтры (ЗФ) типа «к». Частотные зависимости ослабления, фазы и характеристических сопротивлений.

Представим полузвено ЗФ типа «к».

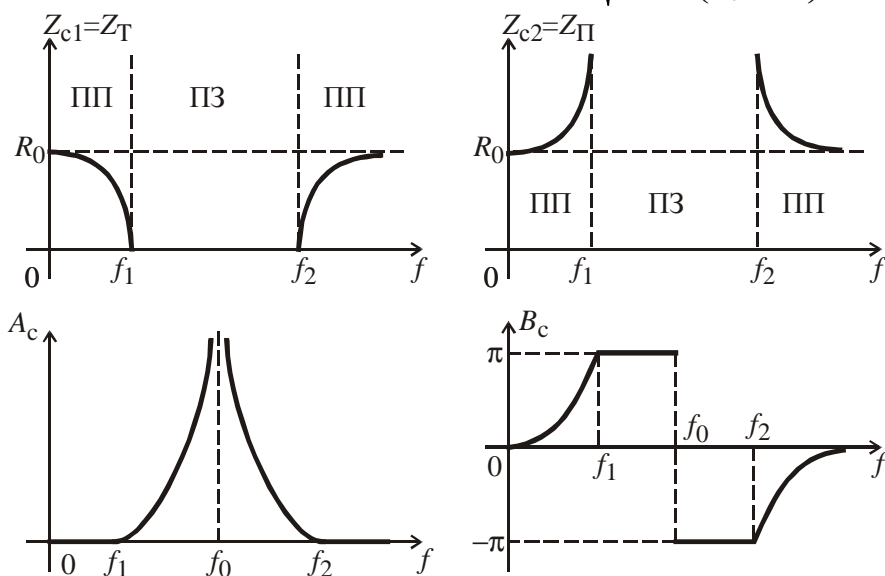


$$\underline{Z}_1 = \frac{1}{\underline{Y}_1} = \frac{1}{j\omega C_1 + \frac{1}{j\omega L_1}} \quad \underline{Z}_2 = j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2}$$

Граничные частоты определяются из равенства:  $\left| \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} \right| = \frac{1}{\frac{L_2}{L_1} \left( \frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right)^2}$ .

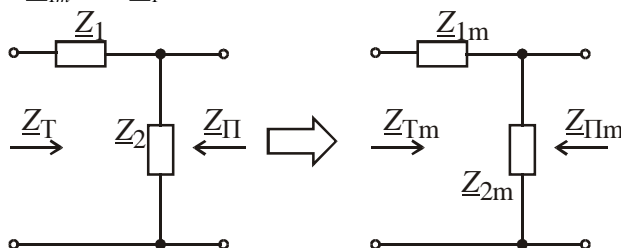
Построим частотные зависимости характеристических параметров:

$$\underline{Z}_T = \sqrt{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 \left( 1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} \right)} = R_0 \sqrt{1 - \frac{L_2}{L_1} \left( \frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right)^2}, \quad \underline{Z}_2 = \sqrt{\frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}}} = \frac{R_0}{\sqrt{1 - \frac{L_2}{L_1} \left( \frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right)^2}}$$



### Производные фильтры типа «m»

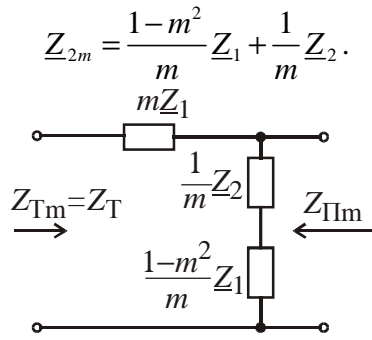
Поставим задачу создания **последовательно-производного фильтра** так, чтобы его собственное сопротивление  $Z_{Tm}$  равнялось собственному сопротивлению  $Z_T$  фильтра типа «к». Кроме того, потребуем, чтобы  $\underline{Z}_{1m} = m\underline{Z}_1$ .



Поскольку  $Z_{Tm} = Z_T$ , то получаем уравнение вида:

$$\sqrt{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 \left( 1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} \right)} = \sqrt{\underline{Z}_{1m} \underline{Z}_{2m} \left( 1 + \frac{\underline{Z}_{1m}}{\underline{Z}_{2m}} \right)}$$

После алгебраических преобразований получаем:



Из последнего соотношения видно, что сопротивление  $Z_{2m}$  состоит из последовательного соединения двух сопротивлений: сопротивления того же знака, что и  $Z_2$ , и сопротивления противоположного знака, как  $Z_1$ . При  $m=1$  фильтр типа «m» превращается в фильтр типа «к».

Отметим, что граничные частоты фильтра типа «m» и типа «к» совпадают. Действительно:

$$\frac{Z_{1m}}{Z_{2m}} = \frac{mZ_1}{\frac{1-m^2}{m} Z_1 + \frac{1}{m} Z_2} = \frac{m^2}{1+(1-m^2)\frac{Z_1}{Z_2}} \cdot \frac{Z_1}{Z_2}.$$

Выясним, чему равно собственное сопротивление последовательно-производного фильтра со стороны Пm-входа.

$$Z_{\Pi m} = \sqrt{\frac{Z_{1m} Z_{2m}}{1 + \frac{Z_{1m}}{Z_{2m}}}} = \sqrt{\frac{Z_1 Z_2}{1 + \frac{Z_1}{Z_2}} \left(1 + (1-m^2) \frac{Z_1}{Z_2}\right)} = Z_{\Pi} \left(1 + (1-m^2) \frac{Z_1}{Z_2}\right).$$

**Параллельно-производный фильтр** получается, если выполняются следующие требования:

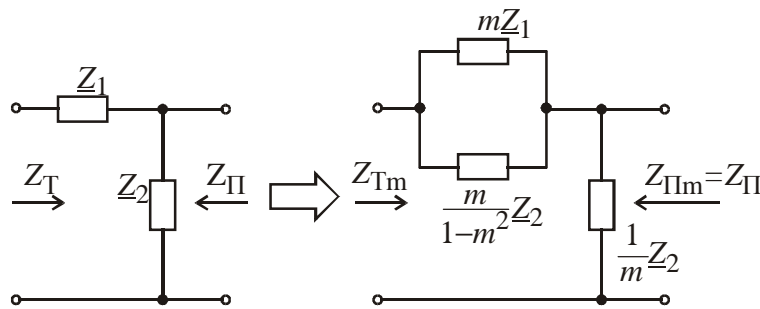
$$Z_{\Pi m} = Z_{\Pi}, \quad Z_{2m} = \frac{1}{m} Z_2.$$

Согласно условию равенства характеристических сопротивлений:

$$\sqrt{\frac{Z_{1m} Z_{2m}}{1 + \frac{Z_{1m}}{Z_{2m}}}} = \sqrt{\frac{Z_1 Z_2}{1 + \frac{Z_1}{Z_2}}}.$$

Подставляя значение  $Z_{2m}$ , получаем:

$$\frac{Z_{1m}}{1 + \frac{mZ_{1m}}{Z_2}} = \frac{mZ_1}{1 + \frac{Z_1}{Z_2}} \quad \text{или} \quad \frac{1}{Z_{1m}} + \frac{m}{Z_2} = \frac{1}{mZ_1} + \frac{1}{mZ_2}, \quad \text{далее} \quad \frac{1}{Z_{1m}} = \frac{1}{mZ_1} + \frac{1-m^2}{m} \cdot \frac{1}{Z_2}$$

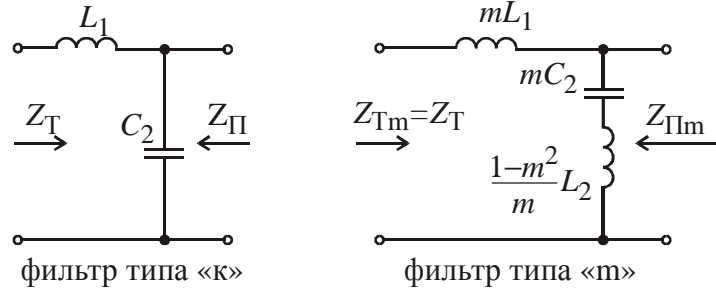


Определим собственное сопротивление параллельно-производного фильтра со стороны Тm-входа.

$$Z_{Tm} = \sqrt{Z_{1m} Z_{2m} \left(1 + \frac{Z_{1m}}{Z_{2m}}\right)} = \sqrt{Z_1 Z_2 \left(1 + \frac{Z_1}{Z_2}\right)} \cdot \frac{1}{1 + (1-m^2) \frac{Z_1}{Z_2}} = Z_T \frac{1}{1 + (1-m^2) \frac{Z_1}{Z_2}}.$$

Производные ФНЧ типа «м». Частотные зависимости ослабления и характеристических сопротивлений.

Последовательно-производное полужвено фильтра нижних частот (ФНЧ).



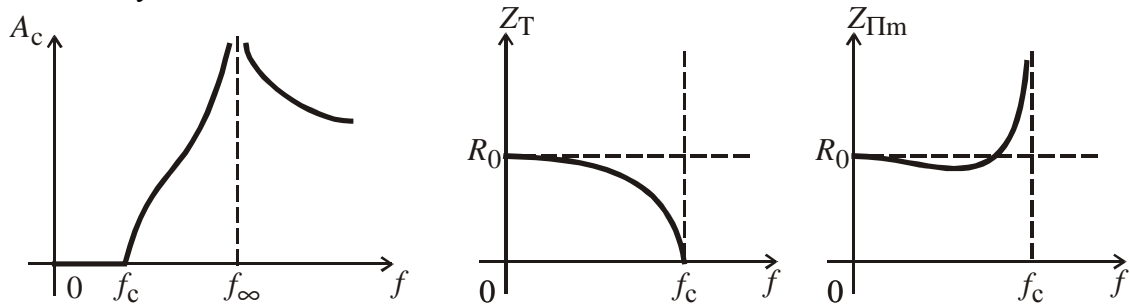
Самостоятельно образовать Т и П образные последовательно-производные звенья ФНЧ.

Особенностью данных фильтров является то, что в поперечном плече находится последовательный колебательный контур с резонансной частотой (частота всплеска ослабления):

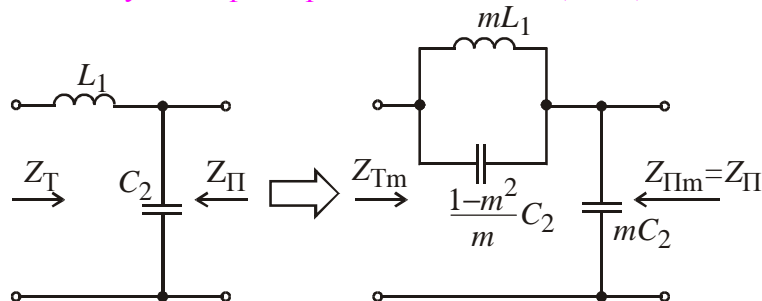
$$f_{\infty} = \frac{1}{2\pi\sqrt{mC_2 \frac{1-m^2}{m} L_1}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{(1-m^2) L_1 C_2}} = \frac{f_0}{\sqrt{1-m^2}},$$

где  $f_0 = f_c$  – частота среза.

Представим частотные зависимости характеристических параметров последовательно-производного полужвена ФНЧ типа «м».



Параллельно-производное полужвено фильтра нижних частот (ФНЧ).



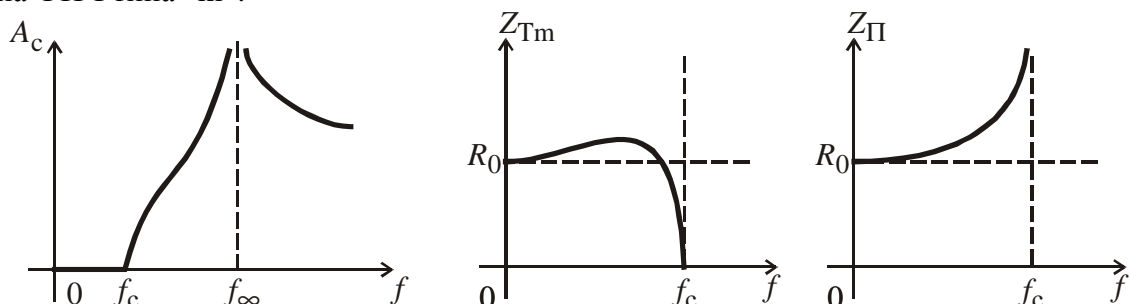
Самостоятельно образовать Т и П образные параллельно-производные звенья ФНЧ.

Особенностью данных фильтров является то, что в продольном плече находится параллельный колебательный контур с резонансной частотой (частота всплеска ослабления):

$$f_{\infty} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{1-m^2}{m} C_2 mL_1}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{(1-m^2) L_1 C_2}} = \frac{f_0}{\sqrt{1-m^2}},$$

где  $f_0 = f_c$  – частота среза.

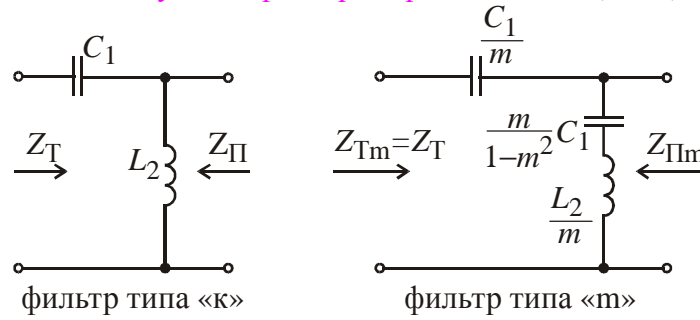
Представим частотные зависимости характеристических параметров параллельно-производного полужвена ФНЧ типа «м».





Производные ФВЧ типа «m». Частотные зависимости ослабления и характеристических сопротивлений.

Последовательно-производное полузвено фильтра верхних частот (ФВЧ).



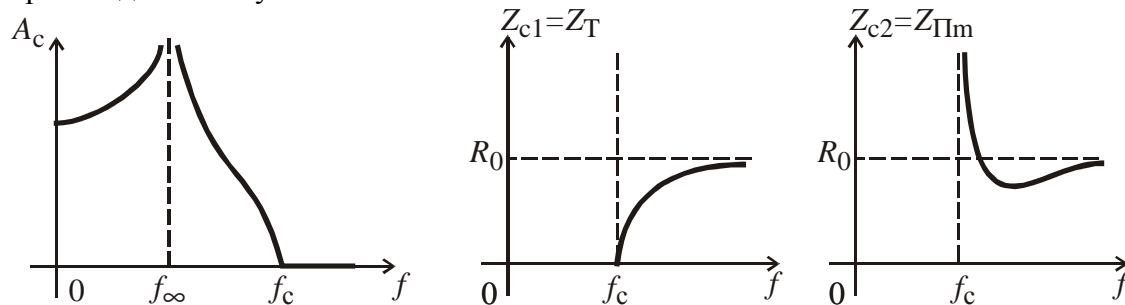
Самостоятельно образовать Т и П образные последовательно-производные звенья ФВЧ.

Частота всплеска ослабления:

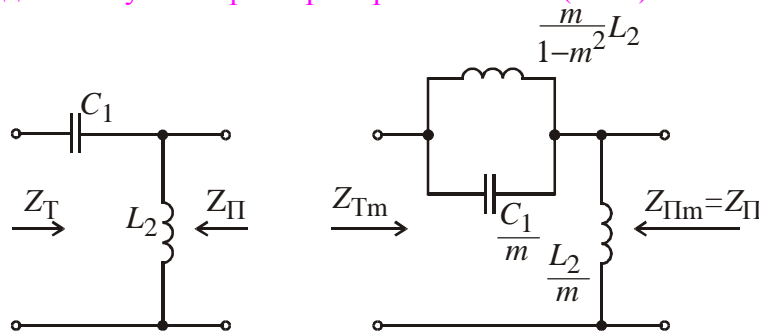
$$f_{\infty} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{m}{1-m^2}C_1 \frac{1}{m}L_2}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{L_2C_1}{1-m^2}}} = f_0\sqrt{1-m^2},$$

где  $f_0 = f_c$  – частота среза.

Представим частотные зависимости характеристических параметров последовательно-производного полузвена ФВЧ типа «m».



Параллельно-производное полузвено фильтра верхних частот (ФВЧ).



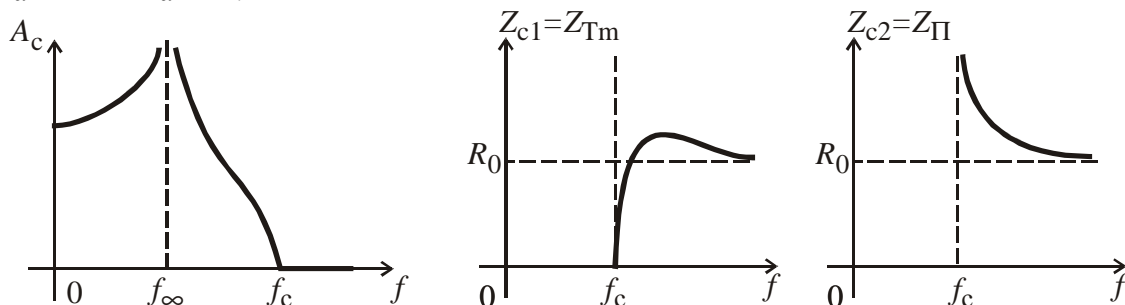
Самостоятельно образовать Т и П образные параллельно-производные звенья ФВЧ.

Частота всплеска ослабления:

$$f_{\infty} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{m}{1-m^2}L_2 \frac{1}{m}C_1}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{1}{1-m^2}L_2C_1}} = f_0\sqrt{1-m^2},$$

где  $f_0 = f_c$  – частота среза.

Представим частотные зависимости характеристических параметров параллельно-производного полузвена ФВЧ типа «m».



## 9 лекция

### Расчёт фильтров по характеристическим параметрам.

#### Классы фильтров по сопротивлению и ослаблению.

Задачей расчёта электрического фильтра по характеристическим параметрам является нахождение фильтра, составленного путем каскадного соединения минимального числа **согласованных звеньев** (полузвеньев) и удовлетворяющего заданным **техническим требованиям**.

Поскольку полное согласование генератора с входом фильтра и нагрузки с выходом фильтра невозможно, то рабочее затухание:

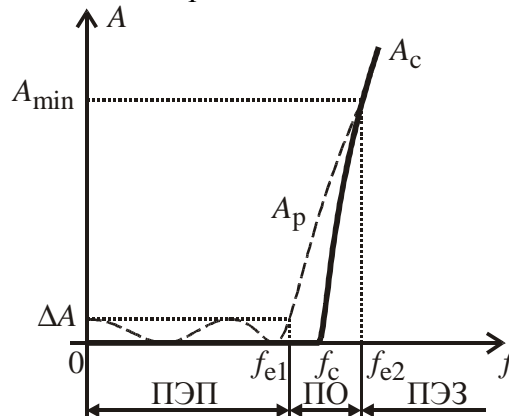
$$A_p = A_c + A_{отр}, \text{ где}$$

$A_{отр}$  – ослабление отражения, обусловленное несогласованностью.

В частотной характеристике рабочего затухания различают три полосы:

1. ПЭП – полоса эффективного пропускания.
2. ПО – переходная область.
3. ПЭЗ – полоса эффективного задерживания.

Представим график частотной зависимости рабочего ослабления для ФНЧ «к».



$A_{min}$  – минимально допустимое ослабление в ПЭЗ.

$\Delta A$  – максимально допустимое ослабление в ПЭП.

$f_{e1}$  – граничная частота ПЭП.

$f_{e2}$  – граничная частота ПЭЗ.

Введём **степень использования ПЭП**:

$$\eta = \frac{f_{e1}}{f_c}, \text{ следовательно } 0 < \eta < 1.$$

Собственные сопротивления фильтра:

$$R_0 \leq Z_T \leq R_0 \sqrt{1 - \eta^2}, \quad R_0 \leq Z_{II} \leq \frac{R_0}{\sqrt{1 - \eta^2}}.$$

Сопротивление генератора и нагрузки выбирают как среднее геометрическое:

$$R_{г, н} = \sqrt{R_0 R_0 \sqrt{1 - \eta^2}} = R_0 \sqrt[4]{1 - \eta^2} \text{ – со стороны Т-входа.}$$

$$R_{г, н} = \sqrt{R_0 \frac{R_0}{\sqrt{1 - \eta^2}}} = \frac{R_0}{\sqrt[4]{1 - \eta^2}} \text{ – со стороны П-входа.}$$

Особую роль отводят определению **класса фильтра**. Различают **класс по сопротивлению** ( $N_z$ ) и **класс по ослаблению** ( $N_A$ ).

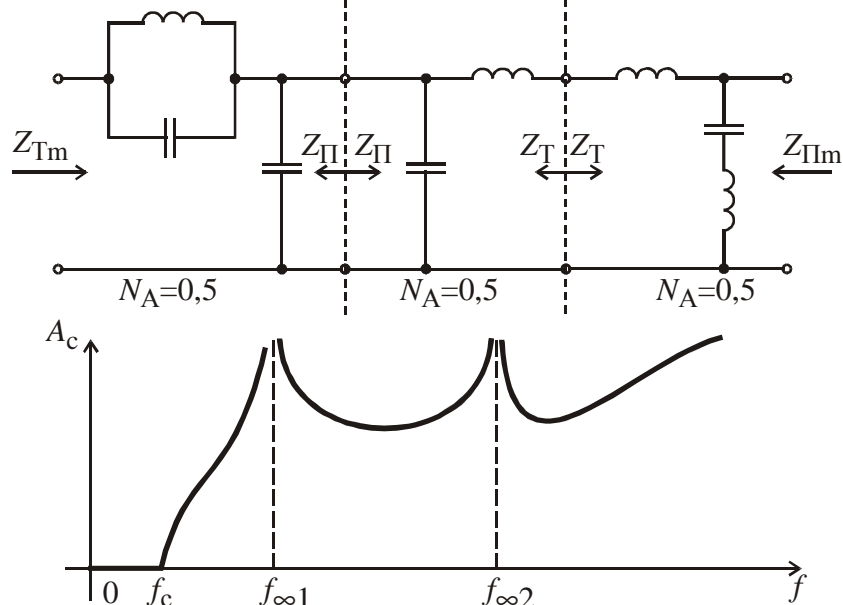
$N_A$  – определяется количеством звеньев и полузвеньев. К фильтрам 1 класса по ослаблению ( $N_A = 1$ ) относятся звенья ФНЧ и ФВЧ типа «к» и типа «т», а также звенья ЗФ типа «к».

Полузвеньям перечисленных фильтров присвоен класс по ослаблению 0,5 ( $N_A = 0,5$ ).

Звено полосового фильтра типа «к» имеет класс  $N_A = 2$ , а его полузвено  $N_A = 1$ .

$N_z$  – определяется количеством частот согласования. К фильтрам 1 класса по сопротивлению ( $N_z = 1$ ) относят все звенья и полузвенья ФНЧ и ФВЧ типа «к». К фильтрам 2 класса по сопротивлению ( $N_z = 2$ ) относят звенья ФНЧ и ФВЧ типа «т», ПФ и ЗФ типа «к».

Определим класс следующего фильтра:  $N_Z = 2, N_A = 1,5$ .

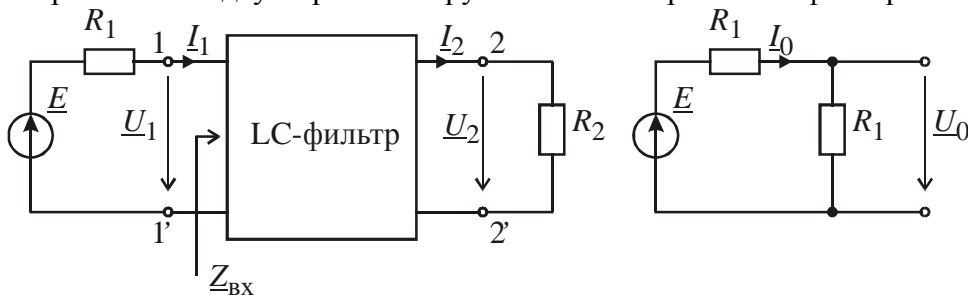


Расчёт электрических фильтров по рабочим параметрам. Основные понятия и определения.

Основные преимущества:

1. Электрический фильтр с меньшим числом элементов
2. Точность вычислений
3. Разработана общая методика расчёта

Рассмотрим реактивный двусторонне нагруженный электрический фильтр:



Рабочая мера передачи данного фильтра определяется соотношением:

$$\Gamma_p = \frac{1}{2} \ln \frac{U_0 I_0}{U_2 I_2} = A_p + jB_p,$$

$$A_p = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{U_0 I_0}{U_2 I_2} \right| \text{ [Нп]}, \quad A_p = 10 \lg \left| \frac{U_0 I_0}{U_2 I_2} \right| = 10 \lg \frac{P_m}{P_2} \text{ [дБ]}.$$

$$P_m = U_0 I_0 = \frac{E}{2} \cdot \frac{E}{2R_1} = \frac{E^2}{4R_1} \text{ – активная максимальная мощность источника.}$$

$$P_2 = U_2 I_2 = U_2 \frac{U_2}{R_2} = \frac{U_2^2}{R_2} \text{ – активная мощность, передаваемая от источника в нагрузку.}$$

Из-за несогласованности входного сопротивления  $Z_{вх}$  с внутренним сопротивлением генератора  $R_1$  от входа фильтра выделяется **мощность отражений**  $P_{отр}$ , тогда можно предположить:

$$P_m = P_2 + P_{отр}.$$

Введём понятие **модуля коэффициента отражения** от входа фильтра  $\rho$ :

$$\rho = |\underline{\rho}| = \sqrt{\frac{P_{отр}}{P_m}} = \left| \frac{R_1 - Z_{вх}}{R_1 + Z_{вх}} \right|, \quad \underline{\rho} = \underline{\rho}(\omega) = \frac{h(\omega)}{V(\omega)} \text{ – комплексный коэффициент отражения.}$$

Введём понятие **модуля рабочей передаточной функции**  $T$ :

$$H = |\underline{H}| = \sqrt{\frac{P_2}{P_m}} = \sqrt{\frac{U_2^2}{R_2} \cdot \frac{4R_1}{E^2}} = \frac{2U_2}{E} \sqrt{\frac{R_1}{R_2}},$$

$$\underline{H} = \underline{H}(\omega) = \frac{\underline{W}(\omega)}{\underline{V}(\omega)} - \text{комплексная рабочая передаточная функция.}$$

Введём понятие **функции фильтрации**:  $\varphi = |\underline{\varphi}| = \sqrt{\frac{P_{\text{отр}}}{P_2}}$ .

Установим связь между рабочей передаточной функцией, модулем коэффициентом отражения и функцией фильтрации.

$$1 = \frac{P_2}{P_m} + \frac{P_{\text{отр}}}{P_m} = H^2 + \rho^2, \quad \frac{P_m}{P_2} = 1 + \frac{P_{\text{отр}}}{P_2} = 1 + \varphi^2 = \frac{1}{H^2}, \quad \text{следовательно } H^2 = \frac{1}{1 + \varphi^2}.$$

Поскольку:

$$A_p = 10 \lg \frac{P_m}{P_2} = 10 \lg \frac{1}{H^2} = 20 \lg \frac{1}{H} = 10 \lg (1 + \varphi^2) \text{ [дБ].}$$

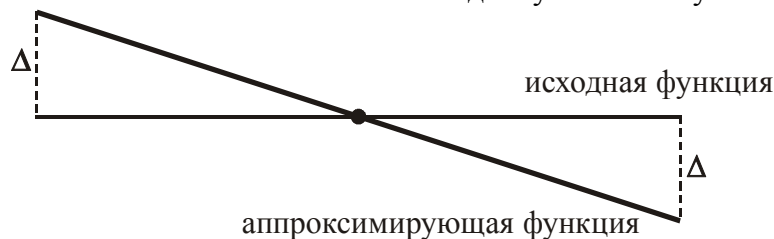
### Этапы синтеза электрических фильтров. Технические требования.

Синтез электрического фильтра по рабочему ослаблению состоит из следующих **этапов**: аппроксимации, реализации, проверочного расчёта и исследования.

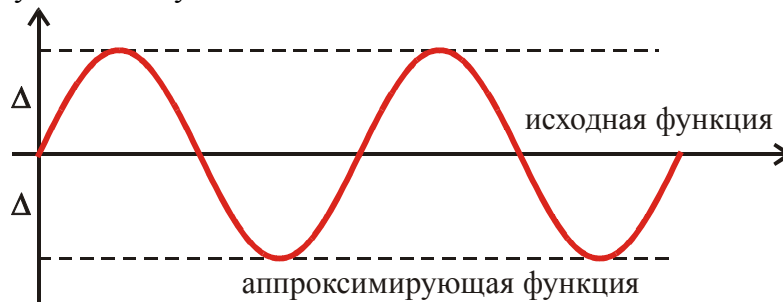
На этапе **аппроксимации** необходимо получить аналитическое выражение для рабочей передаточной функции, удовлетворяющей УФР.

При расчётах используют два вида аппроксимации:

1. **Аппроксимация по Тейлору**: аппроксимирующая функция совпадает с исходной в одной точке, в остальных монотонно отклоняется не более чем на заданную величину  $\Delta$ .



2. **Аппроксимация по Чебышёву**: аппроксимирующая функция колеблется относительно исходной, отклоняясь на заданную величину  $\Delta$ .



При проектировании фильтров по рабочему ослаблению на этапе аппроксимации задают функцию фильтрации. В зависимости от вида функции фильтрации получают различные типы фильтров.

Если в качестве функции фильтрации используются полиномы, то фильтры называются **полиномиальными**. Среди полиномиальных фильтров широко используются:

- фильтры **Баттерворта** (в качестве функции фильтрации полиномы Баттерворта)
- фильтры **Чебышёва** (в качестве функции фильтрации полиномы Чебышёва)

Если в качестве функции фильтрации используется дробно-рациональная функция, например, дробь Золотарёва-Кауэра, то имеем **фильтр Золотарёва-Кауэра**.

На этапе **реализации** по найденной рабочей передаточной функции определяется схема фильтра и величины её элементов.

**Технические требования**, предъявляемые к фильтрам:

1. граничные частоты ПП и ПЗ
2. максимальное допустимое ослабление в ПП (или коэффициент отражения)

$$\Delta A = 10 \lg \frac{1}{1 - \left(\frac{\rho\%}{100}\right)^2} \text{ [дБ]}.$$

3. минимальное допустимое ослабление в ПЗ
4. сопротивление нагрузки

**Вывод:** синтез электрического фильтра производится в следующем порядке:

1. Переход к ФНЧП и нормирование частот;
2. Аппроксимация рабочей передаточной функции и характеристики рабочего ослабления;
3. Реализация схемы ФНЧ (ФНЧП);
4. Переход от схемы ФНЧП к схеме заданного фильтра и денормирование её элементов;
5. Расчёт и построение денормированных частотных характеристик рабочего ослабления и фазы.

## 10 лекция

### Аппроксимация рабочего ослабления по Баттерворту.

Если в качестве функции фильтрации используются полиномы Баттерворта, то есть

$$\varphi(\Omega) = \varepsilon B_n(\Omega) = \varepsilon \Omega^n,$$

где  $\varepsilon$  – коэффициент неравномерности рабочего ослабления в полосе пропускания. Рабочее ослабление определяем как:

$$A(\Omega) = 10 \lg(1 + \varphi^2(\Omega)) = 10 \lg(1 + \varepsilon^2 \Omega^{2n}).$$

По техническим требованиям, для ФНЧ (ФНЧП) на граничной частоте ПП  $\Omega_2 = 1$ , рабочее ослабление должно быть равным максимальному допустимому ослаблению  $\Delta A$ , то есть

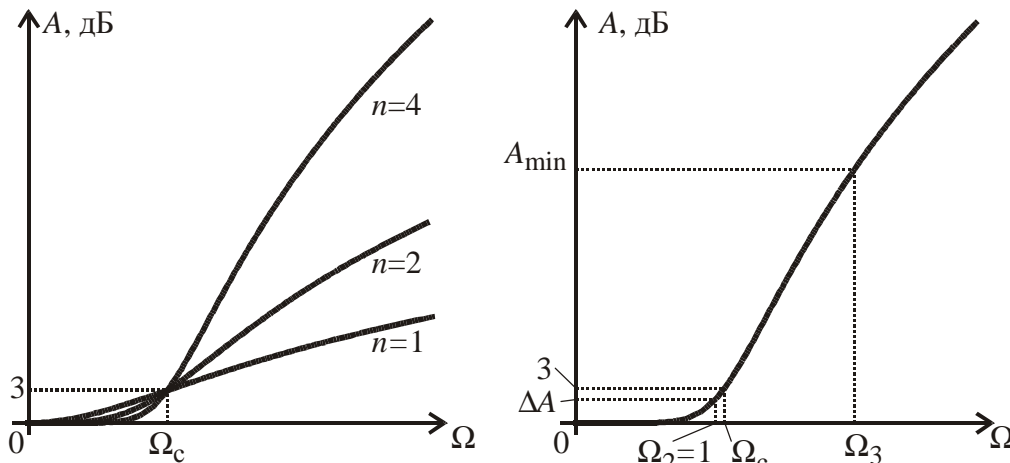
$$A(\Omega = \Omega_2 = 1) = \Delta A = 10 \lg(1 + \varepsilon^2), \text{ откуда } \varepsilon = \sqrt{10^{0,1 \Delta A} - 1}.$$

Получим формулу для определения порядка ФНЧ (ФНЧП).

На граничной частоте ПЗ  $\Omega_3$ , рабочее ослабление должно быть больше (либо равно) минимального допустимого рабочего ослабления  $A_{\min}$ , то есть

$$A(\Omega_3) = 10 \lg(1 + \varepsilon^2 \Omega_3^{2n}) \geq A_{\min}, \text{ откуда } n \geq \frac{\lg\left(\frac{1}{\varepsilon} \sqrt{10^{0,1 A_{\min}} - 1}\right)}{\lg \Omega_3} = \frac{\lg \sqrt{\frac{10^{0,1 A_{\min}} - 1}{10^{0,1 \Delta A} - 1}}}{\lg \Omega_3}.$$

Представим частотную зависимость рабочего ослабления при аппроксимации полиномом Баттерворта



Аппроксимация по Баттерворту получила название монотонной, или максимально гладкой. Определим **частоту среза** фильтра Баттерворта из условия:

$$10 \lg(1 + \varepsilon^2 \Omega_c^{2n}) = 3, \text{ откуда } \Omega_c = \frac{\sqrt[2n]{10^{0,3} - 1}}{\sqrt[2n]{10^{0,1 \Delta A} - 1}} \approx \frac{1}{\sqrt[2n]{10^{0,1 \Delta A} - 1}}.$$

### Аппроксимация рабочей передаточной функции по Баттерворту.

Рабочая передаточная функция аппроксимируется полиномом Баттерворта в виде:

$$H^2(\Omega) = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \varphi^2(\Omega)} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \Omega^{2n}}.$$

С другой стороны модуль рабочей передаточной функции можно представить как:

$$H^2(\Omega) = H(j\Omega)H(-j\Omega) = H(p)H(-p)\Big|_{p=j\Omega}.$$

Таким образом:

$$H(p)H(-p) = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \left(\frac{p}{j}\right)^{2n}} = \frac{1}{\varepsilon^2 V(p)V(-p)}, \text{ то есть } H(p) = \frac{1}{\varepsilon V(p)}.$$

$V(p)$  – полином Гурвица.

Корни полинома Гурвица  $p_k$ , располагающиеся в левой полуплоскости, определим из уравнения:

$$1 + \varepsilon^2 \left(\frac{p_k}{j}\right)^{2n} = 0, \quad 1 + \varepsilon^2 (-jp_k)^{2n} = 0, \quad -jp_k = \sqrt[2n]{\frac{1}{\varepsilon^2}(-1)}, \quad -jp_k = \sqrt[2n]{\frac{1}{\varepsilon^2}} e^{j(2k-1)\pi},$$

$$-jp_k = \frac{1}{\sqrt[n]{\varepsilon}} \left( \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n} + j \sin \frac{(2k-1)\pi}{2n} \right), \quad p_k = \frac{1}{\sqrt[n]{\varepsilon}} \left( -\sin \frac{(2k-1)\pi}{2n} + j \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n} \right).$$

Аналитически рабочую передаточную функцию можно представить:

$$H(p) = \frac{1}{\varepsilon V(p)} = \frac{1}{\varepsilon \prod_{k=1}^n (p - p_k)} = \frac{1}{\varepsilon (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)}.$$

Аналитическое выражение для частотной зависимости рабочей передаточной функции получаем заменой переменной  $p = j\Omega$ .

$$H(j\Omega) = \frac{1}{\varepsilon \prod_{k=1}^n (j\Omega - p_k)}, \text{ далее определим модуль: } H(\Omega) = |H(j\Omega)|.$$

Зная  $H(\Omega)$ , получим аналитическое выражение для рабочего ослабления:  $A(\Omega) = 20 \lg \frac{1}{H(\Omega)}$  [дБ].

### Аппроксимация частотных характеристик по Чебышёву.

Функцию фильтрации представим в виде:

$$\varphi(\Omega) = \varepsilon T_n(\Omega), \text{ где } T_n(\Omega) = \begin{cases} \cos(n \cdot \arccos(\Omega)), & 0 \leq \Omega \leq 1 \\ \operatorname{ch}(n \cdot \operatorname{arch}(\Omega)), & \Omega > 1 \end{cases} \quad \text{– полином Чебышёва.}$$

$\varepsilon = \sqrt{10^{0,1\Delta A} - 1}$  – коэффициент неравномерности рабочего ослабления в полосе пропускания:

Рабочее ослабление определяется как:  $A(\Omega) = 10 \lg(1 + \varepsilon^2 T_n^2(\Omega))$ .

$$T_0(\Omega) = \cos 0 = 1, \quad T_1(\Omega) = \cos(\arccos(\Omega)) = \Omega, \quad T_2(\Omega) = \cos(2 \arccos(\Omega)) = 2\Omega^2 - 1.$$

Так как  $T_2(\Omega) = 2\Omega T_1(\Omega) - T_0(\Omega)$ , то  $T_{n+1}(\Omega) = 2\Omega T_n(\Omega) - T_{n-1}(\Omega)$  – рекуррентная формула.

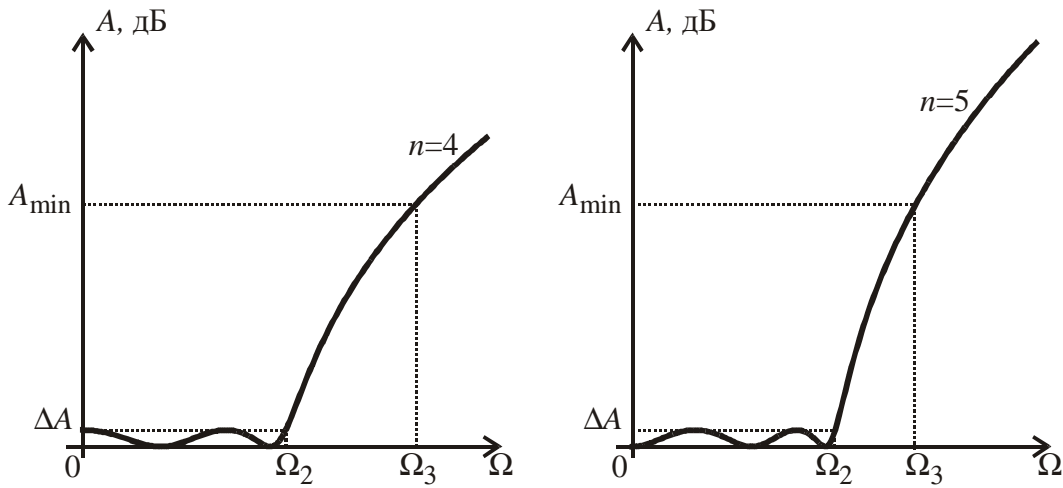
Вывод формулы для определения порядка фильтра Чебышёва:

$$A(\Omega_3) = 10 \lg(1 + \varepsilon^2 \operatorname{ch}^2 n \cdot \operatorname{arch}(\Omega_3)) \geq A_{\min}.$$

После преобразований получим:

$$n \geq \frac{\operatorname{arch}\left(\frac{1}{\varepsilon} \sqrt{10^{0,1A_{\min}} - 1}\right)}{\operatorname{arch}(\Omega_3)}.$$

Представим частотные характеристики рабочего ослабления



Аппроксимация по Чебышёву получила название **равноволновой**.

Если  $n$  – **чётное**, то при  $\Omega = 0$  имеем **максимум** ослабления в полосе пропускания.

Если  $n$  – **нечётное**, то при  $\Omega = 0$  имеем **минимум** ослабления в полосе пропускания.

Частоты min и max в полосе пропускания определяются как:

$$\Omega_{\max_m} = \cos \frac{(m-1)\pi}{n}, \quad m=1, 2, \dots, n+1, \quad \Omega_{\min_v} = \cos \frac{(2v-1)\pi}{2n}, \quad v=1, 2, \dots, n.$$

Если порядок фильтра  $n = 4$ , то имеем: 2 частоты min, 3 частоты max.

$$\Omega_{\max_1} = \cos 0 = 1, \quad \Omega_{\max_2} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707, \quad \Omega_{\max_3} = \cos \frac{\pi}{2} = 0, \quad \text{то есть } (0; 0,707; 1).$$

$$\Omega_{\min_1} = \cos \frac{\pi}{8} \approx 0,924, \quad \Omega_{\min_2} = \cos \frac{3\pi}{8} \approx 0,383, \quad \text{то есть } (0,383; 0,924).$$

Сформируем рабочую передаточную функцию:

$$H^2(\Omega) = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \varphi^2(\Omega)} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_n^2(\Omega)} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \cos^2 n \arccos \Omega}.$$

С другой стороны модуль рабочей передаточной функции можно представить как:

$$H^2(\Omega) = \underline{H}(\Omega) \underline{H}^*(\Omega) = H(p) H(-p) \Big|_{p=j\Omega}.$$

Таким образом:

$$H(p) H(-p) = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \cos^2 n \arccos(-jp)} = \frac{1}{\varepsilon^2 2^{2(n-1)} V(p) V(-p)}, \quad \text{то есть } H(p) = \frac{1}{\varepsilon 2^{n-1} V(p)}.$$

$V(p)$  – полином Гурвица.

Решая уравнение  $1 + \varepsilon^2 \cos^2 n \arccos(-jp) = 0$ , определим корни полинома Гурвица:

$$\cos^2(n) \cdot \arccos(-jp) = -\frac{1}{\varepsilon^2}, \quad \cos(n) \cdot \arccos(-jp) = \frac{j}{\varepsilon}, \quad n \arccos(-jp) = \arccos \frac{j}{\varepsilon}, \quad p = j \cos \frac{1}{n} \cdot \arccos \frac{j}{\varepsilon}.$$

С учетом того, что  $\arccos x = -j \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ , получаем:

$$p = j \cos \left( -\frac{j}{n} \ln \left( \frac{j}{\varepsilon} + j \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + 1} \right) \right), \quad p = j \cos \left( -\frac{j}{n} \left( \ln(j) + \ln \left( \frac{1}{\varepsilon} + \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + 1} \right) \right) \right),$$

$$p = j \cos \left( -\frac{j}{2n} \ln(-1) - \frac{j}{n} \ln \left( \frac{1}{\varepsilon} + \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + 1} \right) \right), \quad p_k = j \cos \left( -\frac{j}{2n} \ln(e^{j(2k-1)\pi}) - \frac{j}{n} \ln \left( \frac{1}{\varepsilon} + \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + 1} \right) \right),$$

$$p_k = j \cos \left( \frac{(2k-1)\pi}{2n} - \frac{j}{n} \ln \left( \frac{1}{\varepsilon} + \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + 1} \right) \right), \quad \text{так как } \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = \operatorname{arsh} x, \quad \text{то получим:}$$

$$p_k = j \cos \left( \frac{(2k-1)\pi}{2n} - \frac{j}{n} \operatorname{arsh} \frac{1}{\varepsilon} \right), \quad \text{далее введём обозначение } \varphi = \frac{1}{n} \operatorname{arsh} \frac{1}{\varepsilon}, \quad \text{отсюда:}$$

$$p_k = j \cos \left( \frac{(2k-1)\pi}{2n} - j\varphi \right), \text{ так как } \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \text{ и } \cos jx = \operatorname{ch} x, \sin jx = j \operatorname{sh} x.$$

$$p_k = j \left( \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n} \operatorname{ch} \varphi + j \sin \frac{(2k-1)\pi}{2n} \operatorname{sh} \varphi \right), \quad p_k = -\operatorname{sh} \varphi \sin \frac{(2k-1)\pi}{2n} + j \operatorname{ch} \varphi \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}.$$

Аналитически рабочую передаточную функцию можно представить как:

$$H(p) = \frac{1}{\varepsilon 2^{n-1} \prod_{k=1}^n (p - p_k)} = \frac{1}{\varepsilon 2^{n-1} (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)}.$$

Аналитическое выражение для частотной зависимости рабочей передаточной функции получаем заменой переменной  $p = j\Omega$ .

$$H(j\Omega) = \frac{1}{\varepsilon 2^{n-1} \prod_{k=1}^n (j\Omega - p_k)}, \text{ далее определим модуль: } H(\Omega) = |H(j\Omega)| \text{ и } A(\Omega) = 20 \lg \frac{1}{H(\Omega)} \text{ [дБ]}.$$

### Реализация фильтров по Дарлингтону.

Метод основан на формировании операторной функции входного сопротивления:

$$Z_{\text{вх}}(p) = \frac{1 - \rho(p)}{1 + \rho(p)}, \text{ где } \rho(p) \text{ – коэффициент отражения.}$$

При реализации фильтров по Дарлингтону  $r_1 = 1$ . Определим коэффициент отражения из соотношений:

$$\rho^2(p) = 1 - H^2(p) = 1 - \frac{1}{1 + \varphi^2(p)} = \frac{\varphi^2(p)}{1 + \varphi^2(p)} = \varphi^2(p) H^2(p), \text{ откуда } \rho(p) = \pm \varphi(p) H(p).$$

При аппроксимации по Баттерворту имеем:

$$\rho(p) = \pm \varepsilon B_n(p) \frac{1}{\varepsilon V(p)} = \pm \frac{B_n(p)}{V(p)}, \text{ где } B_n(p) = p^n \text{ – полином Баттерворта.}$$

$$Z_{\text{вх}}(p) = \frac{1 - \rho(p)}{1 + \rho(p)} = \frac{1 \mp \frac{B_n(p)}{V(p)}}{1 \pm \frac{B_n(p)}{V(p)}} = \frac{V(p) \mp B_n(p)}{V(p) \pm B_n(p)}.$$

При аппроксимации по Чебышёву имеем:

$$\rho(p) = \pm \varepsilon T_n(p) \frac{1}{\varepsilon 2^{n-1} V(p)} = \pm \frac{T_n(p)}{2^{n-1} V(p)}.$$

$T_n(p)$  определяется по рекуррентной формуле  $T_{n+1}(\Omega) = 2\Omega T_n(\Omega) - T_{n-1}(\Omega)$  заменой  $\Omega \rightarrow p$ , при этом все слагаемые берутся со знаком «+».

**Например:**  $T_2(\Omega) = 2\Omega^2 - 1$ , то  $T_2(p) = 2p^2 + 1$ .

$$Z_{\text{вх}}(p) = \frac{1 - \rho(p)}{1 + \rho(p)} = \frac{1 \mp \frac{T_n(p)}{2^{n-1} V(p)}}{1 \pm \frac{T_n(p)}{2^{n-1} V(p)}} = \frac{V(p) 2^{n-1} \mp T_n(p)}{V(p) 2^{n-1} \pm T_n(p)}.$$

$Z_{\text{вх}}(p)$  раскладываем в цепную дробь по Кауэру и строим нормированную схему фильтра.



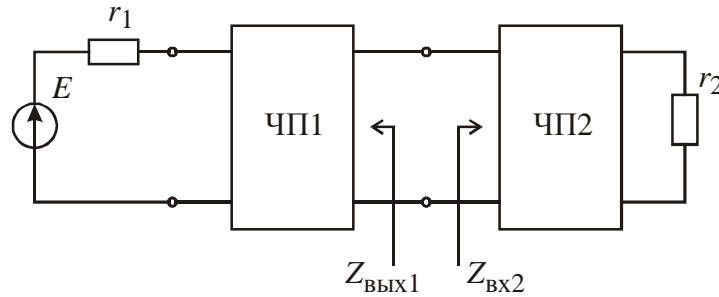


## 11 лекция

### Ускоренный метод реализации симметричных фильтров по Попову.

#### Симметричный фильтр ( $n$ – нечётное).

Представим схему фильтра в виде двух каскадно-соединенных одинаковых четырёхполюсников, при этом выполняются условия:  $r_1 = r_2 = 1$ ,  $Z_{\text{ВЫХ1}} = Z_{\text{ВХ2}}$ .



Достаточно сформировать функцию входного сопротивления  $Z_{\text{ВХ2}}(p)$  по найденной на этапе аппроксимации функции  $T(p)$  и реализовать только вторую (правую) половину фильтра. Левая часть достраивается, исходя из условия симметрии.

#### Порядок реализации:

1. Для каждой пары комплексно-сопряженных корней полинома Гурвица составляем элементарный сомножитель:

$$H_k = (p - p_k)(p - p_k^*).$$

2. Сформируем полином  $M_z(p)$  как произведение элементарных сомножителей с нечётными индексами:

$$M_z(p) = H_1 H_3 H_5 \dots H_{2k-1}.$$

3. Сформируем полином  $N_z(p)$  как произведение элементарных сомножителей с чётными индексами:

$$N_z(p) = H_2 H_4 H_6 \dots H_{2k}.$$

4. Составим функцию  $Z_{\text{ВХ2}}(p)$ :

$$Z_{\text{ВХ2}}(p) = k_z \frac{M_z(p)}{N_z(p)}, \text{ где } k_z = \frac{N_z(0)}{M_z(0)}.$$

5. Разложим полученную функцию в цепную дробь по Кауэру и построим схему правой части.

6. Достроим левую часть фильтра, исходя из условия симметрии:

$$Z_{\text{ВЫХ1}}(p) = Z_{\text{ВХ2}}(p).$$

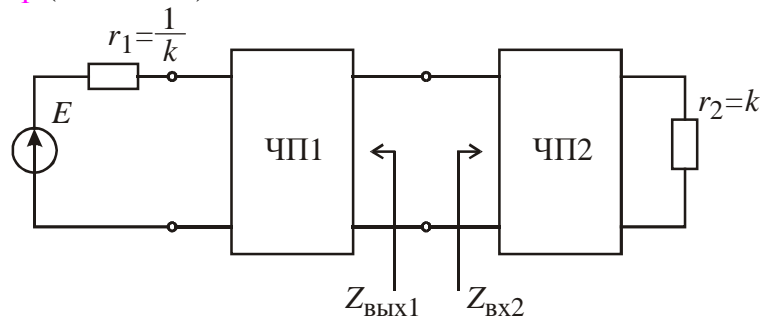
Можно получить **дуальную** схему фильтра, используя соотношение:

$$Z_{\text{ВХ2}}(p) = k_z \frac{N_z(p)}{M_z(p)}, \text{ где } k_z = \frac{M_z(0)}{N_z(0)}.$$

Необходимо выбрать более **экономичную** схему (с меньшим числом индуктивностей).

### Ускоренный метод реализации антисимметричных фильтров по Попову.

#### Антисимметричный фильтр ( $n$ – чётное).



Необходимо выполнение условий:

$$r_1 r_2 = 1, r_2 = k, r_1 = \frac{1}{k}; Z_{\text{ВЫХ1}} Z_{\text{ВХ2}} = 1, Z_{\text{ВХ2}} = \frac{1}{Z_{\text{ВЫХ1}}} = Y_{\text{ВЫХ1}}.$$

Достаточно сформировать функцию входного сопротивления  $Z_{\text{вх}2}(p)$  по найденной на этапе аппроксимации функции  $T(p)$  и реализовать только вторую (правую) половину фильтра. Левая часть достраивается, исходя из условия антисимметрии.

**Порядок реализации:**

1. По полученным корням полинома Гурвица определим:

$$M(p) + jN(p) = (p - p_1)(p - p_3) \dots (p - p_{2k-1}), \text{ или } M(p) - jN(p) = (p - p_2)(p - p_4) \dots (p - p_{2k}).$$

2. Составим функцию  $Z_{\text{вх}2}(p)$ :

$$Z_{\text{вх}2}(p) = \frac{M(p)}{N(p)}.$$

3. Разложим полученную функцию в цепную дробь по Кауэру и построим схему правой части.

4. Достроим левую часть фильтра, исходя из условия антисимметрии:

$$Z_{\text{вх}2}(p) = Y_{\text{вых}1}(p).$$

Можно получить **дуальную** схему фильтра, используя соотношение:

$$Z_{\text{вх}2}(p) = \frac{N(p)}{M(p)}.$$

Необходимо выбрать более **экономичную** схему (с меньшим числом индуктивностей).

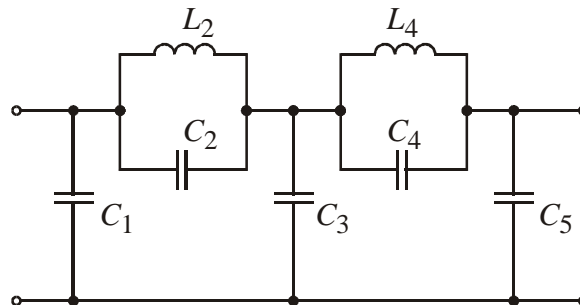
**Аппроксимация частотных характеристик дробями Золотарёва-Кауэра.**

Когда требуется увеличить **скорость нарастания ослабления** в переходной области, фильтры Баттерворта и Чебышёва использовать нецелесообразно, поскольку при их реализации увеличивается число элементов.

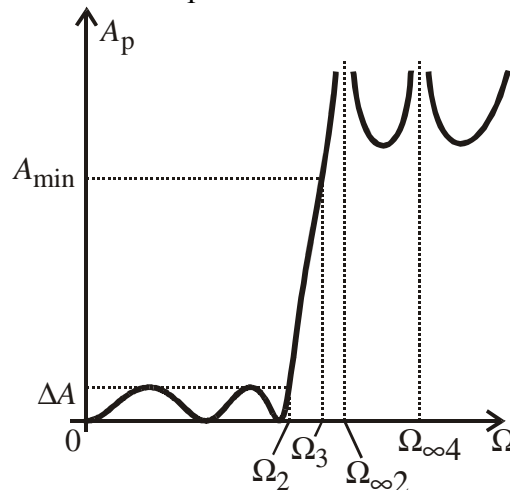
В этих случаях используют фильтры, ослабление которых описывается:

$$A_p(\Omega) = 10 \lg \frac{1}{H_p^2(\Omega)} = 10 \lg \frac{a_0 \Omega^{2n} + a_1 \Omega^{2n-2} + \dots + a_n}{(\Omega_{\infty 1}^2 - \Omega^2)^2 (\Omega_{\infty 2}^2 - \Omega^2) \dots (\Omega_{\infty m}^2 - \Omega^2)^2}.$$

В качестве примера приведем схему ФНЧ Золотарёва-Кауэра пятого порядка:



Представим график частотной зависимости рабочего ослабления:



## 12 лекция

### Активные RC – фильтры

Элементной базой **ARC-фильтров** являются: резисторы, конденсаторы и активные элементы. Активные элементы: ИНУН, ИТУТ, ИНУТ, ИТУН, операционные усилители ОУ.

Синтез ARC-фильтров проводят по их передаточной функции, записанной в операторной форме:  $H(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)}$ ,

где  $U_2(p)$  и  $U_1(p)$  – соответственно выходное и входное операторные напряжения.

Передаточные функции фильтров имеют вид дробно-рациональной функции комплексного переменного  $p$ :  $H(p) = \frac{W(p)}{V(p)}$ ,

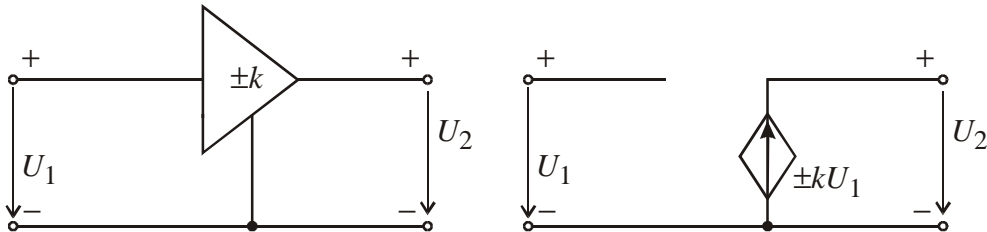
где  $W(p)$  – чётный или нечётный полином;  $V(p)$  – полином Гурвица.

#### ARC-фильтры на базе ИНУН и ОУ

Уравнения, определяющие ИНУН:

$$U_2 = kU_1; |k| \neq \infty; I_1 = 0, Z_{\text{вх}} = \infty, Z_{\text{вых}} = 0.$$

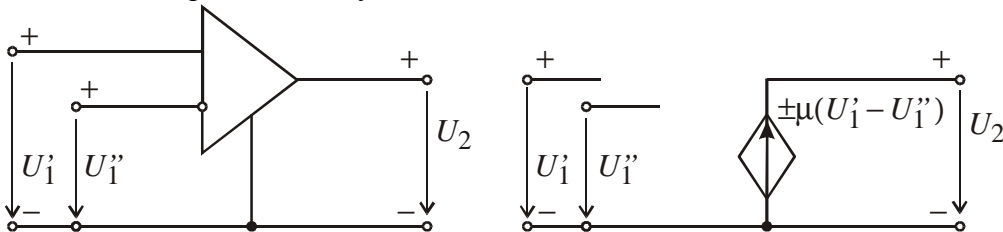
$k > 0$  – неинвертирующий усилитель,  $k < 0$  – инвертирующий.



Уравнения, определяющие ОУ:

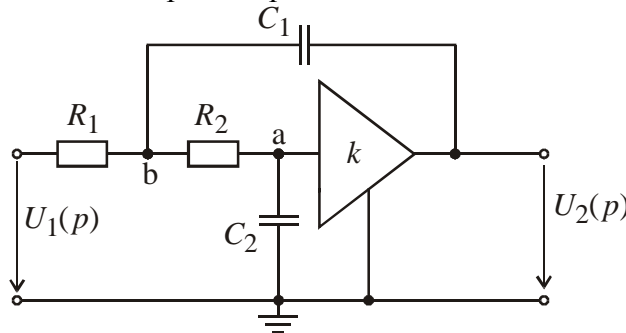
$$U_2 = \mu U_1; \mu = \infty; Z_{\text{вх}} = \infty; Z_{\text{вых}} = 0.$$

Условное обозначение операционного усилителя (ОУ):



#### ARC фильтры второго порядка

Рассмотрим схему **активного ФНЧ** второго порядка на базе ИНУН.



$$\left( \frac{1}{R_2} + pC_2 \right) V_a - \frac{1}{R_2} V_b = 0,$$

$$\left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + pC_1 \right) V_b - \frac{1}{R_2} V_a = U_1 \frac{1}{R_1} + U_2 pC_1$$

Коэффициент усиления определяется как:  $k = \frac{U_2(p)}{V_a(p)}$ .

Операторное выражение для передаточной функции:

$$H(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{k}{R_1 R_2 C_1 C_2 p^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2 - k R_1 C_1) p + 1}.$$

Введём обозначения:

$$b_0 = 1, b_1 = R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2 - k R_1 C_1, b_2 = R_1 R_2 C_1 C_2, \text{ тогда: } H(p) = \frac{1}{b_2 p^2 + b_1 p + b_0}.$$

Основные характеристики АРС ФНЧ второго порядка:

$$Q = \frac{\sqrt{b_0 b_2}}{b_1} - \text{добротность полюса}; \omega_0 = \sqrt{\frac{b_0}{b_2}} - \text{частота полюса (резонансная)}.$$

**Классическая чувствительность:**  $S_x^W(p, x) = \frac{\frac{dW}{dx}}{\frac{W}{x}} = \frac{x}{W(p)} \cdot \frac{dW}{dx}$ , где

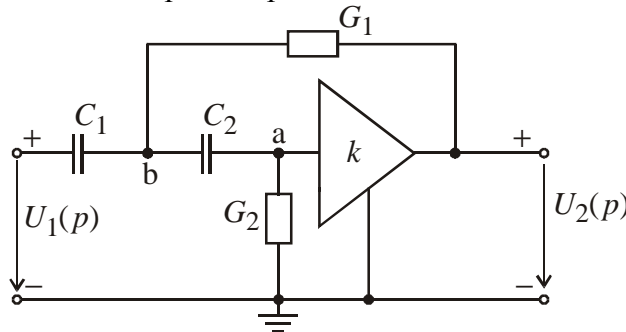
$W(p, x)$  – функция цепи (добротность полюса, частота полюса),

$x$  – параметр, влияющий на функцию цепи (ёмкость, сопротивление, коэффициент усиления).

Например, определим чувствительность частоты полюса при изменении параметра  $R_1$  и  $k$ .

$$S_{R_1}^{\omega_0} = \frac{R_1}{\omega_0} \cdot \frac{d}{dR_1} \left( \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}} \right) = -\frac{1}{2}, S_k^{\omega_0} = \frac{k}{\omega_0} \cdot \frac{d}{dk} \left( \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}} \right) = 0.$$

Рассмотрим схему **активного ФВЧ** второго порядка на базе ИНУН.



$$(G_2 + pC_2)V_a(p) - pC_2V_b(p) = 0, (G_1 + pC_1 + pC_2)V_b(p) - pC_2V_a(p) = U_1(p)pC_1 + U_2(p)G_1.$$

Определим операторную передаточную функцию с учётом того, что  $k = \frac{U_2(p)}{V_a(p)}$ :

$$H(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{kp}{p^2 + (G_1 C_1^{-1} + G_2 C_2^{-1} + G_2 C_1^{-1} - k G_1 C_1^{-1})p + G_1 G_2 C_1^{-1} C_2^{-1}}.$$

Введём обозначения:

$$c_1 = k, a_0 = G_1 G_2 C_1^{-1} C_2^{-1}, a_1 = G_1 C_1^{-1} + G_2 C_2^{-1} + G_2 C_1^{-1} - k G_1 C_1^{-1}, a_2 = 1, \text{ тогда } H(p) = \frac{c_1 p}{a_2 p^2 + a_1 p + a_0}.$$

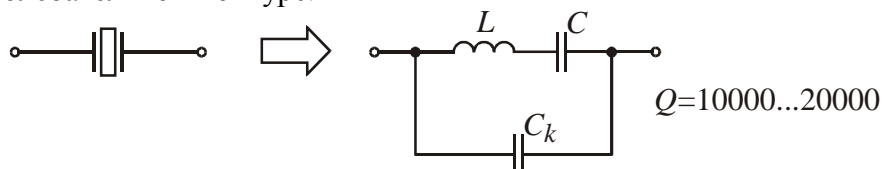
**Резонаторные фильтры (пьезоэлектрические, магнитоэлектрические, электромеханические).**

**Резонаторные фильтры** в отличие от LC-фильтров имеют очень высокую добротность, избирательность.

В **пьезоэлектрических фильтрах** роль резонатора выполняет пластинка из материала, обладающего пьезоэлектрическим эффектом (кристалл кварца). Пьезоэффект кварцевой пластинки заключается в появлении на её поверхности зарядов при механическом воздействии. Обратный пьезоэффект – возникновение механических колебаний пластинки при помещении её в переменное электрическое поле.

При совпадении частоты механических колебаний и частоты переменного напряжения возникает резонанс, амплитуда тока достигает максимального значения.

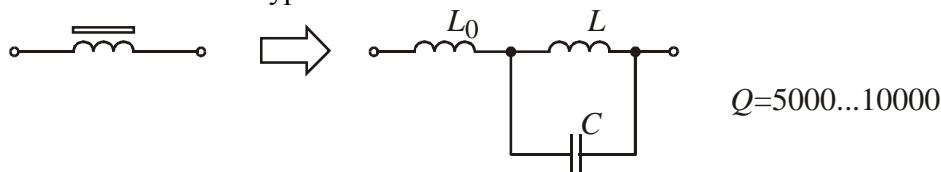
Механический резонанс в кварцевой пластинке подобен резонансу напряжений в последовательном колебательном контуре.



$C_k$  – ёмкость кварцедержателя.

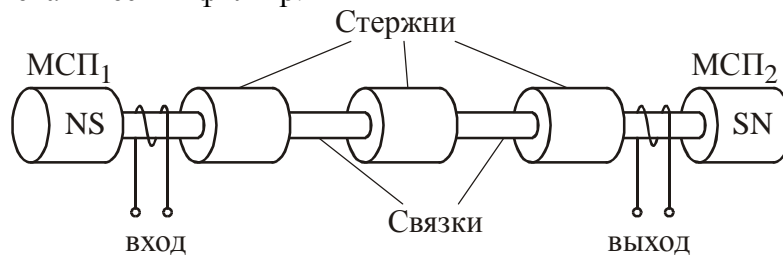
**Магнитоотрицательные фильтры** строятся на основе резонаторов из ферромагнитного материала, обладающего магнитоотрицательным эффектом (сплав никеля с кобальтом). Магнитоотрицательный эффект состоит в том, что стержень из ферромагнетика, помещенный в переменное магнитное поле, изменяет свои геометрические размеры. Обратный эффект – изменение магнитной проницаемости стержня при механическом воздействии на него.

Механический резонанс магнитоотрицательного стержня подобен резонансу токов в параллельном колебательном контуре.



Пьезоэлектрические и магнитоотрицательные фильтры строятся по мостовой схеме.

В **электроакустических фильтрах** резонаторами являются металлические тела (диски, пластинки, стержни), соединенные металлическими связками. Представим трехрезонаторный стержневой электроакустический фильтр.



Колебания возбуждаются с помощью МСП<sub>1</sub>; снимаются колебания с выхода с помощью МСП<sub>2</sub>.

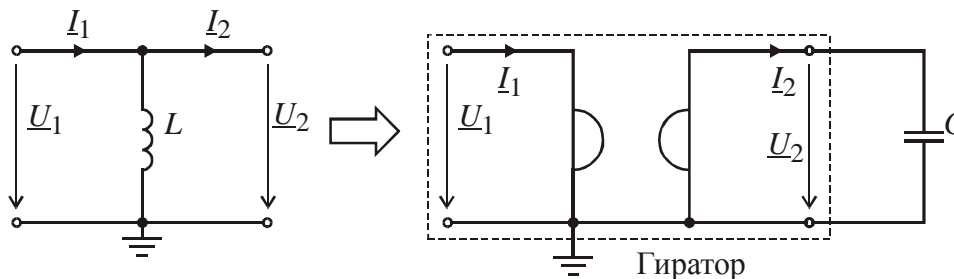
### Имитационные фильтры

В фильтрах данного типа имитируется индуктивность с помощью **гиратора** – необратимого четырёхполюсника, описываемого уравнениями:

$$\underline{U}_1 = \underline{I}_2 R_\Gamma, \quad \underline{I}_1 = \underline{U}_2 G_\Gamma.$$

Матрица А-параметров:

$$\begin{bmatrix} 0 & R_\Gamma \\ G_\Gamma & 0 \end{bmatrix}, \quad G_\Gamma = \frac{1}{R_\Gamma}.$$



Входное сопротивление:

$$Z_{\text{вх}}(p) = \frac{U_1(p)}{I_1(p)} = pL = \frac{I_2(p) R_\Gamma}{U_2(p) G_\Gamma} = R_\Gamma^2 pC.$$

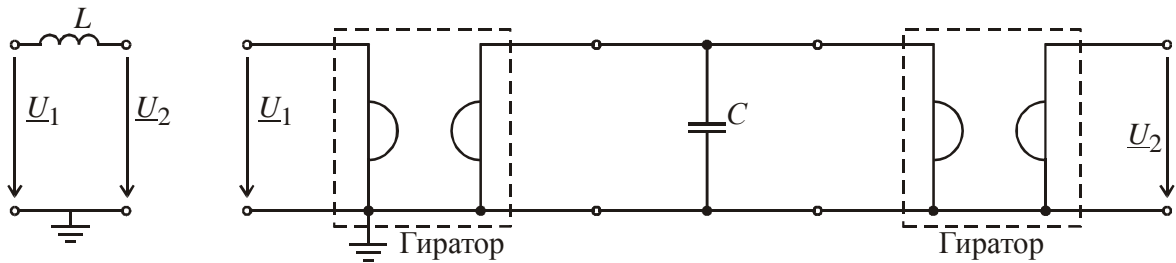
Отсюда видно, что  $L = R_\Gamma^2 C$ .

Использование гираторов с большим значением  $R_\Gamma$  позволяет из небольших ёмкостей моделировать большие значения индуктивности. **Важным свойством гиратора** является то, что он не потребляет энергию цепи, то есть ведет себя как пассивный элемент без потерь.

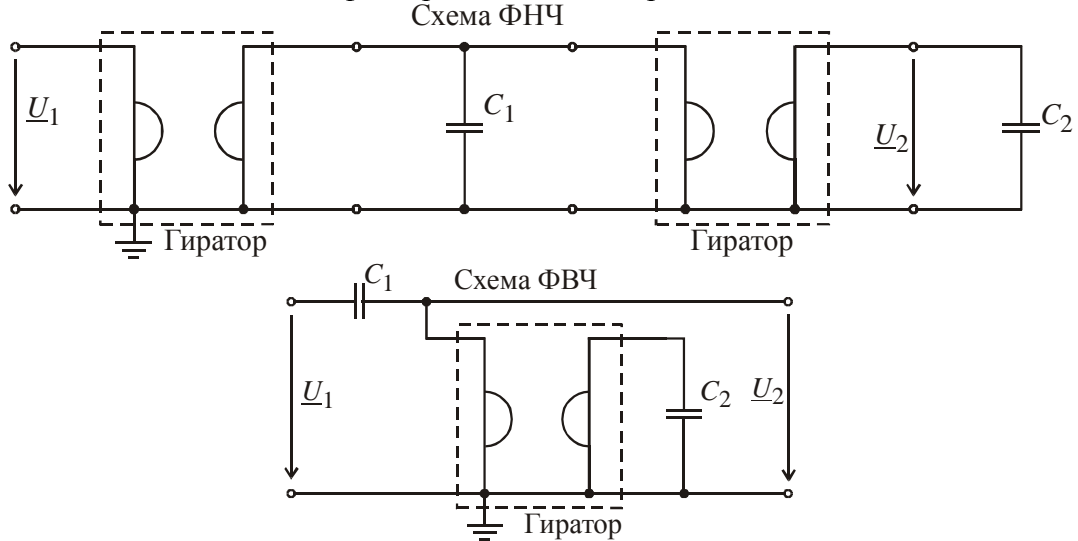
Анализируя схемы реактивных фильтров, видно, что встречаются индуктивности двух типов:

1. **«заземлённая»** индуктивность – один из её выводов подключен к общему зажиму.
2. **«незаземлённая»** индуктивность – ни один из её выводов не подключен к общему проводнику.

По предыдущей схеме видно, что более просто имитируется «заземлённая» индуктивность. Для имитации «незаземлённой» индуктивности используется цепь с двумя гираторами.



Представим схемы имитационных фильтров нижних и верхних частот:

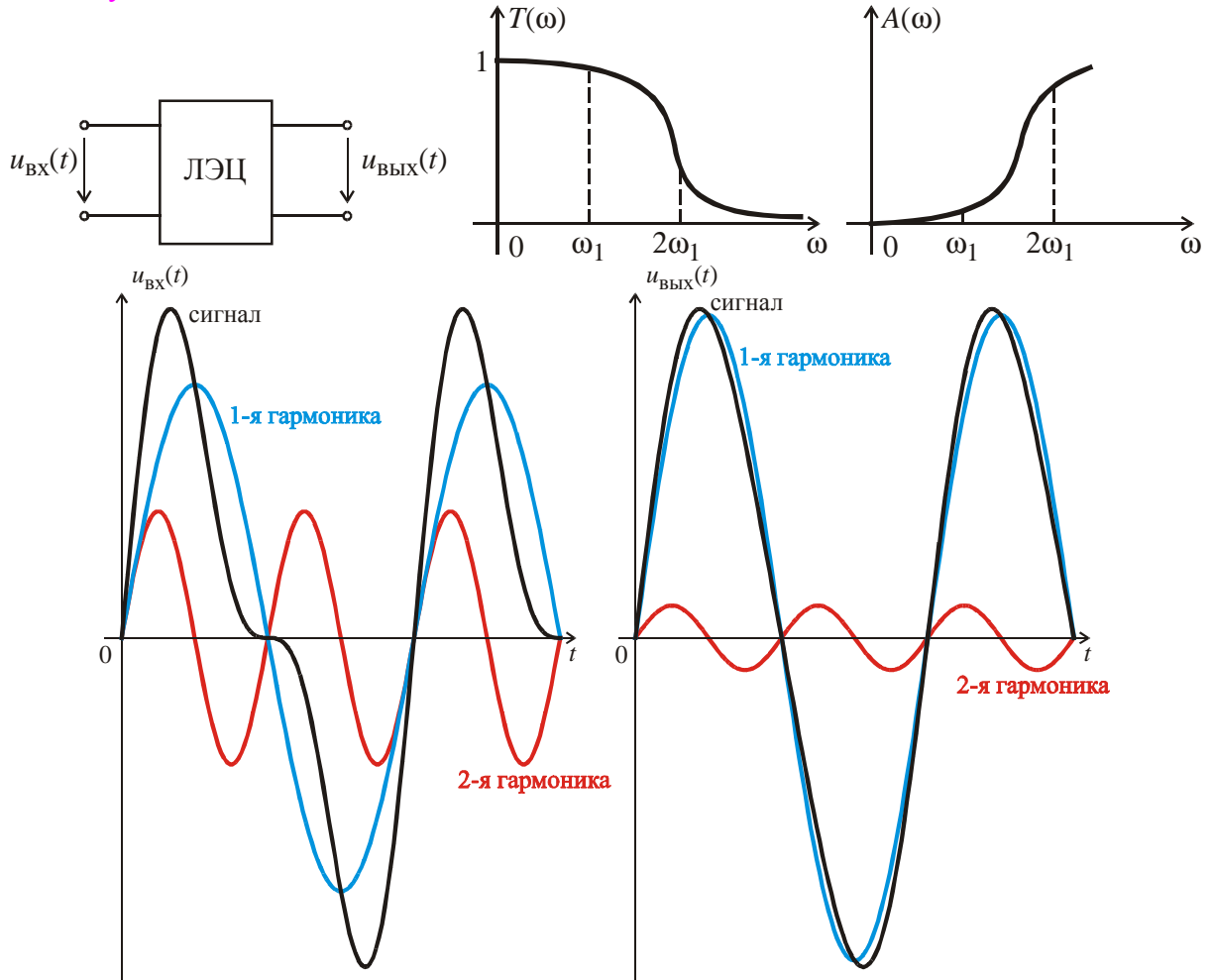


### 13 лекция

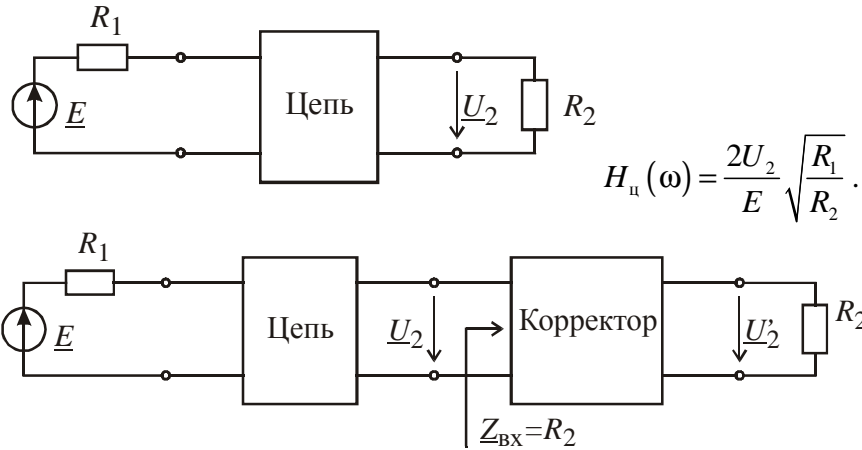
Корректирование амплитудно-частотных искажений.

**Искажение сигнала** – изменение его формы на выходе цепи по сравнению с формой сигнала на входе цепи.

**Амплитудно-частотные искажения** связаны с непостоянством АЧХ.



Для устранения амплитудно-частотных искажений применяют **амплитудный корректор** – четырёхполюсник, включаемый каскадно в цепь с целью дополнения АЧХ до постоянной величины.

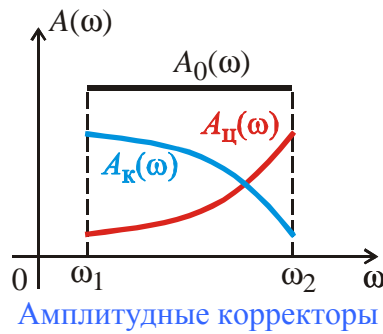


$$H_u(\omega) = \frac{2U_2}{E} \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}$$

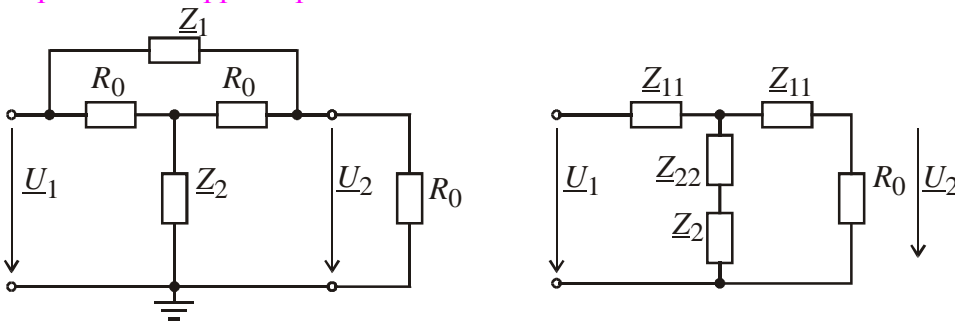
$$H_0(\omega) = \frac{2U'_2}{E} \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} \quad H_0(\omega) = \frac{2U_2}{E} \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} \cdot \frac{U'_2}{U_2} = H_u(\omega) H_k(\omega)$$

$$H_k(\omega) = \frac{U'_2}{U_2} \text{ – коэффициент передачи корректора.}$$

$$A_0(\omega) = 20 \lg \frac{1}{H_0(\omega)} = 20 \lg \frac{1}{H_u(\omega)} \cdot \frac{1}{H_k(\omega)}, \quad A_0(\omega) = 20 \lg \frac{1}{H_u(\omega)} + 20 \lg \frac{1}{H_k(\omega)} = A_u(\omega) + A_k(\omega).$$



**Первый тип корректора**



Реактивные сопротивления **дуальные**:  $Z_1 Z_2 = R_0^2$ .

Определим входное сопротивление:

$$Z_{\text{вх}} = Z_{11} + \frac{(Z_{11} + Z_2)(Z_{11} + R_0)}{Z_{11} + Z_{22} + Z_2 + R_0} = R_0, \text{ где } Z_{11} = \frac{R_0 Z_1}{Z_1 + 2R_0}, \quad Z_{22} = \frac{R_0^2}{Z_1 + 2R_0}$$

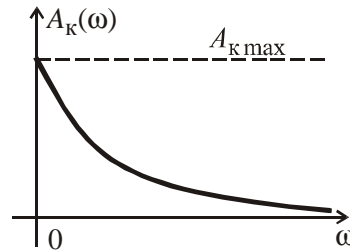
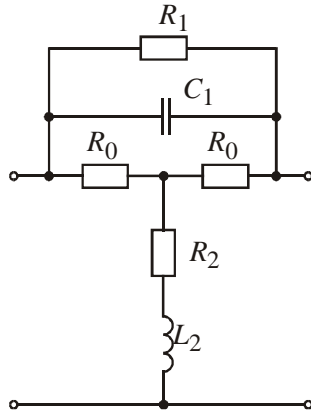
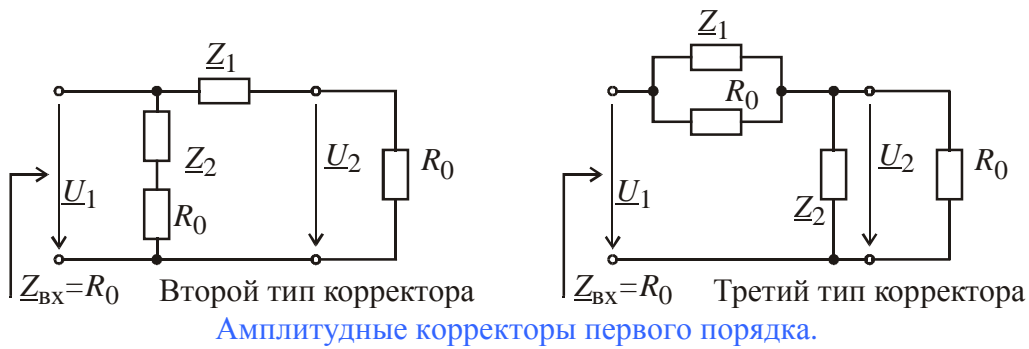
Определим передаточную функцию:

$$H_k(\omega) = \frac{U_2(\omega)}{U_1(\omega)} = \frac{(Z_{22} + Z_2) R_0}{Z_{\text{вх}} (Z_{11} + Z_{22} + Z_2 + R_0)} = \frac{R_0}{R_0 + Z_1}, \text{ или } H_k(p) = \frac{R_0}{R_0 + Z_1(p)}$$

Определим ослабление, вносимое корректором:

$$A_k(\omega) = 20 \lg \frac{1}{H_k(\omega)} = 20 \lg \left| 1 + \frac{Z_1}{R_0} \right|.$$

Зная поведение  $Z_1$  на разных частотах, можно определить частотную зависимость ослабления!!!



Определим операторное сопротивление:

$$Z_1(p) = \frac{R_1 \frac{1}{pC_1}}{R_1 + \frac{1}{pC_1}} = \frac{R_1}{pR_1C_1 + 1} = \frac{1}{C_1 \left( p + \frac{1}{R_1C_1} \right)}.$$

Определим передаточную функцию корректора:

$$H_k(p) = \frac{R_0}{R_0 + Z_1(p)} = \frac{R_0}{R_0 + \frac{1}{C_1 \left( p + \frac{1}{R_1C_1} \right)}} = \frac{p + \frac{1}{R_1C_1}}{p + \frac{R_0 + R_1}{R_0R_1C_1}} = \frac{p + \alpha_1}{p + \alpha_2}.$$

$$H_k^2(\omega) = \underline{H}_k(\omega) \underline{H}_k^*(\omega) = \frac{j\omega + \alpha_1}{j\omega + \alpha_2} \cdot \frac{-j\omega + \alpha_1}{-j\omega + \alpha_2} = \frac{\omega^2 + \alpha_1^2}{\omega^2 + \alpha_2^2}.$$

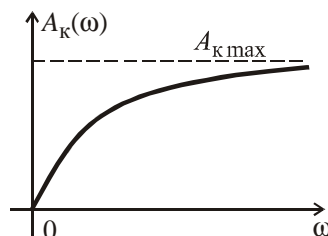
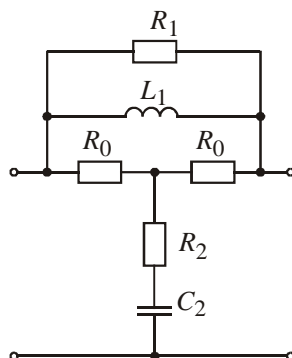
Определим ослабление корректора:

$$A_k(\omega) = 20 \lg \frac{1}{H_k(\omega)} = 20 \lg \sqrt{\frac{\omega^2 + \alpha_2^2}{\omega^2 + \alpha_1^2}} = 10 \lg \frac{\omega^2 + \alpha_2^2}{\omega^2 + \alpha_1^2}.$$

Определим максимальное значение ослабления:

$$A_{k \max} = A_k(0) = 10 \lg \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2} = 20 \lg \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = 20 \lg \frac{R_0 + R_1}{R_0 R_1 C_1} R_1 C_1 = 20 \lg \frac{R_0 + R_1}{R_0}.$$

Определим частотную характеристику ослабления корректора, состоящего из **параллельного** соединения  $R_1$  и  $L_1$ .





Определим операторное сопротивление:  $Z_1(p) = \frac{R_1 p L_1}{R_1 + p L_1}$ .

Определим передаточную функцию корректора:

$$H_k(p) = \frac{R_0}{R_0 + Z_1(p)} = \frac{R_0}{R_0 + \frac{R_1 p L_1}{R_1 + p L_1}} = \frac{R_0 (R_1 + p L_1)}{R_1 R_0 + p L_1 R_0 + R_1 p L_1} = \frac{R_0 L_1 \left( \frac{R_1}{L_1} + p \right)}{L_1 (R_0 + R_1) \left( \frac{R_1 R_0}{L_1 (R_0 + R_1)} + p \right)}$$

$$H_k(p) = K \frac{p + \alpha_1}{p + \alpha_2}, \text{ где } K = \frac{R_0}{R_0 + R_1}, \alpha_1 = \frac{R_1}{L_1}, \alpha_2 = \frac{R_1 R_0}{L_1 (R_0 + R_1)}.$$

$$H_k^2(\omega) = \underline{H}_k(\omega) \underline{H}_k^*(\omega) = K^2 \frac{j\omega + \alpha_1}{j\omega + \alpha_2} \cdot \frac{-j\omega + \alpha_1}{-j\omega + \alpha_2} = K^2 \frac{\omega^2 + \alpha_1^2}{\omega^2 + \alpha_2^2}.$$

Определим ослабление корректора:

$$A_k(\omega) = 20 \lg \frac{1}{H_k(\omega)} = 20 \lg \left( \frac{1}{K} \sqrt{\frac{\omega^2 + \alpha_2^2}{\omega^2 + \alpha_1^2}} \right) = 10 \lg \left( \frac{1}{K^2} \cdot \frac{\omega^2 + \alpha_2^2}{\omega^2 + \alpha_1^2} \right).$$

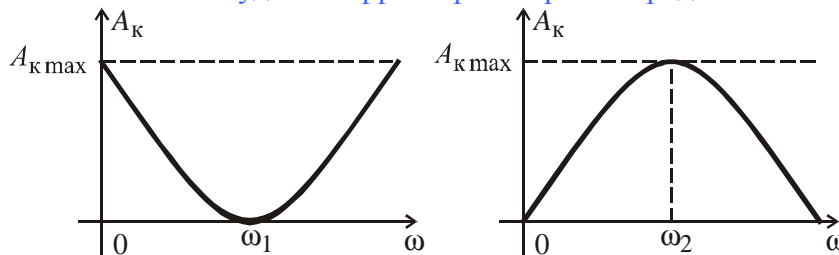
Определим минимальное значение ослабления:

$$A_{k \min} = A_k(0) = 10 \lg \left( \frac{1}{K^2} \cdot \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2} \right) = 20 \lg \left( \frac{1}{K} \cdot \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) = 20 \lg \left( \frac{R_0 + R_1}{R_0} \cdot \frac{R_1 R_0}{L_1 (R_0 + R_1)} \cdot \frac{L_1}{R_1} \right) = 20 \lg 1 = 0.$$

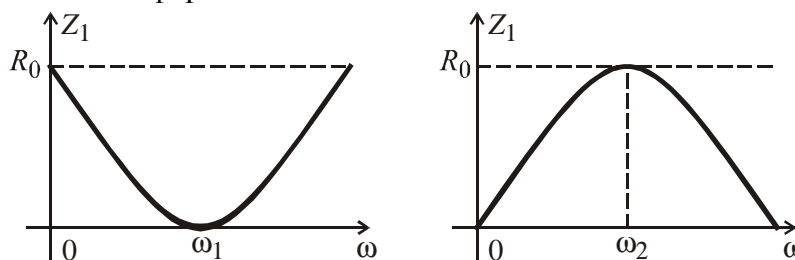
Определим максимальное значение корректора:

$$A_{k \max} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} 10 \lg \left( \frac{1}{K^2} \cdot \frac{\omega^2 + \alpha_2^2}{\omega^2 + \alpha_1^2} \right) = 10 \lg \frac{1}{K^2} = 20 \lg \frac{R_0 + R_1}{R_0} = 20 \lg \left( 1 + \frac{R_1}{R_0} \right).$$

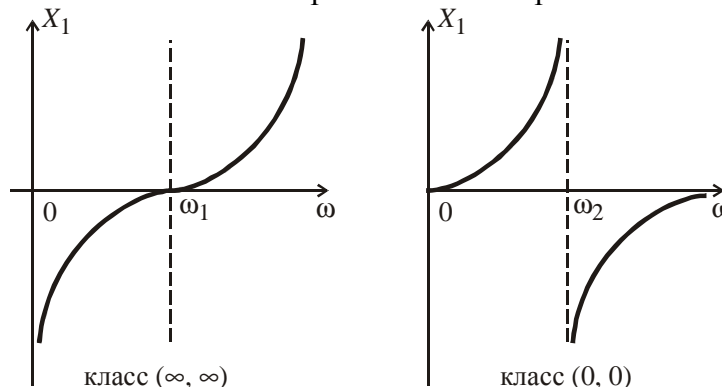
#### Амплитудные корректоры второго порядка



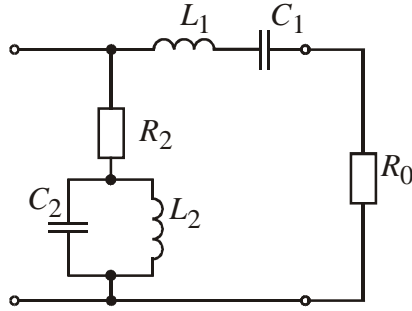
Поскольку  $A_k(\omega) = 20 \lg \frac{1}{H_k(\omega)} = 20 \lg \left| 1 + \frac{Z_1}{R_0} \right|$ , то форма частотной зависимости полного сопротивления  $Z_1$  совпадает с формой частотной зависимости ослаблением корректора:



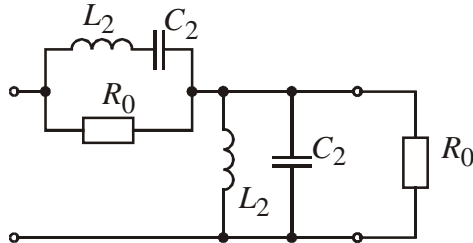
Представим графики частотной зависимости реактивного сопротивления:



Второй тип корректора для первого графика



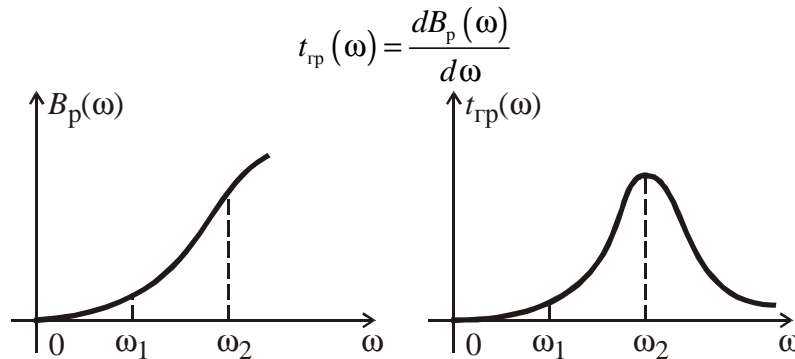
Третий тип корректора для первого графика



14 лекция

Корректирование фазочастотных искажений

Рассмотрим цепь, имеющую рабочую фазу и характеристику группового времени прохождения (ГВП) в виде:



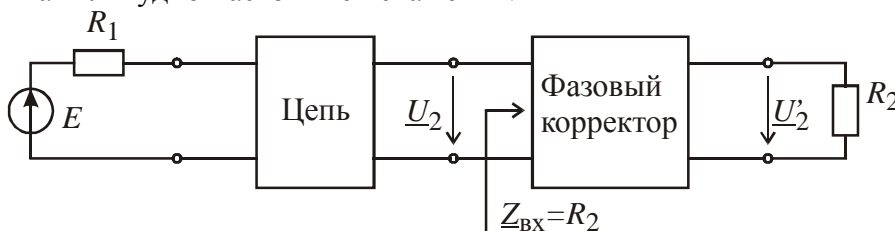
При этом фаза первой гармоники почти не изменяется, а фаза второй гармоники существенно увеличивается. В результате форма сигнала на входе цепи будет отличаться от формы сигнала на выходе.

Искажения формы сигнала при прохождении его по цепи, обусловленные нелинейностью фазо-частотной характеристики цепи или непостоянством группового времени прохождения, называются **фазо-частотными искажениями**.

Условием отсутствия фазо-частотных искажений в цепи следует считать линейность рабочей фазы и ФЧХ цепи, либо неизменной ГВП, то есть

$$B_p(\omega) = -\varphi(\omega) = \omega t_0, \quad t_{гр}(\omega) = \frac{dB_p(\omega)}{d\omega} = t_0.$$

В реальных цепях таких условий достичь невозможно, но можно к ним приблизиться!!! С этой целью применяют **фазовые корректоры** – четырёхполюсники, включаемые каскадно с цепью и дополняющие фазовую характеристику цепи до линейной. При этом фазовый корректор **не должен вносить** амплитудно-частотные искажения.



Определим комплексную передаточную функцию общей цепи:

$$\underline{H}_0(\omega) = \frac{2U'_2}{E} \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}.$$

Умножим и разделим это выражение на  $\underline{U}_2$ , тогда:

$$\underline{H}_0(\omega) = \frac{2\underline{U}_2}{\underline{E}} \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} \cdot \frac{\underline{U}'_2}{\underline{U}_2} = \underline{H}_u(\omega) \underline{H}_k(\omega).$$

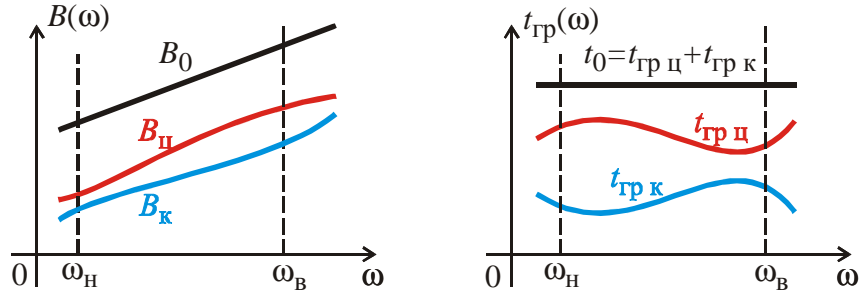
Определим ФЧХ общей цепи:

$$\underline{H}_0(\omega) e^{j\arg(\underline{H}_0(j\omega))} = \underline{H}_u(\omega) e^{j\arg(\underline{H}_u(j\omega))} \underline{H}_k(\omega) e^{j\arg(\underline{H}_k(j\omega))}, \text{ отсюда следует:}$$

$$\varphi_0(\omega) = \varphi_u(\omega) + \varphi_k(\omega).$$

**Вывод:** ФЧХ общей цепи вычисляется как сумма ФЧХ цепи и корректора.

За пределами рабочего диапазона частот ФЧХ или ГВП могут иметь любую форму.



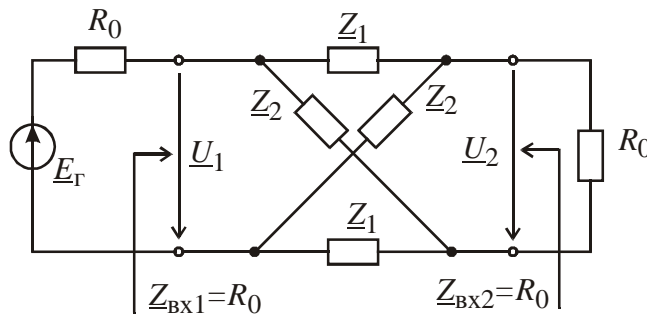
Фазовые корректоры

Фазовые корректоры должны иметь постоянное входное сопротивление и постоянное ослабление, которые не зависят от частоты. Таким условиям удовлетворяют симметричные мостовые четырёхполюсники, у которых сопротивления  $\underline{Z}_1$  и  $\underline{Z}_2$  дуальные.

$$\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 = R_0^2, \text{ причём } \underline{Z}_1 = \pm jX_1, \underline{Z}_2 = \mp jX_2.$$

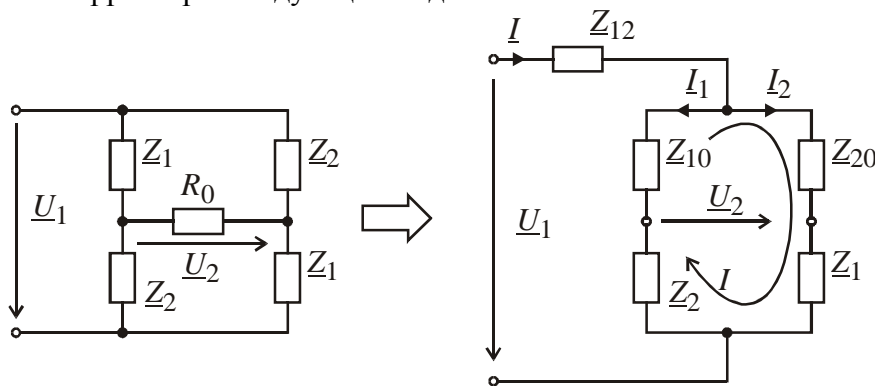
Такие четырёхполюсники имеют одинаковые собственные сопротивления:

$$\underline{Z}_{c1} = \underline{Z}_{c2} = \underline{Z}_c = \sqrt{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2} = R_0.$$



Покажем, что входное сопротивление фазового корректора равно номинальному!

Представим фазовый корректор в следующем виде:



$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \underline{Z}_{12} + \frac{(\underline{Z}_{10} + \underline{Z}_2)(\underline{Z}_{20} + \underline{Z}_1)}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_{10} + \underline{Z}_{20}}, \text{ где}$$

$$\underline{Z}_{12} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + R_0}, \underline{Z}_{10} = \frac{\underline{Z}_1 R_0}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + R_0}, \underline{Z}_{20} = \frac{\underline{Z}_2 R_0}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + R_0}.$$

После подстановки и алгебраических преобразований, получим:

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \frac{\underline{Z}_1 R_0 + \underline{Z}_2 R_0 + 2\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + 2R_0 + \underline{Z}_1}, \text{ так как } \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 = R_0^2, \text{ то } \underline{Z}_{\text{вх}} = R_0.$$

Определим комплексный коэффициент передачи по напряжению:

$$\underline{H}_k(\omega) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}, \text{ где } \underline{U}_2 = \underline{I}_1 \underline{Z}_2 - \underline{I}_2 \underline{Z}_1 \text{ для контура I.}$$

По формулам делителя тока определим:

$$\underline{I}_1 = \underline{I} \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_{20}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_{10} + \underline{Z}_{20}}, \quad \underline{I}_2 = \underline{I} \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{10}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_{10} + \underline{Z}_{20}}.$$

Выражение для комплексного коэффициента передачи:

$$\underline{H}_k(\omega) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{\underline{I} \left( \frac{(\underline{Z}_{20} + \underline{Z}_1) \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_{10} + \underline{Z}_{20}} - \frac{(\underline{Z}_{10} + \underline{Z}_2) \underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_{10} + \underline{Z}_{20}} \right)}{\underline{I} \underline{Z}_{\text{вх}}}, \text{ так как } \underline{Z}_{\text{вх}} = R_0, \text{ то}$$

$$\underline{H}_k(\omega) = \frac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1}{\underline{Z}_2 + 2R_0 + \underline{Z}_1}, \text{ так как } \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 = R_0^2, \text{ то } \underline{H}_k(\omega) = \frac{R_0 - \underline{Z}_1}{R_0 + \underline{Z}_1}.$$

Пусть  $\underline{Z}_1 = jX_1$ , тогда

$$\underline{H}_k(\omega) = \frac{R_0 - jX_1}{R_0 + jX_1} = \frac{\sqrt{R_0^2 + X_1^2} e^{-j \arctg \frac{X_1}{R_0}}}{\sqrt{R_0^2 + X_1^2} e^{j \arctg \frac{X_1}{R_0}}} = 1 \cdot e^{-j 2 \arctg \frac{X_1}{R_0}}.$$

Таким образом:  $H_k(\omega) = 1$  – АЧХ,  $\varphi_k(\omega) = -2 \arctg \frac{X_1}{R_0}$  – ФЧХ.

Так как  $B_p(\omega) = -\varphi(\omega)$ , то рабочая фаза определяется как:  $B_k(\omega) = 2 \arctg \frac{X_1}{R_0}$ .

Определим групповое время прохождения (ГВП):

$$t_{\text{гп}}(\omega) = \frac{dB_p(\omega)}{d\omega} = \frac{\frac{2}{R_0}}{1 + \left(\frac{X_1}{R_0}\right)^2} \cdot \frac{dX_1}{d\omega}.$$

**Вывод:** рабочая фаза и ГВП определяются только видом двухполюсника с реактивным сопротивлением  $X_1$ .

Фазовый корректор I порядка. Линия задержки



Двухполюсником  $\underline{Z}_1$  является индуктивность, а  $\underline{Z}_2$  – ёмкость:  $\underline{Z}_1 = j\omega L$ ,  $\underline{Z}_2 = \frac{1}{j\omega C}$ .

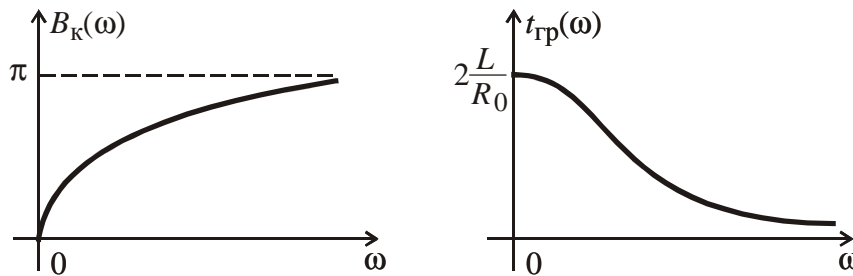
Определим операторную передаточную функцию:

$$\underline{H}_k(\omega) = \frac{R_0 - \underline{Z}_1}{R_0 + \underline{Z}_1} = \frac{R_0 - j\omega L}{R_0 + j\omega L} = 1 \cdot e^{-j 2 \arctg \frac{\omega L}{R_0}}.$$

Отсюда определим ФЧХ:  $\varphi_k(\omega) = -2 \arctg \frac{\omega L}{R_0}$ .

Определим рабочую фазу корректора и ГВП:

$$B_k(\omega) = 2 \arctg \frac{\omega L}{R_0}, \quad t_{\text{гп}}(\omega) = \frac{dB_k(\omega)}{d\omega} = 2 \frac{L}{R_0 \left(1 + \omega^2 \frac{L^2}{R_0^2}\right)} = \frac{2LR_0}{R_0^2 + \omega^2 L^2}.$$



**Линия задержки** осуществляет задержку колебания на постоянную величину  $t_3$ , не изменяя энергии этого колебания. Для идеальной линии задержки выполняются условия:

$$H(\omega) = 1, \quad \varphi(\omega) = -\omega t_3.$$

Передаточную функцию линии можно представить как:

$$\underline{H}(\omega) = 1 \cdot e^{-j\omega t_3}.$$

Данная функция не удовлетворяет условиям физической реализуемости, так как  $\varphi(\omega)$  не является тангенс-функцией.

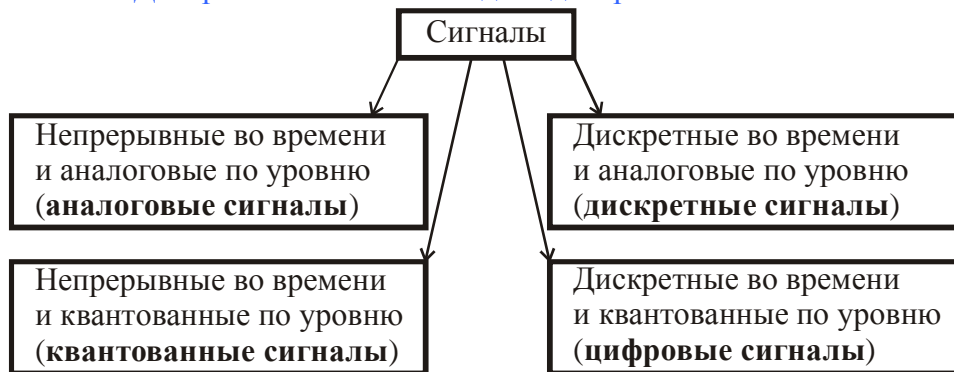
Определим общий вид передаточной функции линии задержки:

$$\underline{H}(\omega) = \frac{V^*(\omega)}{V(\omega)}, \quad \text{либо} \quad H(p) = \frac{V(-p)}{V(p)} \quad \text{где } V(p) \text{ – полином Гурвица.}$$

Решая задачу синтеза линии задержки необходимо найти такой полином Гурвица, у которого в заданном частотном интервале функция  $\varphi_r(\omega) = \arg V(\omega)$  аппроксимировала бы линейную зависимость  $\xi(\omega) = \omega\tau$ , или функция  $\varphi'_r(\omega)$  аппроксимировала бы постоянную  $\xi'(\omega) = \tau$ .

## 15 лекция

### Дискретные сигналы. Модель дискретного сигнала.

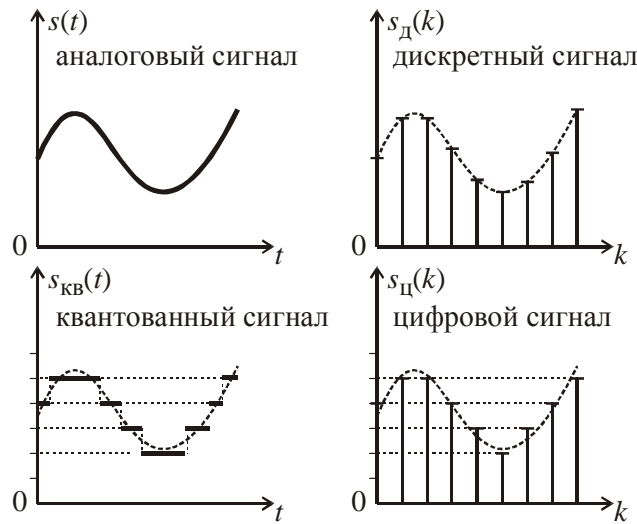


**Сигналы** как процессы, передающие информацию о состоянии физических систем, описываются математическими моделями в виде функций времени.

**Непрерывные (аналоговые) сигналы** определены на непрерывном временном множестве и характеризуются непрерывным множеством принимаемых значений.

**Дискретные сигналы** определены на дискретном временном множестве.

**Цифровые сигналы** определены на дискретном временном множестве и характеризуются дискретным множеством принимаемых значений.



Математическая модель аналогового сигнала:  $S(t)$  – непрерывная функция.

Математическая модель дискретного сигнала:  $S(k\Delta t) \Leftrightarrow S_d(k)$  – последовательность отсчётных значений.

Отсчёты дискретного сигнала производятся через постоянный промежуток времени:

$$\Delta t = t_n - t_{n-1} - \text{интервал дискретизации, } \omega_d = \frac{2\pi}{\Delta t} - \text{частота дискретизации.}$$

Для удобства анализа дискретных систем используют модель дискретного сигнала в виде:

$$S_{\text{ИМ}}(t) = \Delta t \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(\Delta t \cdot n) \delta(t - n \cdot \Delta t) - \text{модулированная импульсная последовательность (МИП).}$$

МИП можно представить также в виде:  $S_{\text{ИМ}}(t) = S(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta \delta(t - n \cdot \Delta t) = S(t) D(t)$ .

С физической точки зрения МИП описывает сигнал на выходе устройства, в котором реализуется операция умножение входного аналогового сигнала  $S(t)$  на импульсный сигнал  $D(t)$ :



Импульсный сигнал (**дискретизирующая последовательность**)  $D(t)$  – периодическая функция с периодом  $T = \Delta t$  и может быть представлена рядом Фурье:

$$D(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m e^{jm\omega_d t} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m e^{jm \frac{2\pi}{\Delta t} t},$$

$$\text{где } C_m = \frac{1}{\Delta} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} D(t) e^{-jm \frac{2\pi}{\Delta} t} dt = \frac{1}{\Delta} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \Delta \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta) e^{-jm \frac{2\pi}{\Delta} t} dt = \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \delta(t) e^{-jm \frac{2\pi}{\Delta} t} dt = 1.$$

Окончательно получаем:

$$D(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{jm \frac{2\pi}{\Delta} t}, \text{ с другой стороны } D(t) = \Delta t \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n \cdot \Delta t), \text{ таким образом:}$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{jm \frac{2\pi}{\Delta} t} = \Delta t \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n \cdot \Delta t) - \text{I суммирование Пуассона.}$$

**Спектр модулированной импульсной последовательности**

Определим спектр импульсной функции  $D(t)$  по формуле:  $D(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} D(t) e^{-j\omega t} dt$ .

$$D(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{jm \frac{2\pi}{\Delta} t} e^{-j\omega t} dt = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\left(\omega - m \frac{2\pi}{\Delta}\right) t} dt = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - m \frac{2\pi}{\Delta}\right).$$

С другой стороны  $D(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta t \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n \cdot \Delta t) e^{-j\omega t} dt = \frac{\Delta t}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega n \cdot \Delta t}$ .

Таким образом:  $\frac{\Delta t}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega n \cdot \Delta t} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - m \frac{2\pi}{\Delta t}\right)$ . – **II суммирование Пуассона**.

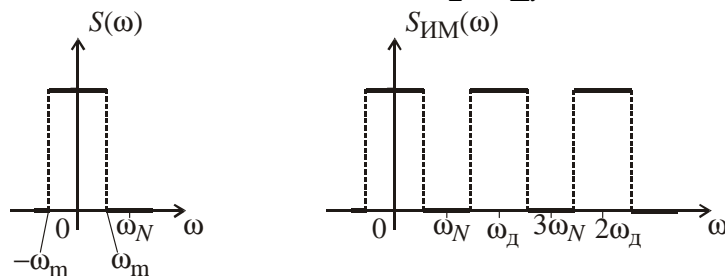
Определим спектр МИП по формуле:  $S_{\text{ИМ}}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(t) D(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} S(\Omega) D(\omega - \Omega) d\Omega$ .

После подстановки, получим:

$$S_{\text{ИМ}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\Omega) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - m \frac{2\pi}{\Delta t} - \Omega\right) d\Omega = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S(\Omega) \delta\left(\omega - \Omega - m \frac{2\pi}{\Delta t}\right) d\Omega = \sum_{m=-\infty}^{\infty} S\left(\omega - m \frac{2\pi}{\Delta t}\right).$$

**Вывод:** Спектр дискретного сигнала, описываемого моделью МИП, представляет собой сумму бесконечно большого числа сдвинутых по оси частот копий спектра исходного аналогового сигнала.

Пусть выполняется условие:  $\omega_m < \omega_N = \frac{\omega_d}{2} = \frac{\pi}{\Delta t}$  – **частота Найквиста**.



Измерения, проведенные на любом из периодов  $S_{\text{ИМ}}(\omega)$ , позволяют восстановить спектр  $S(\omega)$ .

Если  $\omega_m > \omega_N$ , то восстановить спектр аналогового сигнала невозможно. В этом случае в спектре дискретного сигнала происходит наложение копий спектра аналогового сигнала.

### Теорема дискретизации

**Определение:** Произвольный сигнал со спектром, лежащим в интервале частот  $-\omega_m \leq \omega \leq \omega_m$  может быть полностью восстановлен, если известны его отсчётные значения, взятые через равные промежутки времени  $\Delta t = \frac{\pi}{\omega_m}$ .

Для доказательства теоремы определим спектр дискретного сигнала, применив преобразование Фурье к обеим частям равенства.

$$\begin{aligned} S_{\text{ИМ}}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{ИМ}}(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{\Delta t}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(n \cdot \Delta t) \delta(t - n \cdot \Delta t) e^{-j\omega t} dt = \\ &= \frac{\Delta t}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(n \cdot \Delta t) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - n \cdot \Delta t) e^{-j\omega t} dt = \frac{\Delta t}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(n \cdot \Delta t) e^{-j\omega n \cdot \Delta t} \end{aligned}$$

С другой стороны спектр МИП определяется как:

$$S_{\text{ИМ}}(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} S\left(\omega - m \frac{2\pi}{\Delta t}\right).$$

Поэтому получаем:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} S\left(\omega - m \frac{2\pi}{\Delta t}\right) = \frac{\Delta t}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(n \cdot \Delta t) e^{-j\omega n \cdot \Delta t} \quad \text{– общее суммирование Пуассона.}$$

Если спектр сигнала лежит в интервале частот  $-\omega_m \leq \omega \leq \omega_m$ , то

$$S(\omega) = \frac{\Delta t}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(n \cdot \Delta t) e^{-j\omega n \cdot \Delta t}.$$

Таким образом, ограниченный по частоте спектр аналогового сигнала может быть определён по совокупности дискретных отсчётов.

Проинтегрируем обе части последнего равенства по частоте в интервале  $-\omega_m \leq \omega \leq \omega_m$ , предварительно умножив их на  $e^{j\omega t}$ .

$$\int_{-\omega_m}^{\omega_m} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{\Delta t}{2\pi} \int_{-\omega_m}^{\omega_m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(n \cdot \Delta t) e^{-j\omega n \cdot \Delta t} e^{j\omega t} d\omega,$$

$$S(t) = \frac{\Delta t}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(n \cdot \Delta t) \int_{-\omega_m}^{\omega_m} e^{j\omega(t-n \cdot \Delta t)} d\omega = \frac{\Delta t}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(n \cdot \Delta t) \frac{1}{j(t-n \cdot \Delta t)} \left( e^{j\omega_m(t-n \cdot \Delta t)} - e^{-j\omega_m(t-n \cdot \Delta t)} \right),$$

$$S(t) = \frac{\Delta t}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(n \cdot \Delta t) \frac{\sin \omega_m(t-n \cdot \Delta t)}{t-n \cdot \Delta t}, \text{ поскольку } \Delta t = \frac{\pi}{\omega_m}, \text{ то}$$

$$S(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S\left(\frac{n\pi}{\omega_m}\right) \frac{\sin \omega_m\left(t - \frac{n\pi}{\omega_m}\right)}{\omega_m\left(t - \frac{n\pi}{\omega_m}\right)} - \text{математическая запись теоремы дискретизации.}$$

### Дискретное во времени преобразование Фурье (ДВПФ)

В качестве модели дискретного сигнала используем МИП:

$$S_{\text{ИМ}}(t) = \Delta t \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(n \cdot \Delta t) \delta(t - n \cdot \Delta t).$$

Спектр МИП обозначим как:

$$\bar{S}(\omega) = \frac{\Delta t}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(n \cdot \Delta t) e^{-j\omega n \cdot \Delta t} - \text{ДВПФ.}$$

### Свойства ДВПФ

#### 1. Линейность

Если  $S_0(n \cdot \Delta t) = \alpha_1 S_1(n \cdot \Delta t) + \alpha_2 S_2(n \cdot \Delta t)$ , то  $\bar{S}_0(\omega) = \alpha_1 \bar{S}_1(\omega) + \alpha_2 \bar{S}_2(\omega)$ .

#### 2. Периодичность

Функция  $\bar{S}(\omega)$  периодическая в частотной области с периодом  $\Omega = \frac{2\pi}{\Delta t}$ .

Доказательство:

$$\begin{aligned} \bar{S}(\omega + m\Omega) &= \bar{S}\left(\omega + \frac{2m\pi}{\Delta t}\right) = \frac{\Delta t}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(n \cdot \Delta t) e^{-j\left(\omega + \frac{2m\pi}{\Delta t}\right)n \cdot \Delta t} = \\ &= \frac{\Delta t}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(n \cdot \Delta t) e^{-j\omega n \cdot \Delta t} e^{-j2\pi mn} = \frac{\Delta t}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(n \cdot \Delta t) e^{-j\omega n \cdot \Delta t} = \bar{S}(\omega) \end{aligned}$$

Получим обратное дискретное во времени преобразование Фурье (ОДВПФ):

$\bar{S}(\omega) = \frac{\Delta t}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(n \cdot \Delta t) e^{-j\omega n \cdot \Delta t}$  представляет собой ряд Фурье с коэффициентами  $C_n = \frac{\Delta t}{2\pi} S(n \cdot \Delta t)$ .

Причём эти коэффициенты вычисляются по формуле:

$$C_n = \frac{\Delta t}{2\pi} S(n \cdot \Delta t) = \frac{1}{\Omega} \int_0^{\Omega} \bar{S}(\omega) e^{j\omega n \cdot \Delta t} d\omega, \text{ так как } \Omega = \frac{2\pi}{\Delta t}, \text{ то } S(n \cdot \Delta t) = \int_0^{\frac{2\pi}{\Delta t}} \bar{S}(\omega) e^{j\omega n \cdot \Delta t} d\omega - \text{ОДВПФ.}$$

#### 3. Свёртка ДВПФ

Пусть  $S_0(n \cdot \Delta t) = S_1(n \cdot \Delta t) S_2(n \cdot \Delta t)$ , необходимо определить  $\bar{S}_0(\omega)$ .

$$\begin{aligned} \bar{S}_0(\omega) &= \frac{\Delta t}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_1(n \cdot \Delta t) S_2(n \cdot \Delta t) e^{-j\omega n \cdot \Delta t} = \frac{\Delta t}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_1(n \cdot \Delta t) \int_0^{\frac{2\pi}{\Delta t}} \bar{S}_2(\omega') e^{j\omega' n \cdot \Delta t} d\omega' \cdot e^{-j\omega n \cdot \Delta t} = \\ &= \int_0^{\frac{2\pi}{\Delta t}} \frac{\Delta t}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_1(n \cdot \Delta t) \bar{S}_2(\omega') e^{j(\omega' - \omega)n \cdot \Delta t} d\omega' = \int_0^{\frac{2\pi}{\Delta t}} \bar{S}_2(\omega') d\omega' \cdot \frac{\Delta t}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_1(n \cdot \Delta t) e^{j(\omega' - \omega)n \cdot \Delta t} \end{aligned}$$

Отсюда получаем:



$$\bar{S}_0(\omega) = \int_0^{2\pi} \bar{S}_2(\omega') \bar{S}_1(\omega' - \omega) d\omega' \text{ или } \bar{S}_0(\omega) = \bar{S}_1(\omega) \otimes \bar{S}_2(\omega) - \text{круговая свёртка.}$$

$$S_1(n \cdot \Delta t) S_2(n \cdot \Delta t) \Leftrightarrow \bar{S}_1(\omega) \otimes \bar{S}_2(\omega), \text{ обратно } S_1(n \cdot \Delta t) \otimes S_2(n \cdot \Delta t) \Leftrightarrow \frac{2\pi}{\Delta t} \bar{S}_1(\omega) \bar{S}_2(\omega).$$