

**Министерство связи Российской Федерации
Поволжская государственная академия
телекоммуникаций и информатики**

Кафедра ТОРС

**Методические разработки по 2 части курса
«РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ ЦЕПИ И СИГНАЛЫ»**

Составители:

доц. Альшев Ю.В.

доц. Хабаров Е.О.

Редактор:

проф. Кловский Д.Д.

Самара, 2001.

Генерация колебаний

Цель работы: исследование LC и RC -генераторов на основе усилителя с положительной обратной связью, а также LC -генератора с трансформаторной обратной связью на базе полевого транзистора.

Краткие теоретические сведения

В общем виде генерация синусоидальных колебаний представляет собой процесс, связанный с преобразованием энергии источника постоянного тока ($\omega = 0$) в энергию высокочастотных колебаний ($\omega = \omega_r$ – частота генерации).

На практике чаще всего применяются генераторы, представляющие собой усилитель, охваченный обратной связью (ОС). Обобщенная структурная схема такого устройства показана на рис.8.1:

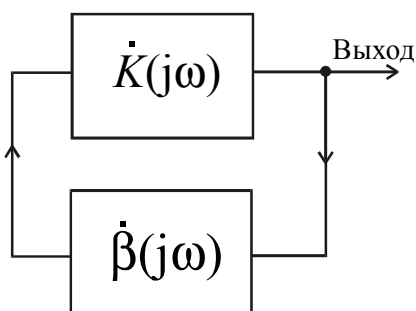


Рис.8.1

Здесь \dot{K} – комплексный коэффициент передачи усилителя, $\dot{\beta}$ – комплексный коэффициент передачи цепи обратной связи.

Усилитель обычно строится на базе активных нелинейных устройств (электронных ламп, транзисторов, операционных усилителей), а цепь обратной связи – чаще всего пассивный частотно-избирательный четырехполюсник, например полосовой фильтр (или цепь эквивалентная ему), с центральной частотой полосы пропускания $\omega_0 = \omega_r$.

Чтобы проанализировать возможность возникновения колебаний в таком устройстве сначала разорвем цепь обратной связи, как это показано на рис.8.2:

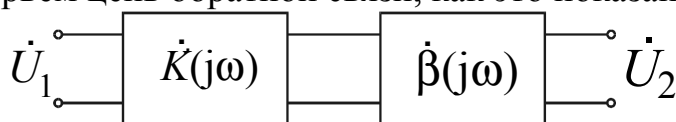


Рис.8.2

Запишем комплексный коэффициент передачи каскадного соединения четырехполюсников

$$\dot{W}(j\omega) = \dot{K}(j\omega)\dot{\beta}(j\omega) = \frac{\dot{U}_2(\omega)}{\dot{U}_1(\omega)} \quad (8.1)$$

в виде

$$\dot{W}(j\omega) = K(\omega)e^{j\varphi_k(\omega)}\beta(\omega)e^{j\varphi_\beta(\omega)} = K(\omega)\beta(\omega)e^{j[\varphi_k(\omega)+\varphi_\beta(\omega)]} = W(\omega)e^{j\varphi(\omega)}. \quad (8.2)$$

Здесь $K(\omega)$ и $\beta(\omega)$ – модули, а $\varphi_k(\omega)$ и $\varphi_\beta(\omega)$ – аргументы комплексных коэффициентов передачи соответственно усилителя и цепи обратной связи.

При $\varphi(\omega) = \varphi_k(\omega) + \varphi_\beta(\omega) = 0, 2\pi, 4\pi, \dots = 2\pi n$ ($n = 0; 1; 2; \dots$) – обратная связь будет положительной (ПОС), т.к. колебания на входе и выходе совпадают по фазе; при $\varphi(\omega) = (2n+1)\pi$ – обратная связь отрицательная (ООС), т.к. указанные колебания противофазны; для других значений $\varphi(\omega)$ ОС называется комплексной (в частном случае $\varphi(\omega) = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ – реактивная ОС). Если усилитель и цепь обратной связи построены таким образом, что в режиме слабых сигналов (линейном режиме) соблюдаются два условия:

$$1. W(\omega) > 1 \quad (8.3)$$

$$2. \varphi(\omega) = 2\pi n \quad (8.4)$$

то при замыкании цепи обратной связи в схеме возникнут нарастающие колебания. Условие (8.3) называется балансом амплитуд, (8.4) – балансом фаз. (Для других частот $\omega \neq \omega_r$ условие (8.4) не должно соблюдаться что обеспечивается частотной избирательностью цепи обратной связи).

Механизм возникновения колебаний в замкнутой системе можно объяснить так: предположим, что на входе усилителя уже имеется некоторое начальное колебание с частотой ω_r . Это предположение справедливо, т.к. на входе любого усилителя всегда присутствует флуктуационный шум с очень широким спектром частот. Это колебание пройдя на выход цепи обратной связи усилителя в $W = K\beta > 1$ раз и снова вернется на вход усилителя в фазе и большей амплитудой. Этот процесс нарастания амплитуды колебаний продолжается до тех пор, пока не вступит в силу механизм ограничения амплитуды колебаний за счет нелинейных свойств усилителя /1,2,3/.

Краткое описание исследуемых генераторов

В работе исследуются два генератора (LC -генератор и RC -генератор с мостом Вина). Генератор на базе полевого транзистора может работать как в мягком, так и в жестком режимах. Упрощенная функциональная схема устройства изображена на рис.8.3. Здесь в качестве усилителя используется полевой транзистор КП303 нагрузкой которого является параллельный LC -контур, а в качестве цепи обратной связи выступает трансформатор с изменяемой величиной взаимной индуктивности M , а соответственно и глубины ОС. Знак ОС можно изменять, подавая выходной сигнал на вход транзистора (через разделительный конденсатор) в фазе (ПОС) или в противофазе (ООС).

Стоко-затворная характеристика транзистора КП303 приведена на рис.8.4. Выбирая смещение $E_{см}$, можно изменять режим возбуждения генератора. Если рабочую точку задать на линейном участке характеристики ($E_{см} = -0,5 \dots 0$ В) – получим мягкий режим, если на нелинейном ($E_{см} = -2,5 \dots 1,5$ В) – жесткий. Предусмотрена также возможность включения цепочки автосмещения; в этом случае достоинства мягкого и жесткого режима объединяются /2,3/.

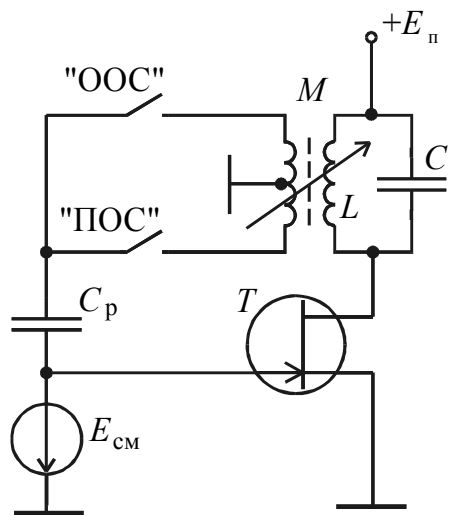


Рис.8.3

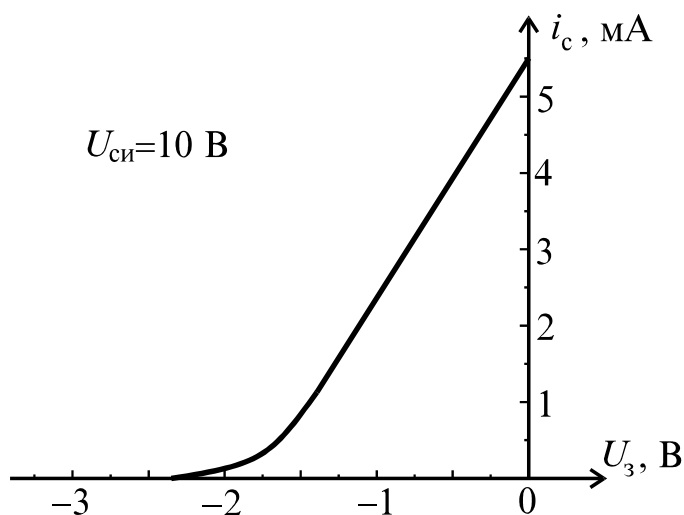


Рис.8.4.

Домашнее задание

1. По статистической стоко-затворной характеристике полевого транзистора КП303 (рис.8.4) определите области мягкого и жесткого режимов возбуждения автогенератора и выберите два значения фиксированного смещения $E_{см}$ на затворе соответственно для мягкого и жесткого режимов. Для выбранных значений $E_{см}$, используя аппроксимацию характеристики транзистора укороченным полиномом третьей степени $i_c = a_0 + a_1 u_3 + a_3 u_3^3$ определите аналитически стационарную амплитуду колебаний генератора $U_{ст}$ при параметрах схемы: частота генерации $f_{г} = 30 \text{ кГц}$; добротность LC -контура $Q = 40$; коэффициент взаимной индукции $M = 0,5 \text{ мГн}$.

Для выполнения домашнего задания можно воспользоваться литературой /3/.

Порядок выполнения работы

Аппроксимируйте СЗХ полиномом 8 или 9 степени по вариантам. Для этого введите: количество точек (степень полинома); далее для рассчитанных значений коэффициентов полинома нажмите «1», а если ВАХ вводится по точкам то нажмите «0».

В зависимости от выбранного количества точек и варианта ввода параметров СЗХ на экране появится таблица вводимых значений.

Для первого случая – таблица коэффициентов полинома. Для второго случая – значения напряжения на затворе полевого транзистора и соответствующее согласно СЗХ значение тока в цепи стока.

В обоих случаях с помощью стрелок $\uparrow \downarrow$ производится увеличение или уменьшение выделенного значения числового разряда, с помощью стрелок $\Leftarrow \Rightarrow$ производится переход к старшему или младшему разряду, с помощью клавиш «ТАВ» и «SHIFT+ТАВ» производится переход к другому числовому значению.

Установите рассчитанные или снятые по СЗХ значения. Для продолжения работы нажмите клавишу «Enter».

Следующие изменяемые параметры схемы:

M – величина взаимной индуктивности;

E – напряжение на затворе транзистора;

R – сопротивление моста Вина для RC -генератора.

Переход к изменяемому параметру и его изменение также производится с помощью клавиш «TAB», «SHIFT+TAB» и стрелок $\uparrow \downarrow \leftarrow \Rightarrow$.

1. Исследование LC-генератора

Установите абсолютное значение напряжения смещения на затворе транзистора в пределах 0...0,5 В, что соответствует мягкому режиму возбуждения. По графику средней крутизны (в верхнем правом углу экрана) убедитесь, что режим возбуждения мягкий. Снимите зависимость амплитуды колебаний генератора от величины взаимной индуктивности M , изменяя последнюю от 0 до 3 мГн и назад от 3 мГн до 0. Заполнить таблицу 1, взяв для каждого направления примерно 10 характерных значений. Амплитуду колебаний необходимо измерять в окне имитирующем осциллограф (слева внизу экрана). Управление окном производится клавишами указанными в подсказке внизу данного окна.

Снимите зависимость амплитуды колебаний генератора от величины взаимной индуктивности M . Заполните таблицу 1, взяв примерно 10 характерных значений.

Таблица 8.1.

M , мГн	0	0,1	...	3
$U_{\text{ВЫХ}}$, В				
M , мГн	3	2,9	...	0
$U_{\text{ВЫХ}}$, В				

Установите абсолютные значения напряжения смещения на затворе транзистора в пределах 1,5...2,5 В, что соответствует жёсткому режиму возбуждения. По графику средней крутизны убедитесь, что режим возбуждения жёсткий (если нет, то измените напряжение смещения). Повторите аналогичные измерения для этого режима и запишите результаты в таблицу 8.2 аналогичную таблице 8.1.

Включите режим автосмещения нажав клавишу «а» латинского алфавита, при этом на экране появится сообщение о том, что включён режим автосмещения (в этом режиме напряжение смещения не реагирует на попытки принудительного его изменения с помощью стрелок). Повторите измерения и запишите их в таблицу 8.3, аналогичную таблице 8.1.

2. Исследование RC-генератора

Снимите зависимость частоты колебаний генератора от величины сопротивления R моста Вина. Измерение частоты колебаний для каждого значения R произведите с помощью окна имитирующего осциллограф измеряя длительность периода синусоиды.

Для 5 значений сопротивления R определить частоту колебаний f (таблица 2).

Таблица 8.4.

R , кОм					
f , кГц					

Содержание отчета

1. Выполненное домашнее задание.
2. Таблицы измерений и построенные по ним графики.
3. Выводы по каждому пункту работы.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте критерий устойчивости Найквиста. Какие другие критерии устойчивости Вы знаете? В чем их суть?
2. Что называют "балансом амплитуд" и "балансом фаз"? Запишите аналитически выражения для этих условий.
3. В чем разница между положительной и отрицательной обратной связью? Какая ОС называется комплексной?
4. Нарисуйте обобщенную структурную схему автогенератора с цепью положительной обратной связи. Поясните механизм возникновения колебаний в ней.
5. Вычертите упрощенную схему автогенератора на полевом транзисторе с контуром в цепи стока и объясните возникновение генерации в схеме. Какие составные части обязательно входят в автогенератор? Укажите их на схеме.
6. Поясните различие между мягким и жестким режимами возбуждения. Каковы достоинства и недостатки этих режимов?
7. Опишите работу цепочки автосмещения в схеме автогенератора. Какие достоинства выгодно отличают режим автосмещения от мягкого и жесткого?
8. Что такое "средняя крутизна" нелинейного элемента? Объясните, как связан тип режима возбуждения генератора с формой зависимости S_{cp} от амплитуды приложенного напряжения U .
9. Как графически найти стационарную амплитуду колебаний по графикам средней крутизны и колебательной характеристике?
10. Для жесткого режима постройте зависимость стационарной амплитуды автоколебаний от величины взаимной индуктивности M (глубины ПОС). Объясните отдельные участки этой зависимости.
11. Объясните, почему для устойчивой работы автогенератора необходима нелинейность и почему, несмотря на нее, в автогенераторе устанавливаются практически синусоидальные колебания?
12. Выведите уравнение стационарной амплитуды для мягкого режима работы автогенератора с контуром в цепи затвора.
13. Выведите выражение для комплексного коэффициента передачи четырехполюсника обратной связи β_1 для $r_3 \ll \omega L_3$. Чему должен быть равен коэффициент k усилителя, чтобы в схеме возникли колебания?
14. То же для четырехполюсника β_2 (моста Вина).

Литература

1. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. Уч. для вузов. – М.: Высшая школа, 1988.
2. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы. Уч. для вузов. – М.: Радио и связь, 1986.
3. Кушнир В.Ф., Ферсман Б.А. Теория нелинейных электрических цепей. – М.: Связь. 1974.

Исследование свойств z-преобразования и свёртки дискретных сигналов

Цель работы: ознакомление с методом z-преобразования элементарных сигналов и их композиций, вычисление и анализ z-преобразований, моделирование сигналов и их сверток.

Краткие теоретические сведения1. Интегральные преобразования Фурье и Лапласа.

Основным инструментом анализа аналоговых сигналов и цепей являются интегральные преобразования Фурье и Лапласа. В последующем эти преобразования в модифицированной форме будут использованы и в случае дискретных сигналов и цепей. Рассмотрим основные сведения о преобразованиях Фурье и Лапласа. Фурье-преобразование (прямое и обратное) имеет вид:

$$\dot{S}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j2\pi ft} dt \text{ или } \dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t} dt \quad (9.1)$$

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(f)e^{j2\pi ft} dt \text{ или } s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega)e^{j\omega t} d\omega.$$

Этим преобразованием вводится понятие спектральной плотности $\dot{S}(f)$ сигнала $s(t)$ ($\dot{S}(f)$ – в общем случае комплексная функция действительной переменной f).

В отдельных случаях прямое преобразование может не существовать в обычном смысле. Так, возникают особенности, когда сигнал имеет вид скачка или включает компоненту $s(t) = \exp\{(\beta + j\omega)t\}$, $t \in (-\infty, \infty)$.

Преобразование Лапласа обобщает Фурье-преобразование. Переход к преобразованию Лапласа осуществляется путем введения в (9.1) экспоненциальных множителей сходимости (соответственно $e^{-\alpha_1 t}$, $\alpha_1 > 0$ для $t > 0$ и $e^{-\alpha_2 t}$, $\alpha_2 > 0$ для $t < 0$),

т.к. в случае расходящихся интегралов $I = \int_0^{\infty} f(x)dx$ в математическом анализе вводят

множитель сходимости $I(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} f(x)dx$, $\alpha \geq 0$. Это эквивалентно преобразованию

Фурье функций $s(t)e^{-\alpha_1 t}$ (для $t > 0$) и $S(t)e^{\alpha_2 t}$ (для $t < 0$). В результате снимаются проблемы сходимости (существования) интегралов.

Различают одностороннее ($s(t)$ задано для $t > 0$) и двухстороннее ($s(t)$ задано на $t \in (-\infty, \infty)$) преобразования Лапласа.

Положим $s(t) \neq 0$, $t > 0$. Рассмотрим одностороннее преобразование Лапласа. Формально запишем функцию

$$L(\alpha + j\omega) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} [s(t)e^{-j\omega t}] dt = \int_0^{\infty} S(t)e^{-(\alpha + j\omega)t} dt = (\alpha + j\omega = p) = \int_0^{\infty} s(t)e^{-pt} dt = L(p). \quad (9.2)$$

Заметим, что:

$$1. \dot{S}(\omega) = L(\alpha + j\omega)|_{\alpha=0}; \quad 2. s(t)e^{-\alpha t} \xleftrightarrow{\Phi} L(\alpha + j\omega). \quad (9.3)$$

Из последней записи имеем

$$s(t)e^{-\alpha t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} L(\alpha + j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \left(\begin{array}{l} \alpha + j\omega = p \\ \omega = \frac{1}{j}(p - \alpha) \end{array} \right) = \frac{1}{j2\pi} \int_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty} L(p) e^{pt} e^{-\alpha t} dp. \text{ Следовате-}$$

льно: $s(t) = \frac{1}{j2\pi} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} L(p) e^{pt} dp, t > 0, c \geq \alpha.$

Таким образом, получена пара преобразований Лапласа для $s(t)$, заданной в положительной области $t > 0$:

$$L(p) = \int_0^{\infty} s(t) e^{-pt} dt; \quad s(t) = \frac{1}{j2\pi} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} L(p) e^{pt} dp. \quad (9.4)$$

Аналогично может быть построено двухстороннее преобразование Лапласа. Особенность данных преобразований – введение **комплексной частоты** $p = \alpha + j\omega$. Для вещественных $s(t)$ следует: $L(p^*) = L^*(p)$. Введение комплексной переменной p позволяет существенно упростить вычисление интеграла. Из теории функций комплексной переменной известно, что рассматриваемый интеграл можно заменить контурным и результат найти как сумму вычетов в полюсах подынтегральной

функции: $s(t) = \frac{1}{j2\pi} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} L(p) e^{pt} dp = \frac{1}{j2\pi} \oint L(p) e^{pt} dp = \sum_i \text{Res } s_i.$

В случае, когда $e^{pt}L(p)$ может быть представлено отношением $e^{pt}L(p) = N(p)e^{pt}/M(p)$ вычет в простом полюсе p_0 определяется как:

$$\text{Res} = \left. \frac{N(p)e^{pt}}{M'(p)} \right|_{p=p_0}, \text{ где } p_0: M(p)=0.$$

Контур интегрирования, расположенный в левой полуплоскости переменной p (левее линии $p = \alpha$), должен охватывать все полюса функции $L(p)$, см.рис.9.1.

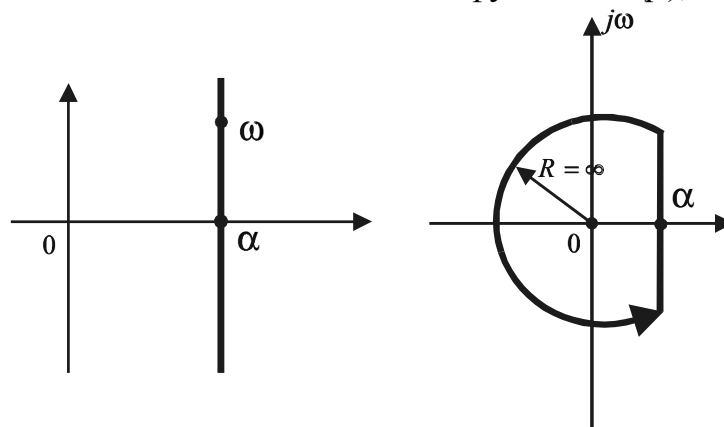


Рис.9.1.

Все свойства отображений $s(t) \xleftrightarrow{L} L(p)$ аналогичны свойствам отображения $s(t) \xleftrightarrow{\Phi} \dot{S}(\omega)$ /3,6/.

2. z-преобразование дискретных последовательностей.

Формально дискретную последовательность (дискретный сигнал) можно записать в виде (см./3/, стр.64).

$$s_{\text{д}}(t) = \Delta \sum_{k=0}^{\infty} s(k\Delta) \delta(t - k\Delta), \quad (9.5)$$

где $S(k\Delta)$ – отсчеты сигнала (полагается, что $s(t) \neq 0$ для $t > 0$); $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака. Было показано, что спектральная плотность дискретного сигнала, является периодической функцией частоты

$$\dot{S}_{\text{д}}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{S}(f - nf_{\text{д}}). \quad (9.6)$$

Представление (9.1) и (9.4) позволяют также получить преобразования Фурье и Лапласа непосредственно по совокупности отсчетов. Имея в виду, что

$$\int_0^{\infty} e^{xt} \delta(t - t_0) dt = e^{xt_0}, \quad t_0 > 0,$$

запишем:

$$\dot{S}_{\text{д}}(\omega) = \int_0^{\infty} S_{\text{д}}(t) e^{-j\omega t} dt = \Delta \sum_{k=0}^{\infty} s(k\Delta) e^{-j\omega k\Delta}; \quad (9.7)$$

$$L_{\text{д}}(p) = \int_0^{\infty} s_{\text{д}}(t) e^{-pt} dt = \Delta \sum_{k=0}^{\infty} s(k\Delta) e^{-pk\Delta}.$$

Эти выражения можно рассматривать, соответственно, как прямые преобразования Фурье и Лапласа (одностороннее) дискретных последовательностей. Преобразование существенно упрощается при переходе к новой переменной z путем замены:

$$z = e^{p\Delta}, \quad p = \frac{1}{\Delta} \ln z \quad \text{или} \quad z = e^{j\omega\Delta}, \quad j\omega = \frac{1}{\Delta} \ln z. \quad (9.8)$$

В результате получим прямое z-преобразование (одностороннее).

$$D(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s(k\Delta) z^{-k}. \quad (9.9)$$

Двухстороннее z-преобразование имеет вид

$$D(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(k) z^{-k}. \quad (9.10)$$

Ряд (9.10) для комплексной переменной z называется рядом Лорана. Преобразование (9.10) можно называть преобразованием Лорана.

Это преобразование играет главную роль в теории дискретных сигналов и цепей. Заметим что здесь полная аналогия перехода от характеристических функций к производящим в теории вероятностей.

Таким образом, формальным определением z -преобразования произвольной последовательности чисел $s(k)$, $k=0, 1, \dots$ служит ряд (9.10), где z в общем случае комплексная переменная. Если $s(k)$ – отсчеты непрерывного сигнала $s(t)$, взятые через интервал времени Δt , т.е. $s(k)=s(k\Delta t)$, то $D(z)=s(z)$ является z -преобразованием дискретного сигнала.

Если $s(k)$ – отсчеты импульсной характеристики $g(t)$ некоторой линейной цепи, т.е. $s(k)=g(k\Delta)$, то $D(z)$ является обобщенным коэффициентом передачи или системной функцией этой цепи, обычно обозначаемая $H(z)$. В обоих случаях $D(z)$ несет всю информацию о сигналах или цепях и позволяет решать разнообразные задачи анализа и синтеза сигналов и цепей (фильтров).

Практическое значение имеет одностороннее z -преобразование (9.9), когда полагается, что последовательность $s(k)$ имеет начало. Иными словами, определение (9.9) используется только для реализуемых (реально существующих) сигналов или цепей. Однако теоретически можно рассматривать и двухстороннее z -преобразование для неограниченных в обе стороны последовательностей $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Как видно из предоставлений (9.7) и (9.9), z -преобразование обобщает Фурье-преобразование и преобразование Лапласа для дискретных сигналов. Характерной особенностью z -преобразования является то, что $D(z)$ не является периодической функцией (в отличие от функций $\dot{S}_d(\omega)$ и $L_d(p)$). Иными словами, наличие комплексных экспоненциальных функций в (9.7) приводит к равенствам

$$\begin{aligned} \dot{S}_d(\omega) &= \dot{S}_d(\omega + m\omega_{\text{пер}}); \\ L_d(p) &= L_d(p + mp_{\text{пер}}), \quad m = 0, \pm 1, \dots, \end{aligned} \quad (9.11)$$

где $\omega_{\text{пер}}$ и $p_{\text{пер}}$ периоды повторения функций. В этом смысле $D(z)$ – аperiodическая функция. Отметим, что в наиболее общей форме $D(z)$ является дробно-рациональной функцией от z^{-1} .

Действительно, если известны все полюсы $z_n=z_{ni}$, $i=1, 2, \dots, N$ и нули $z_0=z_{0i}$, $i=1, 2, \dots, M$ функции $D(z)$, то она может быть представлена в общем виде

$$D(z) = c \frac{\prod_{i=1}^M (1 - z_{0i} z^{-1})}{\prod_{i=1}^N (1 - z_{ni} z^{-1})} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}. \quad (9.12)$$

В силу взаимосвязи всех точек p -плоскости и z -плоскости, можно исследовать различные закономерности преобразования Лалласа и z -преобразования дискретных последовательностей.

Формально обратное z -преобразование определяется выражением

$$s(kt) = \frac{1}{j2\pi} \oint D(z) z^{k-1} dz, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (9.13)$$

где замкнутый контур интегрирования в z -плоскости охватывает начало координат и все полюса функции $D(z)$. Существует несколько способов нахождения обратного z -преобразования /6/.

Отметим два основных:

1) прямое вычисление интеграла (9.13) на основе теоремы о вычетах:

$$s(kt) = \sum \text{Res} \{ D(z) z^{k-1} \}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (9.14)$$

где вычеты определяются в полюсах подинтегральной функции в (9.13);

2) второй способ основан на использовании формулы Тейлора для определения коэффициентов ряда (9.9) при замене переменной на z^{-1} .

$$S(k\Delta t) = \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k D(z^{-1})}{dz^k} \right|_{z=0}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (9.15)$$

3. Свойства z -преобразования.

z -преобразование обладает рядом свойств, аналогичных преобразованиям Фурье и Лапласа. Представим взаимосвязь (9.9) и (9.13) в символической форме $s(k) \longleftrightarrow S(z)$ и отметим следующие свойства этих преобразований:

а) если дано $s_i(k) \longleftrightarrow S_i(z)$, $i=1, 2, \dots, L$, то для произвольных констант a_i имеем

$$\sum_{i=1}^L a_i s_i(k) \longleftrightarrow \sum_{i=1}^L a_i S_i(z).$$

Это свойство характеризует линейность z -преобразования;

б) если дано $s(k) \longleftrightarrow S(z)$, то $s(k - k_0) \longleftrightarrow z^{-k_0} S(z)$,

где k_0 – целое положительное число.

Здесь отражена теорема о сдвигах (задержках) сигнала. Она имеет важное следствие. Напомним, задержка непрерывного сигнала $s(t)$ на τ_0 , т.е. сигнал $S(t - \tau_0)$ реализуется в цепи с коэффициентом передачи $\dot{K}(f) = \exp(-j2\pi f \tau_0)$.

Аналогично в дискретных системах задержка сигнала на k_0 отсчетов реализуется цепью с обобщенным коэффициентом передачи $D(z) = z^{-k_0}$ ($k_0 = \frac{\tau_0}{\Delta}$);

в) если $s_i(k) \longleftrightarrow S_i(z)$, $i=1, 2$, то для свертки (обозначено звездочкой) этих последовательностей

$$s_*(m) = s_1(k) * s_2(k) = \sum_{k=0}^m s_1(k) s_2(m - k) \quad (9.16)$$

имеем

$$s_*(m) \longleftrightarrow S_*(z) = S_1(z) S_2(z). \quad (9.17)$$

В частности, автосвертка последовательности $s(k)$ (когда $s_1(k) = s_2(k) = s(k)$) дает z -преобразование

$$s_*(m) \longleftrightarrow S_*(z) = S^2(z). \quad (9.18)$$

Эти соотношения являются обобщениями теоремы о свертках. Они позволяют решать разнообразные задачи преобразования сигналов в линейных системах.

4. Применение аппарата z-преобразования к синтезу линейных дискретных систем (цифровых фильтров).

В теории линейных дискретных систем (цифровых фильтров) функция $H(z)$ служит основой для построения этих систем. Так, структура цифрового фильтра с импульсной характеристикой $g(k)$ непосредственно следует из конкретного выражения z-преобразования $H(z)$ этой характеристики. Аналогично можно получить конкретную структуру "генератора" последовательности $s(k)$, $k=0,1,2, \dots$ по соответствующей функции $S(z)$.

Кратко отметим суть такого построения.

В общем случае в реализуемой цепи $H(z)$ можно представить дробно-рациональной функцией по отрицательным степеням переменной z :

$$H(z) = \frac{\sum_{n=0}^M b_n z^{-n}}{1 + \sum_{n=1}^N a_n z^{-n}}. \quad (9.19)$$

При схемной реализации числитель определяет так называемый нерекурсивный (трансверсальный) фильтр, а знаменатель отражает наличие обратных связей с выхода на вход, которые приводят к структуре рекурсивного фильтра. Функционально элементы $C_n z^{-n}$ представляют задержку сигнала на n отсчетов (см. свойство (б) z-преобразования) и умножение его на число C_n .

Рассмотрим примеры построения "генераторов" элементарных сигналов.

1) Источник равномерной последовательности.

Пусть необходимо получить последовательность вида:

$$s(k) = \begin{cases} s_0, & k = 0, 1, \dots, N-1 \\ 0, & k < 0, k \geq N \end{cases} \quad (9.20)$$

z-преобразование этой последовательности дает

$$S(z) = H(z) = s_0 [1 + z^{-1} + \dots + z^{-(N-1)}] = \quad (9.21)$$

$$= s_0 \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}}. \quad (9.22)$$

Здесь учтено свойство геометрической прогрессии, для которой справедливы формулы ($qt < 1$ – знаменатель геометрической прогрессии):

$$\sum_{k=0}^{N-1} q^k = \frac{1 - q^N}{1 - q}; \quad \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1 - q}.$$

Два варианта представления $H(z)$ позволяют реализовать две схемы "генератора" равномерной последовательности (рис.9.2 (а,б)). В схемах использованы элементы задержки (z^{-1} – на один отсчет, z^{-N} на N отсчетов), умножители (обозначено треугольником с соответствующим множителем) и сумматоры. Схема рис.9.2(а) следует из записи (9.22) и представляет нерекурсивный фильтр (или схему с

многоотводной линией задержки). Запуск схемы осуществляется подачей на вход единичного отсчета $\delta(k)$, где $\delta(k)$ – дельта-функция Кронекера.

Схема рис.9.2 (б) следует из записи (9.22), числитель которой задает нерекурсивную часть (левее сумматора), а знаменатель – рекурсивную часть (правее сумматора). Запуск этой схемы осуществляется аналогично.

Динамика работы схем показана эпюрами в соответствующих точках.

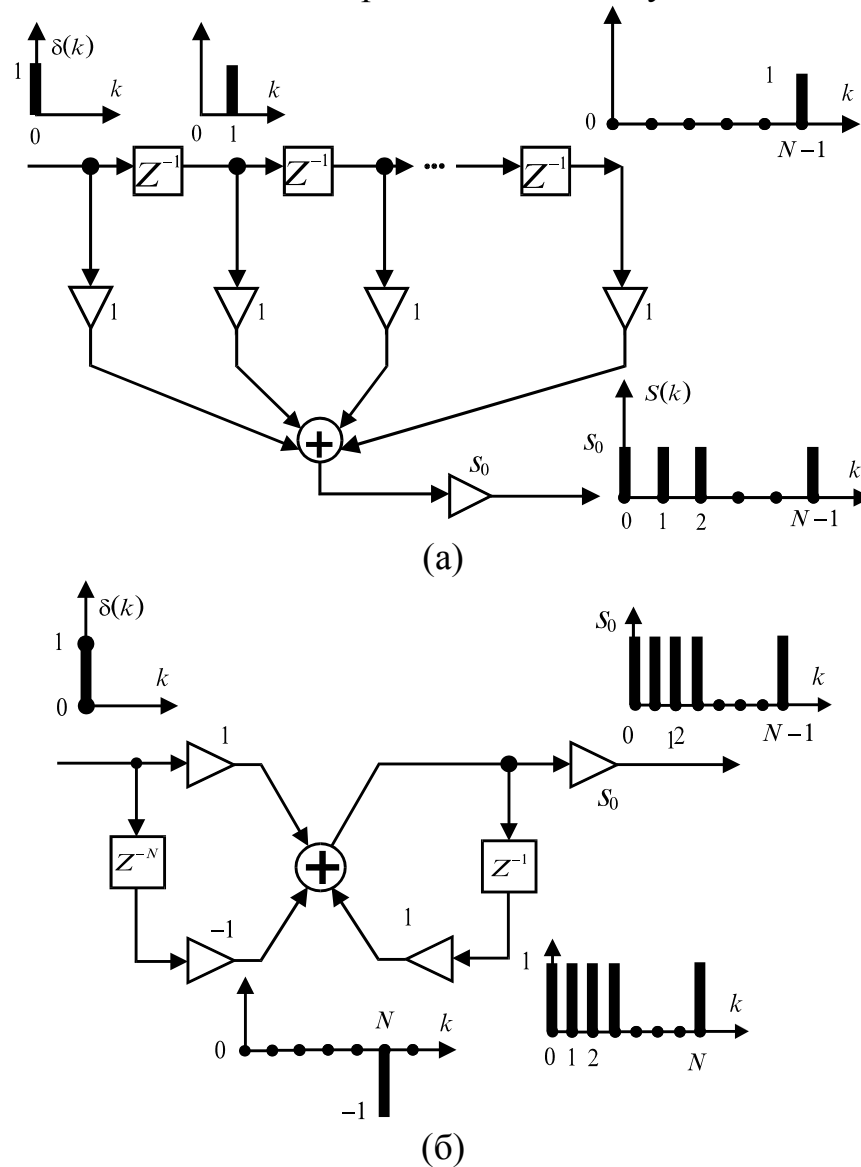


Рис.9.2

В случае периодического запуска этих схем (с периодом через M отсчетов, $M > N$) можно получать периодические последовательности с произвольной скважностью.

Схема рис.9.2 (б) наглядно демонстрирует механизм формирования границы последовательности $s(k)$. Входной единичный отсчет, задержанный на N позиций, появляется на входе сумматора с противоположным знаком и компенсирует (в данный момент времени) отсчёт циркулирующий в рекурсивной части. В результате вход рекурсивной части, начиная с позиции N , обнуляется. Подобные схемы (левая часть

рис.9.2(б)) используется во всех случаях, когда необходимо формировать последовательность $s(k)$ с заданными границами.

2) Источник убывающей последовательности.

Зададим последовательность вида

$$s(k) = s_0 a^k, \quad 0 < a < 1, \quad k = 0, 1, \dots \quad (9.23)$$

z -преобразование в данном случае равно

$$S(z) = H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} = \frac{s_0}{1 - az^{-1}}. \quad (9.24)$$

Соответствующая схема "генератора" представлена на рис.9.3.

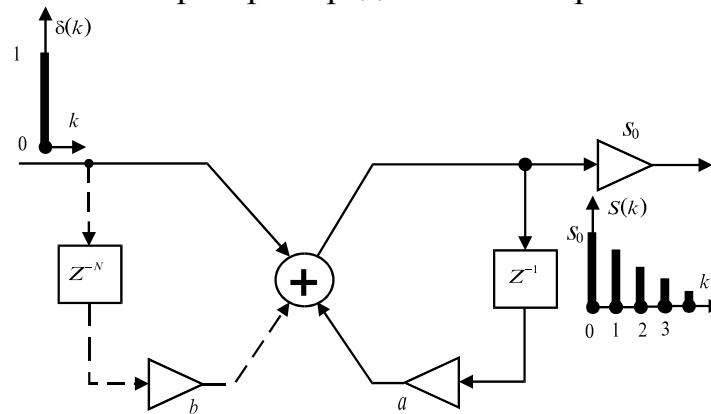


Рис.9.3

Если необходимо получить последовательность $s(k)$ заданной длины $k=0, 1, \dots, N-1$, схему дополняют нерекурсивной частью (пунктир) с соответствующим расчетом параметра b .

3) Источник гармонической последовательности.

Зададим последовательность вида:

$$s(k) = s_0 \cos\left(\frac{2\pi}{N}k - \varphi_0\right), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (9.25)$$

где N – число отсчетов на период. Представим эту последовательность в иной

форме:
$$s(k) = \frac{s_0}{2} \left[e^{j\left(\frac{2\pi}{N}k - \varphi_0\right)} + e^{j\left(\frac{2\pi}{N}k - \varphi_0\right)} \right].$$

Теперь замечаем, что переход к z -преобразованию позволяет использовать свойства геометрической прогрессии. Имеем

$$s(z) = H(z) = \frac{s_0}{2} \left[e^{-j\varphi_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{j\frac{2\pi}{N}} z^{-1} \right)^k + e^{j\varphi_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{-j\frac{2\pi}{N}} z^{-1} \right)^k \right] = s_0 \frac{\cos \varphi_0 - z^{-1} \cos\left(\frac{2\pi}{N} + \varphi_0\right)}{1 - z^{-1} 2 \cos\left(\frac{2\pi}{N}\right) + z^{-2}} \quad (9.26)$$

Схема "генератора" данной последовательности представлена на рис.9.4. Запуск схемы, как и выше, осуществляется единичным отсчетом на входе.

Практическое значение имеет моделирование гармонических сигналов конечной длительности. В связи с этим положим, что последовательность (9.25) должна иметь конечную длину $k=0, 1, \dots, M-1$ и включать целое число (n) периодов $M=nN$. В этом случае для z -преобразования можно получить:

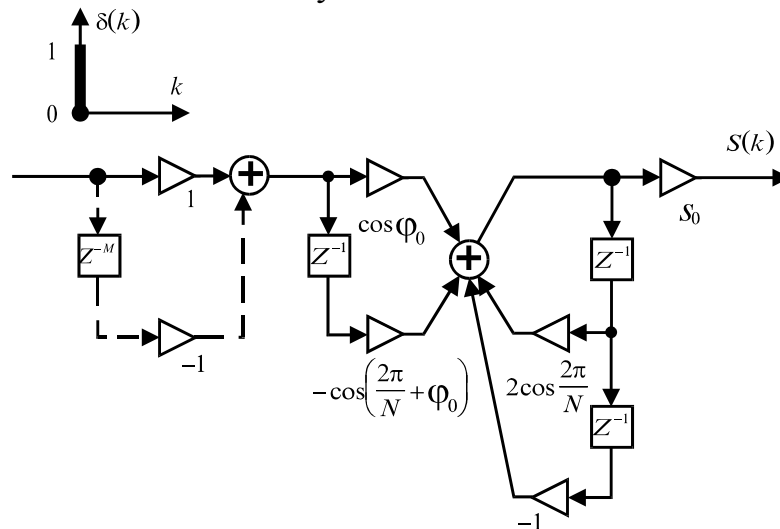


Рис.9.4.

$$H(z) = s(1 - z^{-M}) \frac{\cos \varphi_0 - z^{-1} \cos\left(\frac{2\pi}{N} - \varphi_0\right)}{1 - z^{-1} 2 \cos\left(\frac{2\pi}{N}\right) + z^{-2}}. \quad (9.27)$$

Схемно новая компонента $(1 - z^{-M})$ – как дополнение к (9.26) – представлена на рис.9.4 пунктиром.

Отметим, что схему рис.9.4 называют *идеальным косинусным резонатором*. Возбуждая этот резонатор указанными способами, получают ограниченные или неограниченные гармонические последовательности.

Рассмотренные схемы могут служить основой при моделировании различных видео- и радиосигналов. Так, например, на базе схемы рис.9.4 можно реализовать дискретный модулятор и получать модели сигналов вида АМ, ЧМ или ФМ. Принцип формирования моделей очевиден: достаточно менять скачком (в соответствии с передаваемым сообщением) амплитуду, частоту или фазу после каждых M отсчетов "генератора" сигнала (9.25).

5. Применение z -преобразования к вычислению свертки дискретных последовательностей

Рассмотрим применение z -преобразования к такой задаче, как свертка сигналов. Эту операцию можно выполнить в различных вариантах. Два из них очевидны. Первый непосредственно следует из определения (9.16), назовем его *прямым методом*. Второй вариант можно реализовать путем обращения функции $D_*(z) = D_1(z)D_2(z)$

$$s_*(m) = \frac{1}{m!} \frac{d^m}{dz^m} D_*(z^{-1}) \Big|_{z=0}, \quad m = 0, 1, \dots, \quad (9.28)$$

предварительно определив функции $D_1(z)$ и $D_2(z)$. Здесь используется свойство (9.17). Данный прием назовем *методом обращения z-преобразования*.

Свойство (9.17) дает еще одну интерпретацию операции свертки. Предварительно заметим следующее. Каждая функция $D(z)$ реализуется в конкретной схеме с постоянными параметрами (см. примеры пункта 4). Эти схемы принято называть *линейными системами с постоянными параметрами (ЛПП)* или *линейными цифровыми фильтрами (ЦФ)*. Из теории линейных систем следует, что функцию $D_*(z) = D_1(z)D_2(z)$ можно реализовать последовательным соединением ЛПП-систем с передаточными функциями $D_1(z)$ и $D_2(z)$ (в любом порядке). Таким образом, соединив последовательно указанные две схемы и подав на вход единичный отсчет $\delta(k)$ на выходе получим сигнал $s_*(k)$.

В указанном выше последовательном соединении первую из ЛПП-систем можно рассматривать как "генератор" (название условное) сигнала $s_1(k)$, а вторую – как фильтр с импульсной характеристикой $g(k) = s_2(k)$. Результатом является выходной сигнал в виде свертки:

$$s_{\text{вых}}(m) = s_*(m) = \sum_{k=0}^m s_1(k)g(m-k), \quad m = 0, 1, \dots \quad (9.29)$$

Такой вариант получения свертки назовем *методом импульсной характеристики*. В форме z-преобразований эта запись повторяет свойство (9.17):

$$D_{\text{вых}}(z) = D_g(z)D_{\text{вх}}(z),$$

где $D_g(z) = D_2(z)$ – z-преобразование импульсной характеристики, $D_{\text{вх}}(z) = D_1(z)$ – z-преобразование входного сигнала, $D_{\text{вых}}(z) = D_*(z)$ – z-преобразование выходного сигнала.

В качестве примера рассмотрим все три варианта в случае получения автосвертки сигнала вида (9.20). В прямом методе автосвертка вычисляется по алгоритму

$$s_*(m) = \sum_{k=0}^m s(k)s(m-k), \quad m = 0, 1, \dots$$

Здесь элементы исходной последовательности (9.20) перемножаются с элементами последовательности

$$s(m-k) = \begin{cases} s_0, & k = m - N + 1, m - N + 2, \dots, m \\ 0, & k \leq m - N; k > m \end{cases}$$

для фиксированного m и результаты суммируются. Фрагмент вычислений автосвертки $s_*(m)$ для $N=4$, $s_0=1$ и $m=1$ показан на

рис.9.5(а). Вычисления выполняются "поточечно" для значений $m=0, 1, \dots$

Метод обращения z-преобразования реализуется по этапам

$$s(k) \longleftrightarrow D(z) \longleftrightarrow D^2(z) = D_*(z) \longleftrightarrow s_*(m).$$

Здесь достаточно возвести в квадрат выражение (9.22) и затем использовать формулу (9.28). Вычисления – также "поточечные".

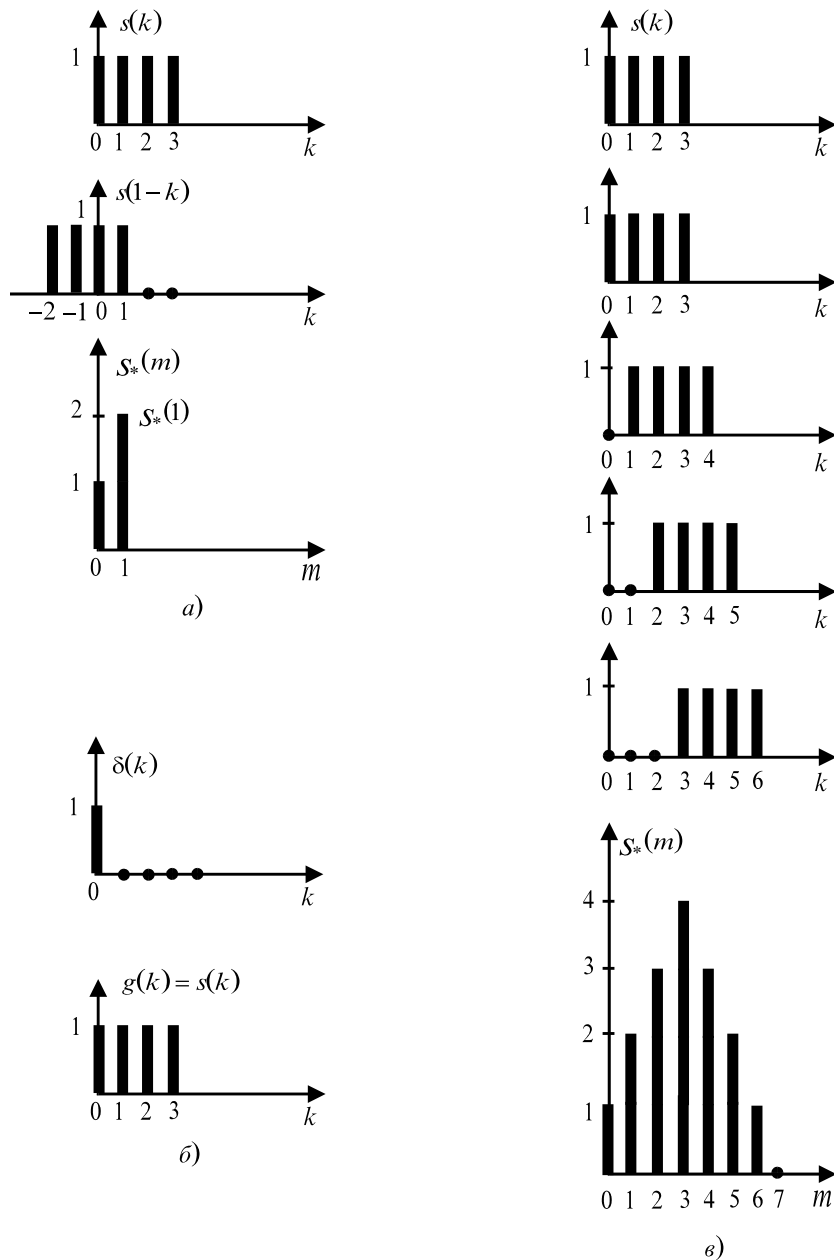


Рис.9.5

Метод импульсной характеристики по существу реализует принцип суперпозиции: реакция линейной цепи на сумму воздействий равна сумме реакций на каждое из воздействий. Этот принцип и отражается формулой (9.29). В случае автосвертки достаточно положить в ней $g(k) = s_1(k) = s(k)$.

На рис.9.5(б) и 9.5(в) показан механизм формирования автосвертки методом импульсной характеристики. Для определенности принято $N=4, s_0=1$.

Требуемая импульсная характеристика линейной цепи показана на рис.9.5(б). Структура такой цепи уже рассматривалась (см. рис.9.2). Положим теперь, что на указанную цепь подается последовательность $s(k)$. Реакция цепи на каждый отдельный

элемент входной последовательности одинакова и отличается (в данном случае) только сдвигом (рис.9.5, в). Эти реакции, складываясь, и приводят к автосвертке $s_*(m)$. Таким образом, автосвертку сигнала (б) можно получить как реакцию схемы рис.9.2 на этот сигнал.

Таким образом, процесс вычисления сверток можно организовать аналитически, программно или путем моделирования ЛПП-систем. Применительно к цифровым системам обработки предпочтение отдается реализуемым методам, которые обеспечивают высокую скорость и точность вычислений.

Домашнее задание

Работа включает теоретический анализ, расчетную часть и машинный эксперимент. Предварительно необходимо подготовить исходные данные, выполнить контрольные вычисления.

Для исследования свойств и закономерностей при z-преобразованиях используются три разновидности сигналов:

$$s(k) = \begin{cases} s_0, & k = 0, 1, \dots, N-1 \\ 0, & k < 0, k \geq N \end{cases};$$

$$u(k) = \begin{cases} U_0 e^{-\alpha k}, & k = 0, 1, \dots, N-1 \\ 0, & k < 0, k \geq N \end{cases};$$

$$v(k) = \begin{cases} U_0 \cos\left(\frac{2\pi}{N}k - \varphi_0\right), & k = 0, 1, \dots, N-1 \\ 0, & k < 0, k \geq N \end{cases}.$$

Отдельные параметры этих сигналов заданы по вариантам, соответствующим номеру бригады в журнале учета выполнения лабораторных работ, см. табл.9.1.

Таблица 9.1

Вариант	Параметры	k_0	α	φ_0
1		0	0,1	0
2		1	0,2	$\pi/6$
3		2	0,3	$\pi/3$
4		3	0,4	$\pi/2$

Первый сигнал позволяет сравнительно просто проверить основные свойства z-преобразования и оценить эффективность различных методов вычисления сверток. Сигналы $u(k)$, $v(k)$ служат исходными моделями при анализе схемной реализации источников.

В лабораторной работе использованы подпрограммы:

а) "z-преобразование".

По этой подпрограмме вычисляются значения суммы (9.1) с конечным числом слагаемых N

$$S(z) = \sum_{k=0}^{N-1} C_k z^{-k} .$$

Алгоритм вычисления составлен по схеме Горнера /5/

$$S(z) = C_0 + z^{-1} (C_1 + z^{-1} (C_{N-2} + z^{-1} C_{N-1}) \dots) .$$

Здесь не требуется возведение в степень. Основной операцией является образование текущей суммы

$$\sum_{n=1} = C_{n-1} + z^{-1} \sum_n ; \sum_{N-1} = C_{N-1} .$$

Циклы обновления этой суммы ($n=N-1, \dots, 1$) заканчиваются в момент $n=1$.

б) "Автосвертка".

По этой подпрограмме вычисляются значения суммы

$$x_*(m) = \sum_{n=0}^m x(n)x(m-n) ,$$

где исходный массив $x(n)$ ограничен областью $0 \leq n \leq N-1$. Вычисления разбиты на две ветви по значениям:

$$x_*(m) = \begin{cases} \sum_{n=0}^m x(n)x(m-n), & m \leq N-1 \\ \sum_{n=m-N+1}^{N-1} x(n)x(m-n), & m > N-1 \end{cases} .$$

в) "ЛПП-система".

По этой подпрограмме моделируется ЛПП-система (рис.9.6) с передаточной функцией

$$H(z) = s_0 (1 - cz^{-m}) \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} .$$

Данная ЛПП-система охватывает все приведенные в работе схемы и позволяет как "генерировать" сигналы, так и получать их свертки.

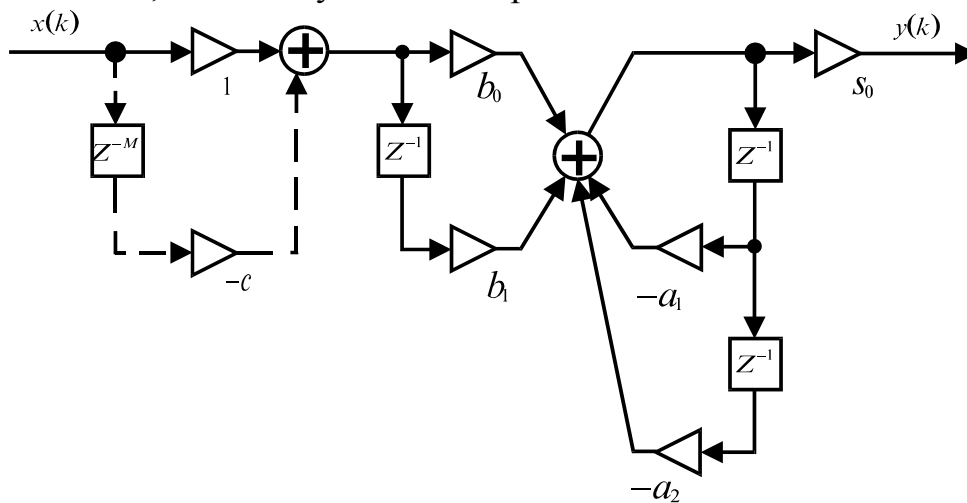


Рис.9.6.

1. Исходные данные для проверки свойств (а) и (б) z -преобразования оформите в виде табл.9.2.

Здесь задаются два сигнала, различающиеся сдвигом на один отсчет, и их сумма. Сигналы имеют параметры $s_0 = 1$, $N=5$, k_0 – в соответствии с вариантом. (см. табл.9.1).

Таблица 9.2.

k	0	1	...	10
Сигнал				
$s(k-k_0)$				
$s(k-k_0-1)$				
$s(k-k_0)+s(k-k_0-1)$				

Получите выражение и рассчитайте z -преобразование первых двух сигналов для случая $z=1$. Обратите внимание на взаимосвязь функций $D_1(z)$ и $D_2(z)$. Результаты занесите в табл.9.3

Таблица 9.3

z	0,1	0,2	0,5	1	2	5	10
$D(z)$							
$D_1(z)$							
$D_2(z)$							
$D_3(z)$							

2. Подготовьте исходные данные для вычисления автовертки сигнала $S(k)$, положив $s_0 = 1$, $N=5$.

Контрольные вычисления выполните в следующем порядке.

По формуле (9.22) определите значения $S(z)$ и $S^2(z)$ для $z=1$. Результаты занесите в табл.9.5.

Далее, методом обращения z -преобразования по формуле (9.28) найдите значения $s_*(k)$ $k=0,1$. Результаты занесите в табл.9.4.

Таблица 9.4

k	0	1	2	...	10
Сигнал					
$s(k)$ [$s(k-k_0)$]					
$s_*(k)$	"автосвертка"				
	"ЛПП-система"				

Таблица 9.5

z	0,1	0,2	0,5	1	2	5	10
$D(z)$							
$D_s(z)$							
$D_*(z)$							

3. Определите z -преобразование $D_u(z)$ сигнала $u(k)$ с параметрами $u_0=10$, $N=5$, α – в соответствии с вариантом (см.табл.9.1).

По данному выражению $D_u(z)$ составьте схему "генератора" сигнала $u(k)$. Для последующих вычислений по программам подготовьте данные в форме табл.9.6.

Таблица 9.6

		k	0	1	2	...	10
Сигнал							
$u(k)$	теория						
	эксперимент						
$u_*(k)$	"автосвертка"						
	"ЛПП-система"						

В верхней строчке запишите теоретические значения сигнала $u(k)$.

Методом обращения z -преобразования по формуле (9.28) найдите значения автосвертки $u_*(k)$ для $k=0, 1$. Результаты занесите в табл.9.6.

4. Подготовьте исходные данные для моделирования "генератора" гармонического сигнала $v(k)$ с параметрами $U_0=10, M=16, \Phi_0$ – в соответствии с вариантом (см.табл.9.1). Предусмотрите три значения для числа отсчетов на период $N=4, 8, 16$. Для последующих машинных экспериментов подготовьте **три табл.9.7, 9.8 и 9.9** по данной форме

Форма для таблиц 9.7, 9.6, 9.8

		k	0	1	2	3	...	N
Сигнал								
$v(k)$ $N=4$	теорет.							
	эксперимент							

С учетом значений $N=4, 8, 16$. В верхней строчке запишите теоретические значения сигнала.

Порядок выполнения работы

Пункты лабораторного задания выполняются в соответствии с пунктами предварительной подготовки.

Выбрав свой вариант вам нужно проделать 3 пункта работы.

1. Зарисуйте последовательности $S(K-K_0), S(K-K_0-1)$ и суммарный сигнал. Записать в табл.9.3 z – преобразование этих трёх сигналов. Затем записать выражение для вычисления свёртки сигналов. Запишите сигналы $h(n), x(n)$ и свёртку $y(n)$. Просмотрите демонстрацию получения свёртки нажав несколько раз «Enter». Сделайте выводы о выполнении свойств (а) и (б) z -преобразования.

Далее перепишите с экрана числовые данные. Результат z -преобразования $S(K) - D_s(z)$ занесите в таблицу 9.5. Результаты автосвёртки прямой метод занесите в среднюю строчку таблицы 9.4 а импульсный метод занесите в нижнюю строчку табл. 9.4, z -преобразование автосвертки занесите в нижнюю строчку таблицы 9.5.

Далее необходимо получить бесконечную последовательность расчетов и задав соответствующие коэффициенты a_1, a_2, b_0, b_1, c, N . Формулы для расчёта этих коэффициентов имеются в теоретической части этой работы. С помощью стрелок вы можете переместить курсор к соответствующему коэффициенту и нажав «Enter» в нижнем окне введите значение. Нажмите «Enter» для закрепления набранного значения. Если вводится «0» то соответствующая часть схемы исключается (закрашивается в синий цвет). В нижнем окне выводится выходная

последовательность, а справа соответствующие числовые значения. Значения коэффициентов необходимо записать в отчёт. Затем получите последовательность из N импульсов и записать коэффициенты для этого случая.

2. Экспериментально исследуйте генератор бесконечно убывающей последовательности. На экран слева выводятся числовые значения отсчётов сигнала $U(k)$, а внизу в окне графически выводятся сами отсчёты этого сигнала. Занесите в табл.9.6. первые 10 отчетов $u(k)$.

Далее нужно аналогично предыдущему пункту вам нужно получить бесконечно убывающую последовательность с использованием рассчитанных коэффициентов a_1, a_2, b_0, b_1, c, N . Нажмите выход и занесите результаты автосвёртки этого сигнала занести в табл. 9.6 аналогично таблице 9.4. Затем, нажав «Enter» получите ограниченную убывающую последовательность, задавая коэффициенты a_1, a_2, b_0, b_1, c, N , при подаче на вход сигнала $U(k)$.

3. Экспериментально исследуйте "генератор" гармонического сигнала $v(k)$. Занесите в табл. 9.7 первые 10 значений $v(k)$ для трёх синусоид разной частоты. Далее используя данные о параметрах схемы рис.9.3, получите синусоиду $v(k)$ для заданного количества отсчетов на период $N=4, 8, 16$ вводя соответствующие коэффициенты a_1, a_2, b_0, b_1, c, N . Коэффициенты, а также отсчеты выходной последовательности представляющей собой синусоиду, занесите в отчёт.

Укажите возможность оценки фазы сигнала Φ_0 в указанных трех случаях.

Содержание отчета

Отчет по работе должен включать расчетную и экспериментальную части в соответствии с пунктами предварительной подготовки и лабораторного задания:

- формулы и их вывод для z -преобразований;
- схемы "генераторов" с расчетами параметров;
- теоретические, контрольные и экспериментальные расчеты, таблицы и графики с необходимыми пояснениями;
- сравнительный анализ и выводы по результатам теоретических и экспериментальных исследований.

Контрольные вопросы

1. Приведите полный вывод свойств (а), (б) и (в) z -преобразования.
2. Определите z -преобразование последовательности вида $s(k) = s_0 \delta(k - k_0)$, $k=0,1,\dots, k_0$ – целое число. Выполните обратное z -преобразование, результаты сравните с последовательностью $s(k)$.
3. Чем отличаются z -преобразования последовательностей $s(k)$ и $s(k - k_0)$, k_0 – целое число?
4. На примере последовательности (б) поясните, почему вычисления значений z -преобразования $D(z)$ по формуле (9.21) (и с учетом схемы Горнера) предпочтительнее по сравнению с вычислениями по формуле (9.22)?
5. Какие изменения следует внести в схему рис.9.2 для получения неограниченной последовательности (9.20)?

6. Каким образом, используя схему рис.9.2, можно получить периодические последовательности с заданной скважностью? Покажите на примерах.

7. Покажите, что необходимым и достаточным условием получения ограниченной последовательности $s(k) = \begin{cases} s_0 a^k, & k = 0, 1, \dots, N-1 \\ 0, & k < 0, k \geq N \end{cases}$

по схеме рис.9.3 является равенство $b = -a^N$. Каким образом может проявиться нарушение этого условия?

8. Укажите, какие элементы схемы рис.9.4 задают значения амплитуды, "частоты", начальной фазы и число периодов (или длительность) сигнала $v(k)$?

9. Приведите примеры структурных схем дискретных модуляторов с различными видами (АМ, ЧМ, ФМ) модуляции. Поясните принципы работы схем.

10. Определите свертку двух сигналов $s_1(k) = s_1 \delta(k - k_1)$ и $s_2(k) = s_2 \delta(k - k_2)$, где k_1 и k_2 – целые числа. Покажите, как реализуются методы – прямой, обращения z -преобразования, импульсной характеристики – при вычислениях этой свертки?

II. При построении графика автосвертки произвольного сигнала $s(k)$ можно использовать нормировку исходя из неравенства: $s_*(m) = \sum_{n=0}^m s(n)s(m-n) \leq \sum_{n=0}^{N-1} s^2(n)$.

Покажите справедливость этого неравенства, а также случаи, когда оно обращается в равенство.

12. Составьте различные варианты из последовательно соединенных двух одинаковых или различных схем рис.9.2, 9.3, 9.4. Какие сигналы можно получить на выходе при запуске этих схем? Какое свойство z -преобразования здесь используется?

13. В данной работе сигналы представлены на безразмерной оси времени. Каким образом можно ввести размерную шкалу времени? Как при этом можно определить размерную частоту гармонического сигнала $v(k)$?

14. Дайте полный вывод z -преобразования сигнала $v(k)$ см. (9.27), и определите численные значения всех параметров "генератора" по схеме рис.9.4 в указанных трех случаях.

Литература

1. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. – М.: Мир, 1978. – 348 с.
2. Сиберт У.М. Цепи, сигналы, системы. – М.: Мир, 1988. ч.1 – 336 с., ч.2 – 360 с.
3. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: Радио и связь, 1986. – 512 с.
4. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: Высшая школа, 1988. – 448 с.
5. Дьяконов В.П. Справочник по расчетам на микрокалькуляторах. – М.: Наука, 1986. – 224 с.
6. Дех Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и z -преобразования. – М.: Наука, 1971. – 288 с.

Исследование цифровых фильтров первого и второго порядка

Цель работы: ознакомление с методами анализа и моделирования линейных систем, анализ импульсной и частотной характеристик систем 1-го и 2-го порядка, оценка устойчивости, моделирование систем 1-го и 2-го порядка и оценка искажений при прохождении сигналов.

Краткие теоретические сведения

Цифровые фильтры (ЦФ) или линейные системы дискретного времени с постоянными параметрами (ЛПП-системы) позволяют моделировать разнообразные линейные цепи и системы непрерывного времени.

1. Линейные непрерывные и дискретные системы.

1. Линейная непрерывная (по времени) система в общем виде задается дифференциальным уравнением /10/:

$$A(q)y(t) = B(q)x(t) \quad (10.1)$$

и начальными условиями, где $x(t)$ – вход системы, $y(t)$ – выход системы, операторы $A(q)$ и $B(q)$ равны

$$A(q) = \sum_{i=0}^N a_i q^i ; B(q) = \sum_{i=0}^M b_i q^i , \text{ где } q^i u(t) = \frac{d^i u(t)}{dt^i} .$$

Коэффициенты a_i и b_i характеризуют параметры системы, они могут быть скалярными величинами, функциями времени, матрицами.

На аналогичном принципе дается общее представление линейной дискретной системы с той лишь разницей, что оператор дифференцирования заменяется оператором сдвига. Введем этот оператор следующим образом.

Пусть $u(k)$ – элемент дискретной последовательности. Тогда оператор сдвига можно представить в виде

$$Du(k) = u(k-1);$$

$$D^2u(k) = u(k-2);$$

⋮

$$D^i u(k) = u(k-i).$$

Оператор D можно трактовать как единичную задержку, он будет определен для $u(k) \neq 0, k \geq 0$, если $Du(k) = u(k-1) \neq 0, k \geq 1$ и $Du(k) = 0, k = 0$.

Линейную дискретную систему (с дискретными последовательностями на входе и выходе) можно представить аналогично (10.1), см /3/.

$$A(D)y(k) = B(D)x(k), \quad A(D) = \sum_{i=0}^N a_i D^i ; B(D) = \sum_{i=0}^M b_i D^i$$

или в развернутом виде

$$\sum_{i=0}^N a_i y(k-i) = \sum_{i=0}^M b_i x(k-i), \quad (10.2)$$

Здесь также коэффициенты a_i и b_i – характеризуют параметры системы, они могут быть скалярными величинами, функциями дискретного времени (текущего номера k), матрицами. Наряду с (10.2) должны задаваться начальные условия. Из условий физической реализуемости считается также, что $x(k)$, $y(k)$ для $k < 0$. Видно, что уравнение (10.2) является дискретным вариантом дифференциального уравнения, представляющего зависимость "вход-выход" аналоговой линейной системы.

Итак:

1) непрерывная линейная система в общем виде представляется дифференциальным уравнением (1), дискретная система (цепь, фильтр) – *линейным разностным уравнением* (2);

2) непрерывная система включает усилители, дифференцирующие и интегрирующие элементы; дискретная (как видно из (2)) – "усилители" (взвешивание), сумматоры и элементы задержки.

2. Импульсная характеристика и физическая реализуемость.

Представление (2) линейной дискретной системы, по существу, является алгоритмом функционирования и вместе с тем позволяет проводить структурный анализ системы.

Рассмотрим пример. Положим $A(D)=1-aD$, $B(D)=1$. В этом случае получим систему 1-го порядка $(1-aD)y(k)=x(k)$. В развернутом виде (группируя члены) имеем $y(k)-ay(k-1)=x(k)$ или $y(k)=x(k)+ay(k-1)$. (10.3)

Из последней записи видно, что каждый последующий отсчет выходного сигнала равен сумме входного отсчета и взвешенного (умноженного на коэффициент a) предыдущего выходного отсчета. Алгоритм (10.3) реализуется схемой рис.10.1(а), где представлены сумматор, элемент задержки D на интервал между отсчетами и усилитель (взвешивание с коэффициентом a). Такая схема известна как рециркулятор (накопитель).

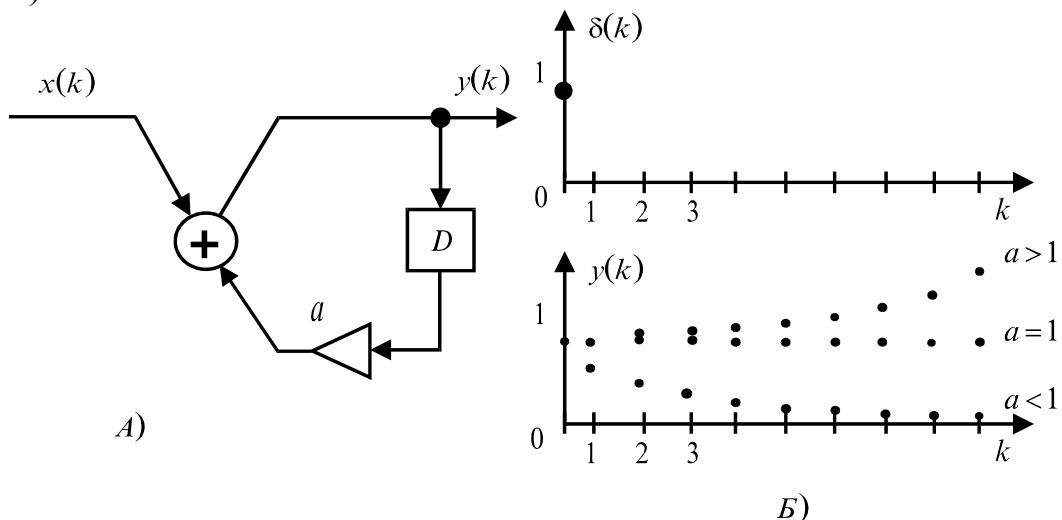


Рис. 10.1

Свойства системы (цепи) можно определить по реакции на элементарное воздействие. В связи с этим вводится понятие (по аналогии с непрерывными цепями)

импульсной характеристики $g(k)$ дискретной цепи как реакция на воздействие в виде функции $\delta(k)$, см.рис.10.2.

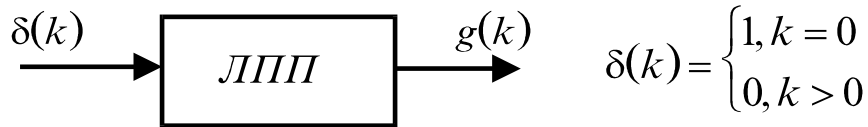


Рис. 10.2

Эта характеристика определена для линейных цепей с постоянными параметрами (цепь ЛПП или ЦФ). В рассмотренном примере импульсная характеристика равна, см.рис.10.1(б). $g(k) = y(k) = \begin{cases} a^k, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases}$.

Это следует из рекуррентного соотношения (10.3) при условиях: $x(k)=\delta(k)$ и $y(-1)=0$.

Импульсная характеристика дискретной линейной цепи с постоянными параметрами (ЛПП) позволяет непосредственно выразить выходную последовательность через входную. По аналогии с непрерывными цепями составим следующую табличку "воздействие-реакция" для ЛПП-цепей.

Воздействие	Реакция
$\delta(m)$	$g(m)$
$\delta(m-k)$	$g(m-k)$
$x(k)\delta(m-k)$	$x(k)g(m-k)$
$x(m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(m-k)$	$y(m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)g(m-k)$

Последняя строчка отражает *принцип суперпозиции*: реакция на сумму воздействий равна сумме реакций. Итак, формально выходная последовательность определяется сверткой (свертку обозначают звездочкой *):

$$y(m) = x(m) * g(m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)g(m-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(m-k)g(k). \quad (10.4)$$

Однако следует различать физически реализуемые и нереализуемые цепи.

Первые определяются условием, что реакция не может опережать воздействие (принцип причинности). Это условие имеет вид

$g(k)=0, k<0$. Учтем еще, что входная последовательность возникает в определенный момент времени, который и примем за начало отсчета. Следовательно, для реализуемых ЛПП-цепей имеем

$$y(m) = \sum_{k=0}^m x(k)g(m-k) = \sum_{k=0}^m g(k)x(m-k). \quad (10.5)$$

Как и в непрерывных системах, импульсная характеристика отражает инерционные свойства (память) дискретной системы. Так, например, для системы с $g(k)=\delta(k)$ память отсутствует, т.е. (см.(10.5)) $y(m)=x(m)$.

Заметим, что во многих случаях цифровой обработки сигналов возникает необходимость использовать физически нереализуемые линейные дискретные системы (идеальные фильтры нижних частот, преобразователи по Гильберту, идеальные дифференциаторы и др.). Поэтому большая часть теории линейных дискретных систем посвящена разработке методов аппроксимации физически нереализуемых цепей реализуемыми цепями /3/.

Импульсная характеристика позволяет оценить *устойчивость системы*. Необходимым и достаточным условием устойчивости является следующее требование:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |g(k)| < \infty. \quad (10.6)$$

Это означает, что при любой ограниченной входной последовательности выходная последовательность будет также ограниченной. В рассмотренном примере, рис.10.1. система будет устойчивой только при $a < 1$.

Для заданной системы импульсную характеристику можно непосредственно получить из уравнения (10.2), если положить $x(k)=\delta(k)$ с начальными условиями $y(k)=0, k < 0$. В результате, возникающая система алгебраических уравнений сравнительно легко разрешается относительно $y(n)=g(n), n=0, 1, \dots$, прямыми подстановками.

Следует отметить, что при решении задач прохождения сигналов через цепи (цифровая обработка) предпочтение отдается методам на основе сверток (10.4) и (10.5). Для анализа структуры цепи и ее возможных модификаций используется разностное уравнение (10.2).

3. Классификация и общая структура цифровых фильтров.

Разностное уравнение (10.2) допускает непосредственную схемную реализацию линейной дискретной системы. Предварительно перепишем уравнение в удобную форму, полагая $a_0=1$ (это условие не является ограничительным):

$$y(k) = \sum_{i=0}^M b_i x(k-i) - \sum_{i=1}^N a_i y(k-i), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (10.7)$$

Данный алгоритм реализуется схемами рис.10.3(а) (где $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$) и рис.10.3(б) (где $a_i \neq 0, i=0, 1, 2, \dots$).

На схемах представлены усилители (взвешивание с определенными коэффициентами), элементы задержек D на один отсчет и сумматоры. Как видно, схема рис.10.1(а) является частным случаем схемы рис.10.3(б). Принципиально схема рис.10.3(б) отличается от схемы рис.10.3(а) наличием обратных связей.

Схемы такого типа называют *рекурсивными фильтрами (РФ)*. Соответственно, схему рис.10.3(а) называют *нерекурсивным фильтром (НФ)*.

Итак, в зависимости, от значений коэффициентов в (10.7) получаем две разновидности схем (фильтров). Существенным различием между ними является то, что схемы РФ (благодаря обратным связям) имеют неограниченную импульсную характеристику $g(k)$, в то время как у схемы НФ она ограничена (конечна по протяженности).

В литературе [3] принято называть фильтры (цепи) с *конечной импульсной характеристикой (КИХ-фильтрами)*, а фильтры с *бесконечной характеристикой (БИХ-фильтрами)*.

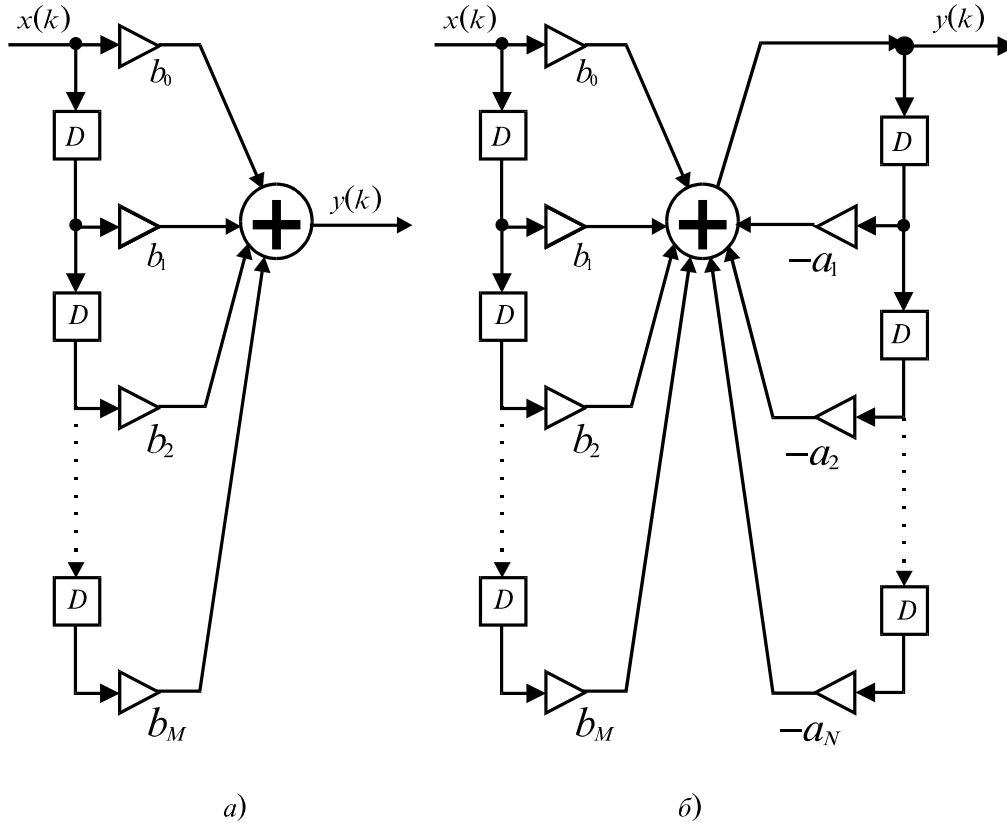


Рис. 10.3

Перечислим основные свойства РФ и НФ, вытекающие из протяженности импульсных характеристик:

- нерекурсивные фильтры (как правило) являются КИХ-фильтрами, следовательно, они впегда реализуемы и устойчивы; однако у таких фильтров отсутствует четкая частота среза у коэффициента передачи (в силу финитности импульсной характеристики);

- рекурсивные фильтры являются БИХ-фильтрами, следовательно, они могут быть неустойчивыми; однако реализуемые фильтры имеют более четкую частоту среза у коэффициента передачи (т.е. импульсная характеристика БИХ-фильтров имеет финитный спектр).

Проблема заключается в реализации (на этапе проектирования) устойчивых фильтров с финитными частотными и импульсными характеристиками.

4. Частотная характеристика. Передаточная функция.

Полное описание свойств ЛПП-системы задается передаточной (или системной) функцией $H(z)$ и импульсной характеристикой $g(n)$, которые взаимнооднозначно связаны z -преобразованием. В соответствии с (10.1) передаточная функция имеет вид

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g(n)z^{-n} = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}}. \quad (10.8)$$

При условии $N \geq M$ число N называют *порядком системы*.

Переход к комплексному коэффициенту передачи $\dot{K}_0(\omega)$ ЛПП-системы осуществляется путем замены $z = \exp(j\omega\Delta t)$ в записи (10.8):

$$\dot{K}_\Delta(\omega) = H(e^{j\omega\Delta t}) = \frac{\sum_{n=0}^M b_n e^{-jn\omega\Delta t}}{1 + \sum_{n=1}^N a_n z^{-jn\omega\Delta t}}, \quad (10.9)$$

где Δt – шаг (интервал) дискретизации при замене шкалы непрерывного времени на дискретную. При этом обнаруживаются периодические свойства частотной характеристики

$$\dot{K}_\Delta(\omega) = \dot{K}_\Delta(\omega + m\omega_D), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \quad (10.10)$$

с периодом $\omega_D = 2\pi/\Delta t$, который является частотой дискретизации.

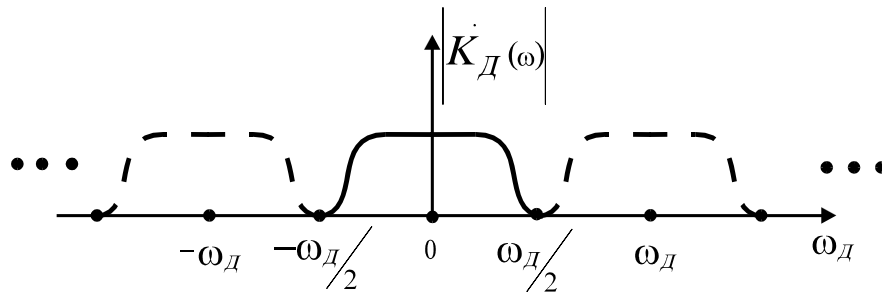


Рис. 10.4

Если $g(t)$ и $\dot{K}(\omega)$ – импульсная и частотная характеристики аналогового прототипа, то переход к дискретному времени дает:

$$g(t) \rightarrow g(n\Delta t) = g(n)$$

$$\dot{K}(\omega) \rightarrow \dot{K}_\Delta(\omega) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \dot{K}(\omega - m\omega_D) \quad (10.11)$$

Здесь проявляется один из существенных недостатков ЛПП-систем – частотные свойства аналога воспроизводятся с искажением. Они вызваны наложением (перехлестыванием) слагаемых $\dot{K}(\omega \pm m\omega_D)$ с различными m . Однако искажениями можно пренебречь и считать, что

$$|\dot{K}(\omega) - \dot{K}_\Delta(\omega)|, \quad \omega \in \left[-\frac{\omega_D}{2}, \frac{\omega_D}{2} \right], \text{ если выбрать частоту дискретизации } \omega_D \text{ (или}$$

соответствующий интервал Δt с условием

$$\dot{K}_\Delta(\omega \pm \omega_D) \approx 0, \quad \omega \in \left[-\frac{\omega_D}{2}, \frac{\omega_D}{2} \right].$$

Проблема выбора частоты дискретизации ω_D возникает только при моделировании высокочастотных систем (дифференцирующих цепей, усилителей высокой частоты и т.д.).

В последующем полагается время безразмерным и $\Delta t = 1$, соответственно, $\omega_d = 2\pi$, с основной шкалой частотных характеристик $\omega \in [-\pi, \pi]$, $\omega \in [-0, 2\pi]$.

5. Принципы анализа цифровых фильтров.

Основные закономерности при анализе ЛПП-систем можно проследить на примерах систем *не выше 2-го порядка*. Используя z -плоскость, временную или частотную оси.

Структура ЛПП-системы непосредственно следует из вида передаточной функции $H(z)$ и может быть реализована в различных вариантах. На рис.10.5(a) представлена ЛПП-система 2-го порядка в так называемой прямой (№1) форме, которая следует из (10.8). На рис.10.5(б) представлена та же система в канонической (№2) форме.

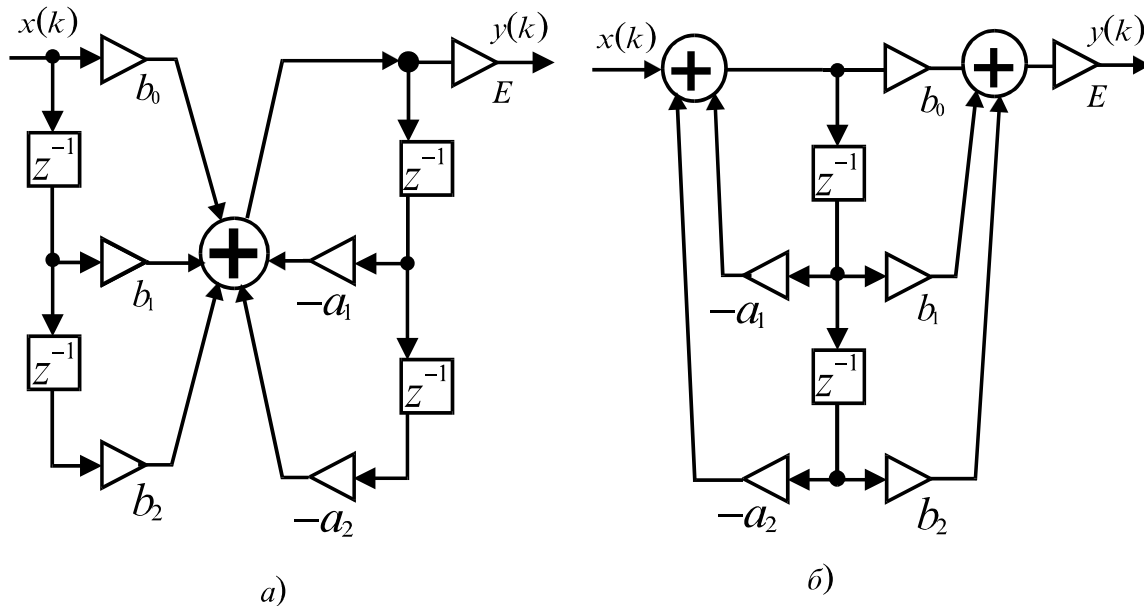


Рис.10.5

На рисунках показаны: "усилители" (умножение на коэффициенты a_i и b_i), элементы задержки на один отсчет (звено z^{-1}) и сумматоры. При необходимости используется и масштабирующий множитель E . Схемы такого типа называют *рекурсивными* фильтрами. В случае $a_1=a_2=0$ схемы называют *нерекурсивными* (или *трансервсальными*) фильтрами.

Существуют определенные ограничения на параметры a_i и b_i ЛПП-системы. Как видно из рис.10.5, эти системы могут иметь обратные связи (при $a_i \neq 0$) и возникает вопрос устойчивости. Один из

критериев устойчивости заключается в том, чтобы полюса передаточной функции $H(z)$ (или нули знаменателя в (10.8)) находились на плоскости z внутри окружности единичного радиуса: $|z_n| < 1$.

Рассмотрим характерные ограничения на параметры ЛПП-системы 2-го порядка ($N=M=2$).

Передаточную функцию (10.8) можно переписать в виде

$$H(z) = b_0 \frac{(z - z_{01})(z - z_{02})}{(z - z_{n1})(z - z_{n2})}, \quad (10.12)$$

где z_{01} и z_{02} – корни уравнения $z^2 + \frac{b_1}{b_0}z + \frac{b_2}{b_0} = 0$, z_{n1} и z_{n2} – корни

уравнения $z^2 + a_1z + a_2 = 0$. Значения z_{0i} и z_{ni} , $i=1,2$ определяют соответственно "нули" и "полюса" передаточной функции ЛПП-системы. Если нули компенсируют полюса, т.е. $z_{0i} = z_{ni}$, $i=1,2$, то ЛПП-система является "все пропускающей" (тождественная цепь). В противном случае, если есть некомпенсированные (один или два) полюса, то система имеет некоторую полосу пропускания в частотной области.

Общий вид импульсной характеристики ЛПП-системы 2-го порядка можно получить путем обратного z-преобразования из (10.8):

$$g(n) = \begin{cases} b_0, & n = 0 \\ b_1 - a_1b_0, & n = 1 \\ A_1z_{n_1}^{n+1} - A_2z_{n_2}^{n+1}, & n \geq 2 \end{cases}, \quad (10.13)$$

где $D = a_1^2 - 4a_2$.

$$A_i = \frac{1}{\sqrt{D}} [b_0 + b_1z_{n_i}^{-1} + b_2z_{n_i}^{-2}], \quad i = 1, 2; \quad z_{n1} = -\frac{1}{2}[a_1 - \sqrt{D}], \quad z_{n2} = -\frac{1}{2}[a_1 + \sqrt{D}],$$

В случае действительных значений полюсов ($D \geq 0$) импульсная характеристика $g(n)$ является аperiodической последовательностью. Если полюса комплексные ($D < 0$), то $g(n)$ имеет периодический характер.

Таким образом, ЛПП-система позволяет моделировать различные аperiodические и резонансные аналоговые усилители.

Зона устойчивости ЛПП-системы, которая следует из условий $|z_{ni}| < 1$, $i = 1, 2$, представлена на рис.10.6(a). В зоне выделены две области. Незаштрихованная часть соответствует случаю действительных значений полюсов z_{n1} и z_{n2} . Они расположены на действительной оси x плоскости z , см. рис.10.6(б). Заштрихованная часть является зоной устойчивости в случае комплексно-значных полюсов. Условия устойчивости системы приводят к следующим ограничениям на параметры a_1 и a_2 :

$$a_1 - a_2 < 1; \quad a_1 + a_2 > -1; \quad -1 < a_2 < 1.$$

Таким образом, по конкретным значениям параметров a_i , b_i можно провести полный анализ ЛПП-системы: оценить устойчивость, определить частотную (10.9) и импульсную (10.13) характеристики.

6. Примеры цифровых фильтров 1-го и 2-го порядка

Приведем примеры моделирования ЛПП-систем не выше 2-го порядка.

1) Дифференцирование

Если в алгоритме (10.7) положить $M=2$, $a_1=a_2=0$, то получим

$$y(k) = b_0x(k) + b_1x(k-1).$$

При условии $b_0 = -b_1 = 1$ выходная последовательность равна
 $y(k) = x(k) - x(k-1)$. (10.14)

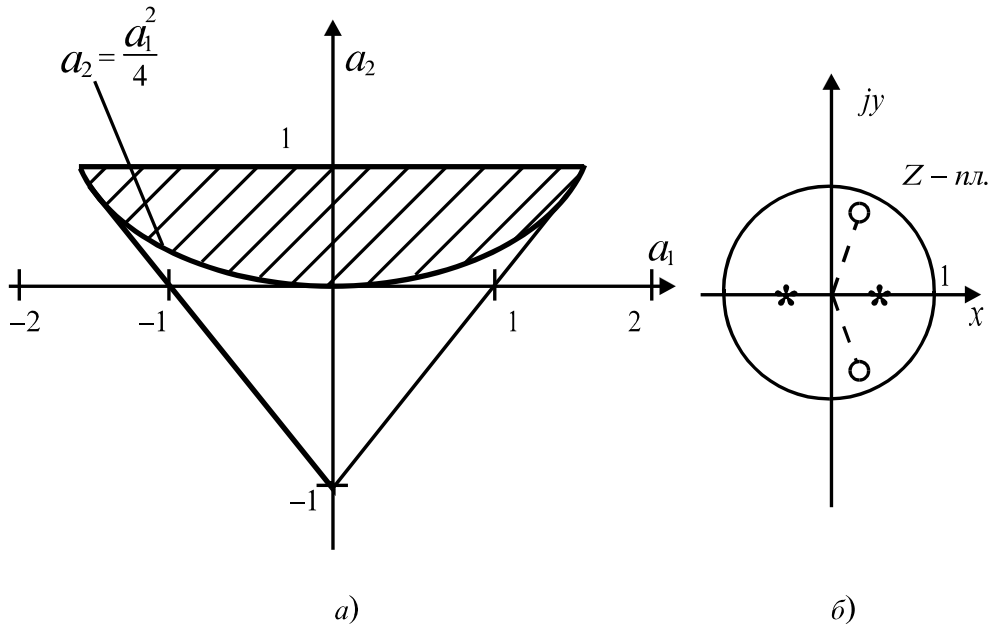


Рис.10.6

Эта операция может служить (приблизительно) аналогом дифференцирования сигналов. Чем медленнее меняется сигнал, тем точнее дифференцирование. Схема дифференцирования в соответствии с алгоритмом (10.14) представлена на рис.10.7(a).

В общем случае – с заменой z^{-1} на z^{-N} , где N – целое число, схему такого типа называют режекторным гребенчатым фильтром (РГФ). Он задается передаточной функцией $H(z) = 1 - z^{-N}$

и разностным уравнением $y(k) = x(k) - x(k - N)$.

Фильтры такого типа используются в случае, когда необходимо подавить спектральные составляющие сигнала на частотах $\frac{2\pi}{N} n, n=0,1,\dots$

2) Интегрирование

Положим в (10.13) $b_1 = b_2 = a_2 = 0$, тогда импульсная характеристика будет иметь вид

$$g(n) = b_0 (-a_1)^n, \quad n = 0, 1, \dots \quad (10.15)$$

Далее запишем выходную последовательность $y(n)$ в виде дискретной свертки (аналог интеграла Дюамеля)

$$y(k) = \sum_{m=0}^k x(m)g(k-m) = b_0 \sum_{m=0}^k x(m)(-a_1)^{k-m}.$$

При условии $a_1 = -(1-\varepsilon)$, где ε – бесконечно малое, и "быстром" изменении $x(m)$ можно получить $(-a_1)^{k-m} \approx 1$. Тогда указанная сумма будет равна

$$y(k) = b_0 \sum_{m=0}^k x(m), \quad k=0,1,\dots \quad (10.16)$$

Дополнив эту сумму множителем $E=1/k+1$, получим алгоритм оценки среднего значения последовательности $x(k)$:

$$y(k) = x_{cp}(k) = \frac{b_0}{k+1} \sum_{m=0}^k x(m), \quad k = 0, 1, \dots \quad (10.17)$$

Схема усреднения (аналог интегратора) представлена на рис.10.7(б). Параметр b_0 является масштабным множителем.

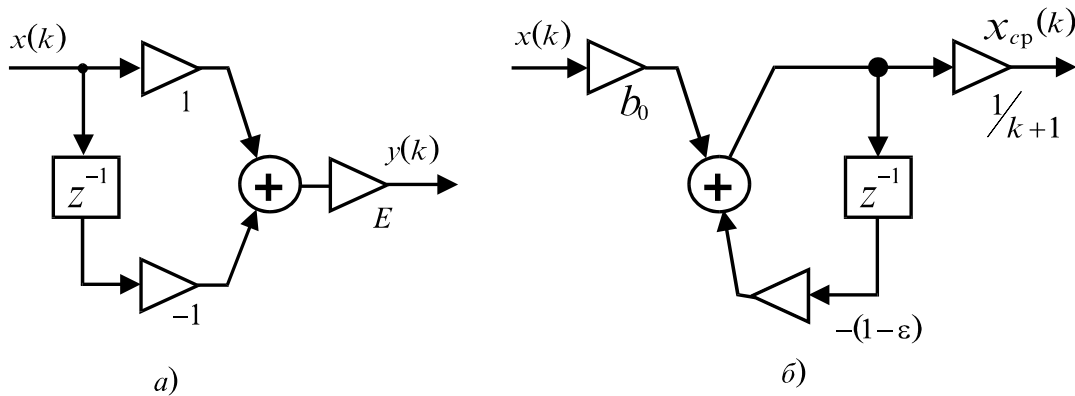


Рис.10.7

Заметим, что передаточная функция $H(z)$ в случае (10.15) имеет единственный полюс $z_n = -a_1$. Ясно, что значение $a_1 = -1$ (для идеального интегрирования) находится на границе зоны устойчивости, см. рис.10.6(а).

Схему рис.10.7(б) можно использовать для оценки и выделения "постоянной составляющей" дискретного сигнала.

В общем случае с заменой z^{-1} на z^{-N} , N – целое и без множителя $1/k+1$ схему такого типа называют полосовым гребенчатым фильтром. Она представляется разностным уравнением $y(k) = b_0 x(k) + (1-\epsilon)y(k-N)$, $k = 0, 1, \dots$

и передаточной функцией $H(z) = \frac{b_0}{1 - (1-\epsilon)z^{-N}}$.

Выбор малого значения $0 < \epsilon \ll 1$ обеспечивает устойчивость системы. Схемы такого типа используются, например, в тех случаях, когда необходимо накопить слабый повторяющийся сигнал (с частотой $2\pi/N$), принимаемый на фоне шума.

3) Аперриодический усилитель.

В предыдущем примере ($a_2=0$, $a_1 \in (-1,1)$) импульсная характеристика (10.15) является убывающей аперриодической последовательностью. Соответствующая ЛПП-система при этом моделирует некоторую аналоговую RC -цепь. При $a_1 \rightarrow -1$ моделируется интегрирующая цепь. Более сложную – типа RLC аналоговую цепь можно моделировать, положив в (10.13) параметры $a_1=0$, $a_2 \in (0, -1)$. В этом случае устойчивость также сохраняется, см. рис.10.6(а), система имеет два полюса $z_{n1} = -z_{n2} = \sqrt{|a_2|}$, симметрично расположенные на оси x плоскости z , см. рис. 10.6(б) (обозначены звездочкой *).

Импульсная характеристика (10.13) теперь принимает вид

$$g(n) = \begin{cases} b_0 & n=0 \\ b_1 & n=1 \\ |a_2|^{n/2} \left[b_0 + \frac{b_2}{|a_2|} \frac{1+(-1)^n}{2} + \frac{b_1}{\sqrt{|a_2|}} \frac{1-(-1)^n}{2} \right], & n \geq 2 \end{cases} \quad (10.18)$$

Как видно, можно получить последовательность с четными номерами n (при $b_1=0$) или с нечетными номерами n (при $b_2 = -b_0 |a_2|$). Возможны и комбинированные варианты.

Импульсная характеристика (10.18) имеет явно выраженные две части: "огibaющую", которую формально можно представить (начиная с $n \geq 2$) как

$$g_{\text{ог}}(m) = \sum_{k=2}^{\infty} |a_2|^{k/2} \delta(n-k)$$

и "заполнение" – квадратная скобка в (10.18). Здесь использована δ -функция

$$\text{Кронекера } \delta(n) = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

Протяженность по n последовательности $g(n)$ позволяет судить о "памяти" ЛПП-системы или степени ее широкополосности: чем более протяженна $g(n)$, тем менее широкополосна система. Оценку протяженности N_n импульсной характеристики можно вести по условию

$$|a_2|^{N_n/2} = 0,1 |a_2|, \quad (10.19)$$

ограничившись 10%-ым уровнем значимости. Фактически память будет составлять N_n+2 отсчета (учитывая $n=0,1$ в (10.18)).

Итак, схемы рис.10.5 при $a_1=0$ и $-1 < a_2 < 0$ имеют затухающую (с различными вариантами осцилляции) импульсную характеристику (10.18) и позволяют моделировать некоторый класс аperiodических усилителей. Полоса частот усилителя обратно пропорциональна значениям параметра $|a_2|$.

4) Резонансный усилитель

Рассмотрим случай, когда дискриминант $D = a_1^2 - 4a_2$ квадратного уравнения $z^2 + a_1 z + a_2 = 0$ является отрицательным, т.е. $a_1^2 < 4a_2$. Это приводит, см. (10.13), к комплексно-значным и сопряженным полюсам $z_{n1} = z_{n2}^*$. На z -плоскости они изображены кружочками, см. рис.10.6(б). С учетом устойчивости системы, параметры a_1 и a_2 при этом должны попадать в заштрихованную область рис.10.6(а).

Введем обозначения для указанных полюсов

$$z_{n1} = \rho e^{j\alpha}, \quad z_{n2} = \rho e^{-j\alpha}. \quad (10.20)$$

Так как в общем случае $z_{n1} + z_{n2} = -a_1$, $z_{n1}z_{n2} = a_2$, то получим

$$\rho = \sqrt{a_2}, \quad \alpha = \arccos\left(-\frac{a_1}{2\sqrt{a_2}}\right). \quad (10.21)$$

Рассмотрим теперь частотно-временные характеристики ЛПП-системы 2-го порядка в случае комплексно-значных полюсов. Полагаем, что система имеет параметры $b_1 = b_2 = 0$, $a_1 \in (-2, 2)$, $a_2 \in (0, 1)$. В данных условиях импульсная характеристика (10.13) приводится к форме

$$g(n) = \Theta \rho^{n+1} \sin(n+1)\alpha, \quad n = 0, 1, \dots \quad (10.22)$$

$$\Theta = b_0 / \rho \sin \alpha.$$

Видно, что она является дискретной гармонической последовательностью с убывающей амплитудой (по условию $\rho < 1$).

Передающая функция системы с учетом (10.12) и (10.19) равна

$$H(z) = \frac{z^2}{(z - \rho e^{j\alpha})(z - \rho e^{-j\alpha})}.$$

Соответственно, комплексный коэффициент передачи равен

$$\dot{K}_\Delta(\omega) = \frac{e^{j2\omega}}{(e^{j\omega} - \rho e^{j\alpha})(e^{j\omega} - \rho e^{-j\alpha})}.$$

Для практического анализа значение имеют амплитудно-частотная (АЧХ) – $A(\omega)$ и фазо-частотная (ФЧХ) – $\varphi(\omega)$ характеристики:

$$A(\omega) = \text{mod } \dot{K}_\Delta(\omega),$$

$$\varphi(\omega) = \arg \dot{K}_\Delta(\omega).$$

В данном случае они равны

$$A(\omega) = \left\{ \left[1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\omega - \alpha) \right] \left[1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\omega + \alpha) \right] \right\}^{-\frac{1}{2}}, \quad (10.23)$$

$$\varphi(\omega) = 2\omega - \arctg \frac{\sin \omega - \rho \sin \alpha}{\cos \omega - \rho \cos \alpha} - \arctg \frac{\sin \omega + \rho \sin \alpha}{\cos \omega - \rho \cos \alpha}.$$

Анализ показывает, что характеристики (10.22) и (10.23) отражают резонансные свойства системы. Резонансная частота $\omega_{\text{рез}} = \alpha$ определяется по формуле (10.21).

Добротность резонатора пропорциональна значению ρ : с ростом $\rho \rightarrow 1$ добротность увеличивается. При $\rho = 1$ система оказывается неустойчивой.

Схема резонансного усилителя приведена на рис.10.8. Хотя по условию см. (10.21), "резонансная" частота может находиться в широких пределах $\alpha \in (0, \pi)$, высокое качество резонансного усиления обеспечивается только в средней части указанного диапазона, т.е. при $\alpha \in (\pi/4, 3\pi/4)$

При несоблюдении последнего условия существенно проявляется эффект перехлестывания (наряду с указанным выше, в полосовых системах имеет место эффект перехлестывания положительных и отрицательных участков, при $\omega_{рез} = \pm\alpha$, частотной характеристики). Как следствие, возникают скачки фазо-частотной характеристики, что проявляется в фазовых искажениях сигнала.

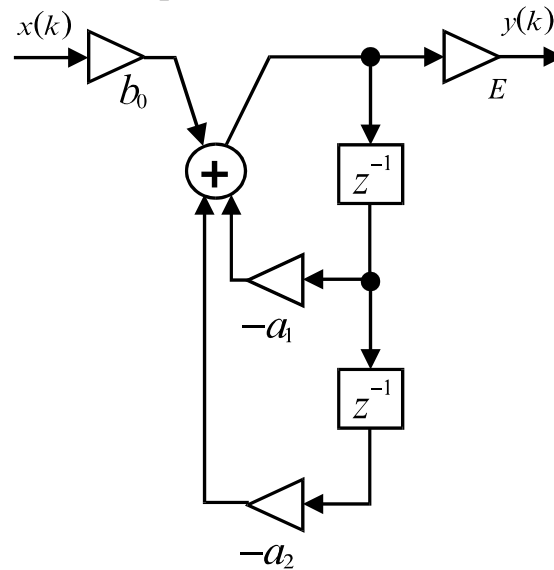


Рис. 10.8

Домашнее задание

Работа выполняется на базе ПЭВМ и необходимо определить исходные параметры и характеристики.

В работе используются три вида дискретных последовательностей (сигналов)

$$S_1(k) = \delta(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases};$$

$$S_2(k) = S_0 + A \cos \frac{2\pi}{N}(k - k_0), \quad k = 0, 1, \dots;$$

$$S_3(k) = S_0 + A \operatorname{sign} \left[\cos \frac{2\pi}{N}(k - k_0) \right], \quad k = 0, 1, \dots,$$

где S_0 – постоянная составляющая, A – амплитуда, N – число отсчетов на период, k_0 – число отсчетов на начальную фазу (эпоху), $\operatorname{sign}(x)$ – функция, определяющая знак числа.

Сигнал $S_1(k)$ является испытательным, по реакции ЛПП-системы на этот сигнал определяют импульсную характеристику. Сигналы $S_2(k)$ и $S_3(k)$ используются как информационные, для анализа различных преобразований, оценки параметров и искажений в ЛПП-системе.

В работе использованы подпрограммы:

- 1) Подпрограмма "Датчик сигнала – ЛПП-система 2-го порядка".

Данная подпрограмма позволяет реализовать генерацию сигналов, ЛПП-систему не выше 2-го порядка и прохождение сигнала через систему. ЛПП-система моделируется по алгоритму $y(k) = b_0x(k) + b_1x(k-1) + b_2x(k-2) - a_1y(k-1) - a_2y(k-2)$, $k = 0, 1, \dots$

с начальными условиями $y(k)=x(k)=0$, $k < 0$.

2) Подпрограмма "Расчет частотной характеристики ЛПП-системы 2-го порядка".

Данная подпрограмма позволяет получить значения амплитудно-частотной (АЧХ) $A_{\Delta}(\omega)$ и фазо-частотной (ФЧХ) $\varphi_{\Delta}(\omega)$ характеристик, $\omega \in [0, 2\pi]$, ЛПП-системы не выше 2-го порядка с заданными значениями параметров b_0, b_1, b_2, a_1, a_2 .

Частотная характеристика системы равна (см. (10.9), $\Delta t=1$)

$$\dot{K}_{\Delta}(\omega) = \frac{b_0 + b_1 e^{-j\omega} + b_2 e^{-j2\omega}}{1 + a_2 e^{-j\omega} + a_1 e^{-j2\omega}} = \frac{A - jC}{B - jD} = A_{\Delta}(\omega) e^{j\varphi_{\Delta}(\omega)}, \text{ где}$$

$$A_{\Delta}(\omega) = \left(\frac{A^2 + C^2}{B^2 + D^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \varphi_{\Delta}(\omega) = -\arctg \frac{C}{A} + \arctg \frac{D}{B},$$

$$A = b_0 + b_1 \cos \omega + b_2 \cos 2\omega, \quad C = b_1 \sin \omega + b_2 \sin 2\omega,$$

$$B = 1 + a_1 \cos \omega + a_2 \cos 2\omega, \quad D = a_1 \sin \omega + a_2 \sin 2\omega.$$

Задание.

Основные исходные данные для различных режимов работы приведены в табл.10.1.

1. Постройте и сопоставьте графики АЧХ реализуемой дифференцирующей схемы (см. рис.10.7(a)) с коэффициентом передачи

$$\dot{K}_{\Delta}(\omega) = 1 - e^{-j\omega}$$

и идеализированной с $\dot{K}_{ид}(\omega) = j\omega$ в диапазоне частот $\omega \in [0, \pi]$. Из сравнения определите область частот удовлетворительного дифференцирования сигналов. Критерием может служить условие 10%-ной погрешности $|\omega - A_{\Delta}(\omega)| \leq 0,1\omega$ или $\omega \leq 1,1A_{\Delta}(\omega)$

Определите значение масштабного множителя E из условия $E \cdot A_{\Delta}(\omega) = 1$ на частоте $\omega = 2\pi / N$, $N=20$. Результат занесите в табл.10.1 (режим "дифференцирование").

Параметры сигналов и системы, помеченные знаком "?", необходимо доопределить.

2. В работе предусмотрены два режима интегрирования (накопления): первый – по формуле (10.16) и второй – по формуле (10.16). Постройте и сопоставьте графики АЧХ реализуемого "интегратора 1" с коэффициентом передачи $\dot{K}_{\Delta}(\omega) = [1 - 0,9e^{-j\omega}]^{-1}$ и идеализированного с $\dot{K}_{ид}(\omega) = 1/j\omega$ в диапазоне частот $\omega \in [0, \pi]$. По графикам определите область частот удовлетворительного интегрирования гармонических сигналов.

Определите значение масштабного множителя E из условия $E \cdot A_{\Delta}(\omega) = 1$ на частоте $\omega = 2\pi / N$, $N=8$. Результат занесите в табл.10.1 (режим "интегратор 1").

Таблица 10.1

Система		Диф. Цепь	Интегратор		Апериодический усилитель				Резонансный усилитель	
Параметры			1	2	1	2	3	4	1	2
b_0		1	1	1	1	1	1	1	1	1
b_1		-1	0	0	?	?	?	?	0	0
b_2		0	0	0	?	?	?	?	0	0
a_1		0	-0,9	-0,999	0	0	0	0	?	?
a_2		0	0	0	-0,1	-0,1	-0,5	-0,1	?	?
E		?	?	1/K+1	1.35	0.81	0.8	0.74	1	1
	N	20	8	-	-	-	-	-	-	-
$S_2(k)$	A	1	1	-	-	-	-	-	-	-
	S_0	0	0	-	-	-	-	-	-	-
	K_0	0	0	-	-	-	-	-	-	-
	N	12	6	6	18	18	18	18	12	12
$S_3(k)$	A	3	2	2	5	5	5	5	5	5
	S_0	3	0	5	0	0	0	0	5	5
	K_0	3	0	0	1	2	3	4	1	2

Системы с обратными связями (в том числе интеграторы, рис.10.7(б)) характеризуются интервалом времени перехода в стационарное состояние.

Для "интегратора 1" оцените время перехода (в виде числа отсчетов $n_{\text{пер}}$ импульсной характеристики), ограничившись 10%-ным уровнем значимости $n_{\text{пер}} : g(n_{\text{пер}}) = 0,1g(0)$.

В соответствии с (10.15) расчетная формула имеет вид $n_{\text{пер}} = \frac{\ln 0,1}{\ln |a_1|}$.

В режиме "интегратор 2" оценивается постоянная составляющая или среднее значение входного сигнала. Полагая $x(k)=S_3(k)$ на выходе в соответствии с (10.16) можно записать

$$y(k) = x_{-p}(k) = S_0 + \frac{Ab_0}{k+1} \sum_{m=0}^k \text{sign} \left[\cos \frac{2\pi}{N}(m - k_0) \right].$$

Для правой части справедлива оценка сверху

$$y(k) = x_{-p}(k) \leq S_0 + \frac{Ab_0}{k+1} \frac{N}{2}.$$

По данным режима "интегратор 2", см.табл.10.1, и приведенной оценке определите минимально необходимое время $K_{\text{пер}}$, достижения среднего значения $y(k_{\text{пер}}) \approx S_0$ с 10%-ной точностью.

3. Апериодический усилитель с импульсной характеристикой (10.18) допускает различные варианты параметров. В работе исследуются четыре варианта, которые задаются соотношениями между параметрами в соответствии с табл.10.2.

Таблица 10.2

Вариант	1	2	3	4
Параметры				
$b_1 / \sqrt{ a_2 }$	-1	1	0	1
$b_0 + b_2 a_2 $	1	-1	1	0

По данным значениям b_0 и a_2 из табл.10.1 определите значения параметров b_1 и b_2 для указанных вариантов и результаты занесите в табл.10.1. Постройте графики импульсных характеристик.

По графикам и расчетным путям оцените длительность переходного режима. Число отсчетов и импульсной характеристики для переходного режима равно $b_1 / \sqrt{|a_2|}$. Здесь использовано определение (10.19).

4. Параметры a_1 и a_2 в режиме резонансного усилителя задают резонансную частоту $\omega_{рез} = \alpha$ и эквивалент добротности ρ , см. (10.21). Требуемую резонансную частоту определите из условия выделения 3-й гармоники меандра $S_3(k)$. Параметр ρ задан значениями $\rho=0,95$ (вариант 1) и $\rho=0,93$ (вариант 2). По данным $\omega_{рез}$ и ρ определите параметры a_1 и a_2 (используя систему уравнений (10.21)) и результаты занесите в табл.10.1.

Порядок выполнения работы

1. В работе производится исследование цифровых фильтров представляющих собой дифференциатор, интегратор, апериодический усилитель и резонансный усилитель. Количество отсчетов, амплитуда, смещение задавать исходя из таблицы 10.3.

Таблица 10.3

Количество отсчетов (N)	$m+n+10$
Амплитуда (A)	$m/2+0,1$
Смещение по $Y(S0)$	$n-4$
Запаздывание ($K0$)	$m-4$

В основном меню лабораторной работы с помощью стрелок $\uparrow\downarrow$ выберите пункт «Изменение параметров последовательностей» и установите значения для своего варианта согласно своему варианту. Изменение значения текущего элемента осуществляется с помощью стрелок $\uparrow\downarrow$, переход к нижнему элементу осуществляется с помощью клавиши «TAB», а к верхнему комбинацией клавиш «Shift TAB». Сначала задайте свой вариант (1-4) затем введите остальные значения в соответствии с таблицей 1. По окончании выбора значений нажмите «Enter». Для отмены сделанных изменений нажмите «Esc» и будут возвращены предыдущие значения: n – последняя цифра студенческого билета; m – предпоследняя цифра студенческого билета.

2. Используя основное меню выполнить пункты согласно варианту по нижеприведённой таблице 10.4

Выбрав в меню соответствующий своему варианту пункт нажмите «Enter», вам будет предложено выбрать вариант последовательности и просмотреть схему, нажмите «Enter» чтобы зарисовать согласно

Таблица 10.4

вариант	1	2	3	4
1 пункт	Дифференциатор	Дифференциатор	Дифференциатор	Дифференциатор
2 пункт	Интегратор 1	Интегратор 2	Интегратор 1	Интегратор 2
3 пункт	АУ 1	АУ 2	АУ 3	АУ 4
4 пункт	Рез. У 1	Рез. У 2	Рез. У 1	Рез. У 2

вариантам схемы дифференциатора, интегратора, АУ и РУ. Нажмите «Enter» чтобы выйти к выбору последовательностей, затем нажав цифру соответствующую своему варианту зарисуйте сигнальные последовательности на входе и выходе устройства. Нажмите «Enter» и

зарисуйте АЧХ и ФЧХ устройства. Прделайте это для всех пунктов своего варианта.

Для каждого пункта сделать соответствующие выводы.

Содержание отчета

Отчет по работе должен включать расчетную и экспериментальную части по всем режимам работы ЛПП-системы:

- конкретную схему в соответствующем режиме;
- параметры системы, заданные, расчетные и полученные в результате эксперимента;
- импульсную и частотную (АЧХ, ФЧХ) характеристики системы;
- диаграммы преобразований (прохождения) сигналов;
- выводы по характеру и качеству преобразований.

Контрольные вопросы

1. Назовите характерные свойства рекурсивных и нерекурсивных фильтров. К каким классам относятся рассмотренные фильтры.
2. Дайте общую характеристику ЛПП-системы 2-го порядка. Составьте рекуррентное уравнение для системы. Приведите возможные варианты схемной реализации.
3. Как построить цифровой фильтр по аналоговому прототипу, заданному дифференциальным уравнением?
4. Как построить цифровой фильтр по аналоговому прототипу, заданному импульсной переходной характеристикой?
5. Как построить цифровой фильтр по аналоговому ФНЧ, заданному своим комплексным коэффициентом передачи?
6. Каким образом определяется устойчивость ЛПП-системы; от значений каких параметров (a_i и b_i) системы зависит устойчивость? Укажите условия, при которых нарушится устойчивость рассмотренных схем.

7. На примере резонансного усилителя покажите, что причиной возникновения полосы пропускания является нескомпенсированность полюсов.
8. Покажите, что в условиях $4a_2 > a_1^2$ полюса ЛПП-системы 2-го порядка являются комплексными и сопряженными.
9. Покажите, что для параметров ЛПП-системы 2-го порядка справедливо равенства ($n \geq 2$): $A_1 - A_2 = \frac{1}{a_2}(a_1 b_2 - a_2 b_1)$.
10. Покажите, что отсчеты значений импульсной характеристики $g(k) = C_k$ произвольной системы являются коэффициентами ряда Фурье по экспоненциальному базису при разложении $\dot{K}_g(\omega)$.
11. Покажите форму АЧХ режекторного гребенчатого фильтра (аналитическое выражение и график) для $N=12$. Что можно ожидать на выходе фильтра $y(k)$, если на входе $x(k) = S_3(k)$ с параметром $N=12$?
12. То же самое для полосового гребенчатого фильтра.
13. Как изменятся частотно-временные свойства "интегратора" с импульсной характеристикой (10.15) при положительных значениях параметра $a_1 \in (1, 0)$?
14. Запишите общее выражение для коэффициента передачи ЛПП-системы 2-го порядка на нулевой частоте $\dot{K}_\Delta(0) = ?$ При каких условиях $\dot{K}_\Delta(0) = 0$? Что физически означает это равенство?
15. На основе анализа импульсной и частотной характеристик апериодического усилителя (по всем вариантам) покажите, каким образом можно корректировать свойства ЛПП-системы в низкочастотной и высокочастотной областях? В чем проявляется коррекция частотных свойств при прохождении сигналов вида прямоугольных импульсов?
16. Покажите, что АЧХ и ФЧХ ЛПП-системы достаточно рассчитать на половине шкалы частот $\omega \in [0, \pi]$. Каким образом по этим данным можно представить частотную характеристику на всей шкале $\omega \in [-\pi, \pi]$ или $\omega \in [0; 2\pi]$.
17. В данном руководстве принято безразмерное $\Delta t = 1$ и, соответственно, диапазон частот задан в границах $\omega \in [-\pi, \pi]$ или $f \in [-0,5; 0,5]$ (где f – безразмерная частота $f = \omega / 2\pi$). Если Δt является размерным и равным $\Delta t = 1\text{с}, 1\text{мс}, 1\text{мкс}$, то в каких пределах, соответственно, задается шкала частот f ?
18. Чем обусловлены фазовые искажения сигналов в ЛПП-системах?
19. Покажите области значений параметров a_1 и a_2 на рис.10.6(a), соответствующие "резонансным" частотам $\omega_{\text{рез}} = 0; \omega_{\text{рез}} = \pi/2, \omega_{\text{рез}} = \pi$.
20. На примере сигнала $S_3(k)$ с заданным N сформулируйте требования к АЧХ и ФЧХ системы для неискаженной его передаче. О каких искажениях идет речь в случае линейной ФЧХ в полосе частот сигнала? Покажите на примерах, исследованных в работе.

21. В системах обработки важную роль играет так называемый согласованный фильтр. Для заданного сигнала $S(n)$, $n=0,1,\dots,N-1$ импульсная характеристика согласованного фильтра равна $g(k)=S(N-1-k)$, $k=0,1,\dots,N-1$. В данном случае импульсная характеристика имеет конечную протяженность (для конечного N) и синтезировать фильтр можно в виде нерекурсивного (КИХ) фильтра. Изобразите схему согласованного фильтра для сигнала $S(n)=n$, $n=0,1,\dots,4$, определите параметры фильтра. Составьте рекуррентное уравнение фильтра, определите импульсную характеристику фильтра и реакцию на сигнал.

Литература

1. Гоноровский И.О. Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: Радио и связь, 1986.– 512с.
2. Гольденберг Л.М. и др. Цифровая обработка сигналов: Справочник. – М.: Радио и связь, 1986. – 312с.
3. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. – М.: Мир, 1978. – 846.
4. Введение в цифровую фильтрацию/Под ред. Богнера Р. и Константидиса А. – М.: Мир, 1976. – 216 с.
5. Дьяконов В.П. Справочник по алгоритмам и программам на языке Бейсик для персональных ЭВМ. М.: Наука, 1987. – 240с.
6. Ахмед Н., Рао К.Р. Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов. – М.: Связь, 1980г.
7. Макклеллан Д.Х., Рейдер Ч.М. Применение теории чисел в цифровой обработке сигналов. – М.: Радио и связь, 1983 – 246с.
8. Сиберт У.М. Цепи, сигналы, системы. 4.1. – М.: Мир, 1988. –336 с.
9. Сиберт У.М. Цепи, сигналы, системы, ч.2. – М.: Мир, 1988 . – 358 с.
10. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и z -преобразования. – М.: Наука, 1971. – 288 с.

Согласованный фильтр

Цель работы: изучение основных свойств согласованного фильтра и его применения при оптимальном приеме дискретных сообщений.

Краткие теоретические сведения

Одной из основных операций, выполняемых в устройствах приема дискретных сообщений, оценивания параметров сигналов и т.п. над принимаемой смесью полезного сигнала с шумом $z(t)$, является вычисление величины (скалярного произведения)

$$c = \int_0^T s(t)z(t)dt, \quad (11.1)$$

где $s(t)$ – некоторый опорный сигнал, T – интервал обработки.

Для этого часто используют специальные блоки – корреляторы, осуществляющие перемножение и интегрирование сигналов в аналоговой или цифровой форме. Однако эти же функции может выполнять и пассивная электрическая цепь.

Действительно, выражение (11.1) по форме сходно с известной формулой для реакции линейной цепи на тот же сигнал $z(t)$,

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau)z(\tau)d\tau, \quad (11.2)$$

где $g(t)$ – импульсная характеристика цепи.

Сравнивая (11.1) и (11.2), видим, что они совпадают при условии, что выбрана цепь с импульсной характеристикой

$$g(t-\tau) = s(t) \quad (11.3)$$

и $t=T$.

Электрическую цепь, импульсная характеристика которой удовлетворяет условию (11.3), т.е. зеркальна по отношению к сигналу $s(t)$, или, в более общем случае,

$$g(t_0-t) = as(t), \text{ или } g(t) = as(t_0-t) \quad (11.4)$$

называют фильтром, согласованным с этим сигналом (рис.11.1).

Величины t_0 и a могут быть произвольными, но согласованный фильтр (СФ) физически реализуем только при условии $t_0 \geq T$. Иначе часть $g(t)$ попадает в область $t < 0$, т.е. реакция предшествует воздействию, что физически невозможно.

Для любого сигнала можно построить СФ на основе линии задержки с отводами.

Свойства СФ

1. Частотная характеристика.

Передаточная функция СФ

$$K(j\omega) = aS^*(j\omega)e^{-j\omega t_0}, \quad (11.5)$$

где $S(j\omega)$ – спектральная плотность по Фурье сигнала $s(t)$, с которым фильтр согласован, * – знак комплексного сопряжения.

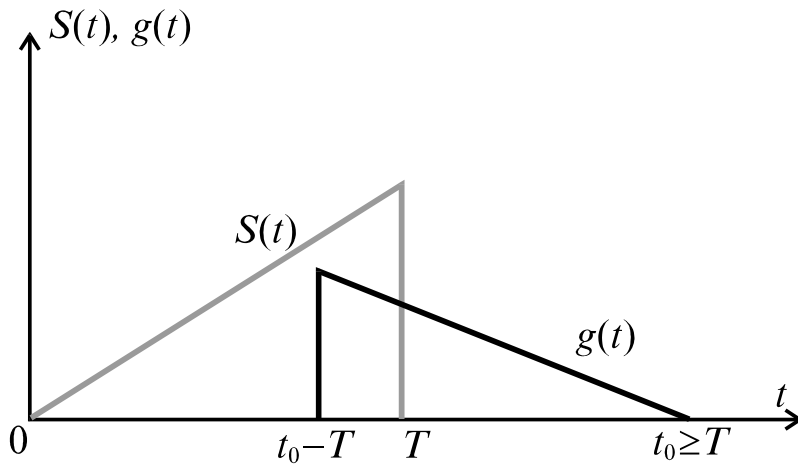


Рис.11.1. Сигнал $s(t)$ длительностью T и ИХ соответствующего согласованного фильтра

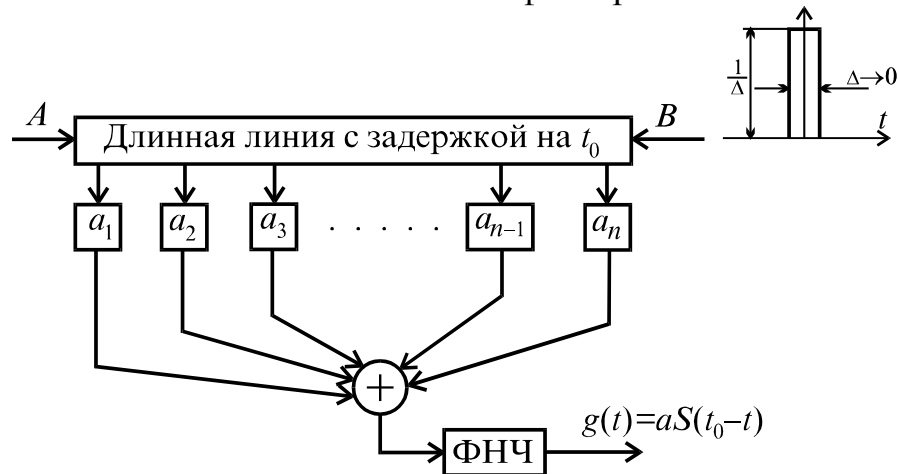


Рис.11.2. Реализация согласованного фильтра на основе длинной линии с задержкой сигнала на t_0 .

При $a=1$ АЧХ СФ совпадает с амплитудным спектром сигнала $s(t)$, а ФЧХ обратна по знаку его фазовому спектру и сдвинута на ωt_0 :

$$K(\omega) = aS(\omega); \quad \varphi_k(\omega) = -\varphi_s(\omega) - \omega t_0. \quad (11.6)$$

2. Реакция СФ на сигнал, с которым он согласован.

Пусть $z(t)=s(t)$, тогда реакция

$$y_s(t) = a \int_0^t s(t_0 - t + \tau)s(\tau)d\tau = aB_s(t_0 - t), \quad (11.7)$$

т.е. совпадает (при $a=1$) с временной корреляционной функцией сигнала $s(t)$.

Здесь

$$B_s(\tau) = \int_0^T s(t - \tau)s(t)dt. \quad (11.8)$$

Длительность реакции, как ясно из (11.7), вдвое больше длительности входного сигнала.

3. Реакция СФ на белый шум.

Пусть $z(t)=n(t)$, где $n(t)$ – белый шум со спектральной плотностью $N_0/2$.

Тогда реакция согласованного фильтра $y_n(t)$ представляет собой случайный процесс с корреляционной функцией

$$B_{y_n}(\tau) = a \frac{N_0}{2} y_s(\tau + t_0), \quad (11.9)$$

которая совпадает по форме с реакцией СФ $y_s(t)$ на сигнал $s(t)$, с которым он согласован. Из (11.7) следует также, что она совпадает по форме с временной корреляционной функцией этого сигнала (11.8),

$$B_{y_n}(\tau) = a^2 \frac{N_0}{2} B_s(\tau). \quad (11.10)$$

4. Реакция СФ на смесь сигнала и шума.

При воздействии на вход СФ смеси

$$z(t) = s(t) + n(t) \quad (11.11)$$

на выходе по принципу суперпозиции

$$y(t) = y_s(t) + y_n(t). \quad (11.12)$$

Пиковая мощность сигнала и средняя мощность шума на выходе равны соответственно

$$P_{с\text{ Вых}} = a^2 E_s^2, \quad P_{ш\text{ Вых}} = B_{y_n}(0) = a^2 \frac{N_0}{2} E_s. \quad (11.13)$$

Отношение сигнал/шум на выходе

$$\frac{P_{с\text{ Вых}}}{P_{ш\text{ Вых}}} = \frac{2E_s}{N_0} = 2h^2. \quad (11.14)$$

У СФ эта величина больше, чем у любого другого фильтра, т.е. СФ обеспечивает на выходе максимум отношения пиковой мощности сигнала к средней мощности шума.

На входе сигнал и шум имеют мощности

$$P_{с\text{ Вх}} = E_s / T; \quad P_{ш\text{ Вх}} = N_0 F. \quad (11.15)$$

Таким образом СФ обеспечивает выигрыш в отношении сигнал/шум

$$\frac{P_{с\text{ Вых}} / P_{ш\text{ Вых}}}{P_{с\text{ Вх}} / P_{ш\text{ Вх}}} = 2FT = B, \quad (11.16)$$

т.е. равный базе сигнала.

Доказательство перечисленных свойств можно найти в учебниках (см. список литературы).

5. Применение СФ при приеме сообщений.

Возможность выполнения с помощью СФ корреляционных операций вида (11.1) и отмеченная выше (свойство 4) особенность его реакции на сигнал в смеси с шумом позволяют использовать СФ при оптимальном приеме дискретных сообщений, обнаружении и различении сигналов на фоне шума, оценивании их параметров.

Алгоритм оптимального (по правилу максимального правдоподобия) когерентного приема m -позиционных сигналов $s_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) на фоне белого гауссовского шума реализуется с помощью m согласованных с этими сигналами фильтров. Смесь принимаемого сигнала с шумом

$$z(t) = s_i(t) + n(t) \quad (11.17)$$

одновременно поступает на m фильтров, отсчеты их реакций в момент $t=T$

$$y_i(T) = \int_0^T z(t)s_i(t)dt \quad (11.18)$$

сравниваются между собой. Принятым считается тот сигнал, согласованный с которым фильтр дает

$$\max_i \left[y_i(T) - \frac{E_i}{2} \right] \quad (11.19)$$

где E_i – энергия сигналов $s_i(t)$.

Если принимаются сигналы с одинаковыми энергиями, достаточно сравнить величины $y_i(t)$. При этом в силу свойства 4 из всех фильтров у того, который согласован с принятым сигналом, наблюдается наибольший отклик (в момент $t=T$) и наибольшее отношение сигнал/шум на выходе.

Для оценивания амплитуды A сигнала известной формы $u(t)$ на фоне белого гауссовского шума $n(t)$ используется фильтр, согласованный с этим сигналом. На вход его подается смесь

$$z(t) = Au(t) + n(t) \quad (11.20)$$

и в момент $t=T$ определяется отсчет реакции фильтра

$$y(T) = \int_0^T z(t)u(t)dt. \quad (11.21)$$

Искомая оценка \hat{A} параметра A определяется по формуле

$$\hat{A} = y(T) / E. \quad (11.22)$$

Аналогично СФ используется при некогерентном приеме, обнаружении сигналов и т.п.

Домашнее задание

1. Из приведенной ниже таблицы вариантов в соответствии с номером бригады выбрать и изобразить временную диаграмму сигнала $s(t)$. Изобразить импульсную характеристику фильтра, согласованного с этим сигналом.

2. Рассчитать отношение сигнал/шум на выходе этого фильтра, если на вход его подан сигнал, с которым фильтр согласован, длительностью T (мс) и амплитудой $U=1$ мВ, в смеси с шумом со спектральной плотностью N_0 (мкВ/Гц), где T , N_0 – предпоследняя и последняя цифры студенческого билета.

3. Рассчитать выигрыш СФ в отношении сигнал/шум по данным п.2, если полоса частот сигнала $F=1/\tau$, где τ – минимальная длительность единичного элемента сигнала (импульса).

Порядок выполнения работы

Лабораторная работа представляет собой интерактивную систему с возможностью выбора пунктов работы через верхнее выпадающее меню. F10 – вход в меню, стрелками $\Leftarrow \Rightarrow$ переведите курсор на пункт «работа», нажав «Enter» в выпадающем меню выберите свой вариант, либо сделайте это с помощью комбинации клавиш Alt+V.

Через меню выбрав пункт подменю вы можете задавать дисперсию шума и число испытаний. Это можно сделать также с помощью клавиш Alt+D и Alt+N.

1. Для начала демонстрации работы согласованного нажмите клавишу F7. После просмотра зарисуйте сигналы на входе и выходе фильтра, а также схему цифрового согласованного фильтра.
2. Задавая значения шума 0; 0,5; 2,0 при помощи подменю перейдите к фильтрации сигнала при шумах (можно с помощью клавиши F8). Зарисуйте сигналы на входе и выходе для сигнала согласованного с фильтром и несогласованного. Сделайте вывод о том как выглядит реакция СФ на сигнал согласованный с ним.
3. Ввести количество испытаний (задаётся преподавателем). Произведите статические испытания (с помощью клавиши F9) для разных G_n в соответствии с таблицей 11.1:

Таблица 11.1.

G_n	0	0,1	0,2	0,4	0,8	1,6	3,2
Средняя мощность шума на выходе							
Отношение с/ш на выходе							
Выигрыш в отношении с/ш							

Занести таблицу 11.1 в отчёт и заполнить. Построить зависимости этих трёх величин от G_n .

4. Задать $G_n=0$. Нажмите Alt+F9 для выполнения пункта приёма сигналов. Заданы 4 фильтра с их импульсной характеристикой (изображены слева) а также их реакции на выходе этих фильтров. Перерисуйте все 8 графиков в отчёт. В данном пункте рассмотрен случай когда на все фильтры подаётся сигнал, согласованный с одним из этих фильтров. По реакции на выходе каждого фильтра определить с каким из фильтров этот сигнал согласован. Записать номер фильтра с которым согласован сигнал и сделать соответствующие выводы.

Содержание отчета

В отчете должны быть отражены результаты выполнения всей работы, включая в контрольную часть: наблюдаемые на дисплее диаграммы сигналов и импульсных характеристик, их числовые характеристики и результаты расчетов (там, где они требуются). Каждый пункт отчета должен завершаться выводами, извлеченными из его выполнения.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте определение согласованного с сигналом фильтра. Ответ проиллюстрируйте временными диаграммами.
2. Запишите выражения АЧХ и ФЧХ согласованного фильтра (СФ).
3. Каково условие физической реализуемости СФ, в чем его смысл?
4. В чем особенность реакции СФ на сигнал, с которым он согласован, по сравнению с реакциями на все другие сигналы? Какова длительность этой реакции?
5. Перечислите основные свойства СФ.

6. На СФ поступает сигнал, с которым он согласован, в смеси с шумом. Как рассчитывается отношение сигнал/шум на выходе СФ?
7. Чем определяется выигрыш СФ в отношении сигнал/шум в условиях предыдущего вопроса?
8. По какому критерию оптимален СФ?
9. Каково основное применение СФ в технике связи?
10. Какие другие элементы системы связи заменяет СФ?
11. Изобразите схему оптимального приемника дискретных сообщений с использованием СФ.
12. Как используется СФ при приеме сигналов в каналах с неопределенной фазой?
13. На вход СФ поступает белый шум. Какой вид имеет корреляционная функция случайного процесса на выходе СФ?

Литература

1. Теория передачи сигналов / Зюко А.Г. и др. – М.: Радио и связь, 1986, стр.174–180, 190.
2. Теория передачи сигналов / Зюко А.Г. и др. – М.: Радио и связь, 1980, стр.131–138, 149.
3. Кловский Д.Д. Теория передачи сигналов. – М.: Связь, 1973, стр.246–253, 317–321.

Фильтр Колмогорова-Винера

Цель работы: ознакомление с алгоритмом оптимальной фильтрации непрерывных сигналов по Колмогорову-Винеру и расчета среднего квадрата ошибки.

Основы теории оптимальной фильтрации по Колмогорову-Винеру

Задача выделения полезного сигнала на фоне помех является одной из важнейших в технике связи радиолокации, радионавигации, радиотелеметрии, радиоуправления и других областях радиотехники. Если спектры сигнала и помехи не перекрываются, для их разделения достаточно простого полосового фильтра. Таким образом осуществляется селективная настройка на желаемую станцию на фоне других станций при радиоприеме, разделение каналов в многоканальных системах связи с частотным разделением и т.п.

Если же спектр помехи попадает в полосу частот спектра полезного сигнала, что особенно часто имеет место при действии широкополосных помех, полностью подавить помеху посредством частотной селекции невозможно. Однако можно поставить задачу синтеза такого фильтра, который в наибольшей степени подавлял бы помеху и в наименьшей степени искажал бы сигнал.

Здесь мы будем искать такой фильтр в классе линейных стационарных систем (можно показать, что при гауссовской помехе именно такой фильтр является оптимальным).

Пусть на входе фильтра действует смесь случайного сигнала $S(t)$ и помехи $N(t)$

$$Z(t) = S(t) + N(t). \quad (12.1)$$

Отклик линейного стационарного фильтра с импульсной характеристикой $g(t)$ на такое воздействие:

$$\hat{S}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Z(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} [S(\tau) + N(\tau)]g(t-\tau)d\tau. \quad (12.2)$$

Найдем фильтр, обеспечивающий минимум среднего квадрата ошибки (СКО)

$$\min \overline{E^2} = \min \left(\hat{S}(t) - S(t+t_0) \right)^2, \quad (12.3)$$

где $\hat{S}(t)$ – непрерывный стационарный случайный процесс с реализациями (12.2); $S(t)$ – случайный стационарный сигнал на входе фильтра со спектральной лотностью мощности $G_s(f)$; $Z(t) = S(t) + N(t)$ – случайный процесс на входе фильтра с реализацией $z(t)$; $N(t)$ – случайная стационарная помеха на входе фильтра со спектральной плотностью мощности $G_N(f)$.

При $t_0=0$ говорят о чистой фильтрации, при $t_0<0$ – говорят о фильтрации с задержкой, при $t_0>0$ – о фильтрации с предсказанием.

Пусть линейному стационарному фильтру с импульсной характеристикой $g(t)$ соответствует передаточная функция

$$\dot{K}(f) = K(f)e^{j\varphi(f)}$$

и пусть случайные процессы $S(f)$ и $N(f)$ независимы.

Тогда спектральная плотность мощности процесса $E(t)$ равна:

$$G_E(f) = G_N(f)K^2(f) + G_S(f)[\dot{K}(f) - e^{-jt}]^2 = G_N(f)K^2(f) + G_S(f)[1 + \dot{K}(f) - 2K(f)\cos(\varphi(f) - \omega t_0)], \quad (12.4)$$

$$a \quad \overline{E^2} = \int_{-\infty}^{\infty} G_E(f)df. \quad (12.5)$$

Минимум (12.5) для всех частот достигается, если ФЧХ фильтра

$$\varphi_{\text{опт}}(f) = \omega t_0 \quad (12.6)$$

$$\text{при этом} \quad G_E(f) = G_N(f)K^2(f) + G_S(f)(1 + \dot{K}(f))^2. \quad (12.7)$$

Взяв производную от (12.8) по $K(f)$ и приравнявая ее нулю получаем (легко показать, что при этом обеспечивается минимум (12.8)) для АЧХ оптимального фильтра

$$K_{\text{опт}}(f) = \frac{G_S(f)}{G_S(f) + G_N(f)}. \quad (12.8)$$

С учетом (12.6) и (12.8) получаем передаточную функцию фильтра, называемого фильтром

$$K_{\text{опт}}(f) = \frac{G_S(f)}{G_S(f) + G_N(f)} e^{j\omega t_0}. \quad (12.9)$$

При достаточно большой задержке t можно обеспечить реализуемость фильтра Колмогорова-Винера. Обобщение рассмотренного подхода применительно к нестационарным случайным процессам существенно усложняется.

При выполнении условия (12.8) получаем для спектральной плотности мощности СКО

$$G_E(f)_{\text{min}} = \frac{G_S(f)G_N(f)}{G_S(f) + G_N(f)} \quad (12.10)$$

и для среднего квадрата ошибки

$$\overline{E^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_S(f)G_N(f)}{G_S(f) + G_N(f)} df. \quad (12.11)$$

Домашнее задание

1. Для сигнала, выбранного из приведенной ниже таблицы вариантов в соответствии с номером бригады по списку, изобразите временную диаграмму сигнала. Найдите спектр по Фурье сигнала и его спектральную плотность мощности (СПМ). Нарисуйте зависимость СПМ от частоты.

В качестве модели помехи выберите БГШ со спектральной плотностью

$$N_0 = (Q+1) \cdot 10^{-7} \text{ Вт/Гц}, \text{ где } Q - \text{ последняя цифра номера студенческого билета.}$$

2. Смесь заданных выше сигнала и шума проходит через полосовой фильтр. Рассчитать эффективную ширину спектра сигнала $F_{\text{Э}}$, средние мощности сигнала и шума на входе и выходе фильтра и соответствующие отношения сигнал/шум, если полоса пропускания фильтра $F = F_{\text{Э}}/2$.

3. Для фильтра Колмогорова-Винера, осуществляющего выделение полезного сигнала из указанной выше смеси, записать выражение передаточной функции, рассчитать энергетический спектр и отношение сигнал/шум на выходе.

Порядок выполнения работы

В данной лабораторной работе исследуется оптимальный фильтр Колмогорова-Винера. Для вызова странички помощи воспользуйтесь клавишей F1.

Таблица вариантов

№ вар.	Интервал представления сигнала	Аналитическое выражение	Значения параметров
1	$2 \leq t \leq 7$	$\sin \omega t$	$\omega = 2,5 \text{ с}^{-1}$
2	$2 \leq t \leq 7$	$at - t_0$	$a = 0,25 \text{ В}; t_0 = 0,5 \text{ с}$
3	$2 \leq t \leq 7$	$1 + \cos(\omega t + \varphi_0)$	$\omega = 1,25 \text{ с}^{-1}; \varphi_0 = 0,7$
4	$1 \leq t \leq 6$	$[U_0 + \Delta U \cos(\Omega t - \alpha)](\cos(\omega t - \varphi))$	$U_0 = 0,6 \text{ В}; \Delta U = 0,4 \text{ В}$ $\Omega = 2,5 \text{ с}^{-1}; \alpha = 2,5$ $\omega = 10 \text{ с}^{-1}; \varphi = 10$
5	$1,85 \leq t \leq 6,35$	$U \cos[\omega_0 t + k(t - t_0)^2]$	$U = 0,95 \text{ В}; \omega_0 = 2,5 \text{ с}^{-1}$ $k = 30 \text{ с}^{-1}; t_0 = 1,85 \text{ с}$
6	$2,5 \leq t \leq 6,5$	U_0	$U_0 = 1 \text{ В}$

1. Выбор вида сигнала осуществляется в соответствии с номером бригады по списку группы.

Нажмите цифровую клавишу своего варианта. На экране появляется временная диаграмма выбранного сигнала. Ее надо сравнить с той, что построена в домашнем задании и подтвердить совпадение.

Зарисуйте сигнал без шума и с шумом для своего G_n согласно вариантам: 1) $G_n = 0,01$, 2) $G_n = 0,02$, 3) $G_n = 0,04$, 4) $G_n = 0,08$. Для этого с помощью клавиш 0 и 9 установите своё значение G_n и зарисуйте сигнал.

2. Для оценивания амплитуды нажмите цифру «1».

Оценивание амплитуды сигнала производится для всех возможных реализаций шума. Занесите в отчёт мат. ожидание и средний квадрат ошибки (СКО) для каждого G_n . Для этого задавайте по очереди все возможные G_n с помощью клавиш 0 и 9 и нажмите «1» для вывода значений мат. ожидания и СКО. По результатам работы построить график СКО от G_n .

3. Полосовая фильтрация сигнала на фоне шума.

Задать K_f с помощью клавиш 7 и 6 в соответствии с вариантом 1) $K_f = 0,8$ 2) $K_f = 1,0$ 3) $K_f = 2,0$ 4) $K_f = 4,0$. Задайте коэффициент шума G_n согласно своему варианту 1) $G_n = 0,01$, 2) $G_n = 0,02$, 3) $G_n = 0,04$, 4) $G_n = 0,08$. Нажмите «2» для полосовой фильтрации. Зарисуйте сигнал на выходе фильтра для двух вариантов: без шума и с шумом, зарисуйте временную зависимость квадрата ошибки при полосовой фильтрации. Нажмите «Enter» и зарисуйте спектр исходного сигнала, передаточную функцию ПФ, спектр сигнала после ПФ.

Нажмите «Enter» чтобы вернуться в режим изменения параметров. Задавая по порядку все возможные G_n и нажимая «2» запишите ошибку фильтрации, постройте график ошибки фильтрации от G_n .

4. Оптимальная фильтрация сигнала.

Осуществляется аналогично полосовой фильтрации, описанной в п.1, однако здесь вместо постоянного коэффициента передачи $K(j\omega) = 1$ в выбранной полосе $F_{ПФ}$, как это было в п.2, фильтр имеет передаточную функцию вида (12.8), обеспечивающую формирование оптимальной оценки Колмогорова-Винера.

Задать K_f с помощью клавиш 7 и 6 в соответствии с вариантом 1) $K_f = 0,8$ 2) $K_f = 1,0$ 3) $K_f = 2,0$ 4) $K_f = 4,0$. Задайте коэффициент шума G_n согласно своему варианту 1) $G_n = 0,01$, 2) $G_n = 0,02$, 3) $G_n = 0,04$, 4) $G_n = 0,08$. Нажмите «3» для оптимальной фильтрации. Зарисуйте сигнал на выходе фильтра для двух вариантов: без шума и с шумом, зарисуйте временную зависимость квадрата ошибки при полосовой фильтрации. Нажмите «Enter» и зарисуйте спектр исходного сигнала, передаточную функцию оптимального фильтра, спектр сигнала после оптимальной фильтрации. Нажмите «Enter», чтобы вернуться в режим изменения параметров. Задавая все возможные G_n и нажимая «3» запишите ошибку фильтрации и постройте график ошибки фильтрации от G_n .

Сравните результаты оптимальной и полосовой фильтрации, сделайте выводы по результатам работы.

Содержание отчета

1. Выполненное домашнее задание.
2. Временные и спектральные диаграммы сигналов, числовые результаты (в виде таблиц) и построенные по ним графики.
3. Выводы и объяснения результатов по каждому пункту работы в соответствии с указанным выше.

Контрольные вопросы

1. Какой критерий оптимальности используется при фильтрации сигналов на фоне помех? Запишите его аналитическое выражение.
2. В чем разница между полосовой и оптимальной фильтрацией? В каких случаях можно ограничиться полосовой фильтрацией?
3. Сформулируйте задачу оптимальной фильтрации по Колмогорову-Винеру.
4. Какому уравнению должна удовлетворять импульсная характеристика фильтра Колмогорова-Винера? Запишите это уравнение и объясните смысл входящих в него функций.
5. В чем заключается требование физической реализуемости фильтра?
6. Запишите выражение передаточной функции фильтра Колмогорова-Винера. Как обеспечить его физическую реализуемость?
7. Запишите выражение среднеквадратической ошибки фильтра Колмогорова-Винера.

8. Укажите класс случайных процессов (сигналов и помех), для которого линейная фильтрация по Колмогорову-Винеру является оптимальной по критерию минимума СКО.

9. Для какого класса сигналов и помех оптимальный фильтр должен быть нелинейным?

10. Назовите другие известные Вам задачи оптимальной фильтрации сигналов на фоне помех. В чем их особенности?

11. Сравните области применения, преимущества и недостатки фильтров винеровского и калмановского типов.

Литература

1. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Высшая школа, 1988.
2. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы.: Радио и связь, 1986.
3. Теория передачи сигналов / Зюко А.Г. и др. – М.: Радио и связь, 1986, стр.207-212, 229-242.
4. Кловский Д.Д. Теория передачи сигналов. – М.: Связь, 1973, стр.282-286, 313-321.
5. Кловский Д.Д., Шилкин В.А. Теория электрической связи. – М.: Радио и связь, 1990, стр.110-114, 118-123.

Работа № 13 (6)
Фильтр Калмана

Цель работы: ознакомление с методами оптимальной линейной фильтрации сигналов в радиотехнике и исследование дискретного фильтра Калмана-Бьюси на базе ЭВМ.

Краткие теоретические сведения

1. Оптимальная фильтрация на основе уровней состояния и наблюдения

В радиотехнических системах полезные сигналы, несущие информацию, обычно подвергаются воздействию помех. Поэтому в радиотехнике одной из важнейших задач является выделение полезного сигнала из смеси его с шумом. Для этой цели на практике обычно применяется фильтр, характеристики которого выбираются таким образом, чтобы помеха $n(t)$ в нем подавлялась возможно сильнее, а сигнал $s(t)$, напротив, искажался бы в минимальной степени и был бы возможно ближе к переданному. Если спектры сигнала и помехи располагаются в различных областях частот, сигнал легко выделить с помощью несложного полосового фильтра. Значительно сложнее эта задача решается в том случае, когда спектры сигнала и помехи перекрываются, что наиболее характерно для практики. В этом случае выделить сигнал в чистом виде, неискаженным, практически невозможно. Однако, зная статистические характеристики сигнала и помех, можно поставить задачу синтеза фильтра с такими оптимальными характеристиками, при котором результат фильтрации $\hat{s}(t)$ в каком-то смысле наиболее близок сигнал $s(t)$. В качестве критерия

близости обычно используется минимум среднего квадрата дисперсии (при нулевом математическом ожидании (МО)) ошибки (квадратической погрешности) фильтрации

$$\overline{E_s^2(t)} = \overline{[s(t) - \hat{s}(t)]^2} . \quad (13.1)$$

Вопросы оптимальной фильтрации относятся к широкому кругу весьма важных для современной техники связи задач оценивания параметров сигналов $s(t)$ по наблюдениям их реализаций в условиях помех. Таким образом выделяются содержащиеся в сигналах сообщения.

Если сигнал $s(t)$ содержит информацию о случайном сообщении $B(t)$, т.е. $s(t)=s(t, B(t))$ и мы наблюдаем его на вершине шума $N(t)$, то можно ввести в рассмотрение уравнение наблюдения

$$Z(t) = S(t, B(t)) + N(t). \quad (13.2)$$

Располагая реализацией $Z(t)$ и сведениями о СП $B(t)$ и $N(t)$ можно ставить задачу оценивания $B(t)$ с минимальным средним квадратом ошибки

$$\overline{E_B^2} = \overline{(B(t) - \hat{B}(t))^2} . \quad (13.3)$$

Если сигнал

$$S(t, B(t)) = \gamma(t)B(t), \quad (13.4)$$

где $\gamma(t)$ – известная функция времени, то алгоритм оптимальной фильтрации по критерию (13.1) и (13.4) совпадают. Именно эту ситуацию и будем предполагать в дальнейшем. Случайное сообщение $B(t)$, сигнал $S(t)$, помеха $\xi(t)$.

Канал передачи можно описать методом переменных состояния (т.е. через набор минимального числа и скалярных переменных состояния (X_1, X_2, \dots, X_n) или одной конкретной переменной $\mathbf{X}^T = (X_1, X_2, \dots, X_n)$) как отклик порождающей системы (фильтра) на входное векторное случайное воздействие $\mathbf{W}(t)$ в виде БГШ с нулевым

$$\text{МО и ФК: } M[\mathbf{W}(t)\mathbf{W}^T(\tau)] = \frac{N_{0,1}}{2} \delta(t-\tau)\mathbf{I}.$$

Уравнение состояния и наблюдения при линейной порождающей системы (только такую здесь будем рассматривать) можно написать

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{\Gamma}(t)\mathbf{W}(t), \quad (13.5)$$

$$\mathbf{Z}(t) = \mathbf{H}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{N}(t), \quad (13.6)$$

где

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ \vdots \\ X_n(t) \end{bmatrix} \text{ — } n\text{-мерный вектор состояния;}$$

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix}, \mathbf{Z}(t) = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}, \mathbf{W} = \begin{bmatrix} W_1(t) \\ \vdots \\ W_n(t) \end{bmatrix} \text{ — порождающий процесс (если его размерность}$$

$m < n$, то можно задавать $n-m$ нулевых компонент для выравнивания размерности);

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{bmatrix}, \mathbf{N}(t) = \begin{bmatrix} N_1(t) \\ \vdots \\ N_n(t) \end{bmatrix} \text{ — шум наблюдения в виде БГШ с нулевым МО и}$$

$$\text{ФК: } M[\mathbf{N}(t)\mathbf{N}^T(\tau)] = \frac{N_0}{2} \delta(t-\tau)\mathbf{I}, \text{ где } \mathbf{\Phi}(t), \mathbf{\Gamma}(t), \mathbf{H}(t) \text{ — матрицы размерности } n \times n.$$

Поскольку матрицы $\mathbf{\Phi}(t)$, $\mathbf{\Gamma}(t)$, $\mathbf{H}(t)$ не зависят от $\mathbf{X}(t)$, то $\mathbf{X}(t)$, а также $\mathbf{Z}(t)$ представляют собой случайные гауссовские процессы, в общем случае нестационарные.

Алгоритм Калмана-Бьюси оптимальной фильтрации $\mathbf{X}(t)$ по минимуму среднего квадрата ошибки $M[(\mathbf{X}_n - \hat{\mathbf{X}}(t))(\mathbf{X}(t) - \hat{\mathbf{X}}(t))^T] = \mathbf{V}(t)$ можно написать

$$\dot{\hat{\mathbf{X}}}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\hat{\mathbf{X}}(t) + \frac{\mathbf{V}(t)\mathbf{H}(t)^T}{\frac{N_0}{2}} [\mathbf{Z}(t) - \mathbf{H}(t)\hat{\mathbf{X}}(t)], \hat{\mathbf{X}}(t_0) = \hat{\mathbf{X}}_0. \quad (13.7)$$

$$\dot{\mathbf{V}}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{V}(t) + \mathbf{V}(t)\mathbf{\Phi}(t)^T + \frac{N_0}{2}\mathbf{\Gamma}(t)\mathbf{\Gamma}(t)^T - \frac{\mathbf{V}(t)}{\frac{N_0}{2}}\mathbf{H}(t)^T\mathbf{H}(t)\mathbf{V}(t). \quad (13.8)$$

Уравнение (13.8) определяет нелинейное уравнение Рикота для матрицы $\mathbf{V}(t)$, которое определяет качество оценки.

Ограничимся в дальнейшем рассмотрением стационарного случая, когда матрицы $\mathbf{\Phi}$, $\mathbf{\Gamma}$, \mathbf{H} не зависят от времени (порождающий фильтр линейный и стационарный).

В качестве примера порождающего фильтра рассмотрим последовательный колебательный контур (рис.13.1) динамической системы 2-го порядка.

Дифференциальное уравнение относительно напряжения $U_c(t)$ имеет вид:

$$\frac{d^2U_c}{dt^2} + 2\alpha\frac{dU_c}{dt} + \omega_0^2U_c = \omega_0^2W(t), \quad U_c(0) = \alpha, \quad U_c'(0) = \beta, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad 2\alpha = \frac{R}{L}.$$

Введем переменные состояния: $X_1(t) = U_c(t)$, $\frac{dX(t)}{dt} = X_2(t) = U_c'(t)$. Тогда уравнения

состояния и наблюдения запишем так:

$$\dot{X}(t) = \mathbf{\Phi}X(t) + \mathbf{\Gamma}W(t), \quad X(t_0) = X_0. \quad (13.9)$$

$$Z(t) = \mathbf{H}X(t) + N(t). \quad (13.10)$$

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\alpha \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_0^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z}(t) = \begin{bmatrix} z(t) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}(t) = \begin{bmatrix} n(t) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 \\ w(t) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{V}(t) = \begin{bmatrix} V_{11}(t) & V_{12}(t) \\ V_{21}(t) & V_{22}(t) \end{bmatrix}.$$

Уравнение оптимальной фильтрации запишем в виде:

$$\begin{bmatrix} \frac{d\hat{X}_1(t)}{dt} \\ \frac{d\hat{X}_2(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{X}_2 \\ -\omega_0^2\hat{X}_2 - 2\alpha\hat{X}_2 \end{bmatrix} + \frac{2\gamma}{N_0} \begin{bmatrix} V_{11}(Z(t) - \gamma\hat{X}_1(t)) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (13.11)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{dV_{11}}{dt} & \frac{dV_{12}}{dt} \\ \frac{dV_{21}}{dt} & \frac{dV_{22}}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{12} & V_{22} \\ -\omega_0^2V_{11} - 2\alpha V_{12} & -\omega_0^2V_{12} - 2\alpha V_{22} \end{bmatrix} + \quad (13.12)$$

$$+ \begin{bmatrix} V_{12} & -\omega_0^2V_{11} - 2\alpha V_{12} \\ V_{22} & -\omega_0^2V_{12} - 2\alpha V_{22} \end{bmatrix} + \frac{N_{0,1}}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \omega_0^4 \end{bmatrix} - \frac{2\gamma^2}{N_0} \begin{bmatrix} V_{11}^2 & V_{11}V_{12} \\ V_{11}V_{12} & V_{12}^2 \end{bmatrix}.$$

Обратим внимание на то, что алгоритм оптимальной фильтрации (13.11) зависит лишь от одной компоненты дискретной матрицы $V_{11}(t)$. Однако, чтобы найти $V_{11}(t)$ нужно совместно решать 3 нелинейных уравнения относительно компонент $V_{11}(t)$, $V_{12}(t)$, $V_{22}(t)$.

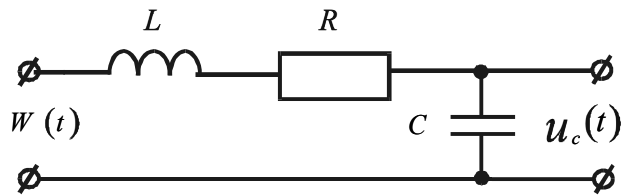


Рис 13.1

В качестве другого примера порождающего фильтра рассмотрим интегрирующую RC-цепочку (рис.13.2) динамическую систему 1-го порядка.

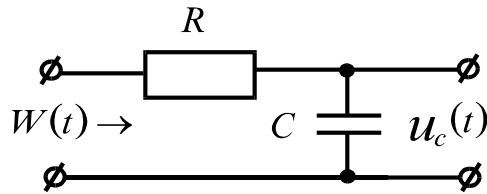


Рис.13.2

Введем переменную состояния $X(t) = U_c(t)$, $X(t_0) = X_0$. Тогда уравнение наблюдения и состояния запишем так:

$$\frac{dX}{dt} = -\alpha X(t) + \alpha W(t). \quad (13.13)$$

$$Z(t) = X(t) + N(t). \quad (13.14)$$

Уравнения оптимальной фильтрации

$$\frac{d\hat{X}}{dt} = -\alpha \hat{X}(t) + V(t) \frac{2}{N_0} [Z(t) - \hat{X}(t)], \quad \hat{X}(t_0) = \hat{X}_0 \quad (13.15)$$

$$\frac{dV}{dt} = 2\alpha V(t) + \frac{N_{0,1}\alpha^2}{2} - V(t)^2 \frac{2}{N_0}. \quad (13.16)$$

Частным случаем метода переменных состояния является метод фазовой плоскости, который рассматривался по курсу ТЭЦ.

С помощью уравнений состояния можно описывать не только сами фильтры, но и проходящие через них сигналы [5,7]. Сущность этого метода состоит в том, что сигнал рассматривается как реакция некоторого фильтра, формирующего его из определенного стандартного случайного процесса. В качестве такого порождающего процесса обычно берется "белый шум", поскольку он имеет равномерный спектр, из которого с помощью формирующего фильтра можно "вырезать" энергетический спектр любой желаемой формы.

Таким образом, случайный сигнал $Y(t)$, содержащий сообщение, можно представить уравнениями:

$$\frac{dX}{dt} = \Phi(t)X(t) + \Gamma(t)W(t), \quad (13.17)$$

$$Y(t) = H(t)X(t), \quad (13.18)$$

где $X(t)$ – вектор состояний; $W(t)$ – порождающий процесс; Φ , Γ , H – матрицы, определяющие характеристики процесса $Y(t)$.

Уравнения (13.17) и (13.18) представляют собой математическую модель сообщения. Такой метод описания применим не только для непрерывных, но также и для дискретных по времени систем и сигналов.

Уравнения состояния и наблюдения для системы с дискретным временем записываются в виде

$$\mathbf{X}(j+1) = \mathbf{A}(j)\mathbf{X}(j) + \mathbf{B}(j)\mathbf{Y}(j), \quad (13.19)$$

$$\mathbf{Z}(j) = \mathbf{C}(j)\mathbf{X}(j) + \mathbf{D}(j)\mathbf{Y}(j), \quad (13.20)$$

где $\mathbf{Y}(j)$, $\mathbf{Z}(j)$ – соответственно входная и выходная последовательности; $\mathbf{X}(j)$ – последовательность состояний; j – дискретное время.

Случайный процесс с дискретным временем (случайная последовательность) $\mathbf{Y}(j)$ может быть задан как решение дискретных ("разностных") уравнений

$$\mathbf{X}(j+1) = \mathbf{\Phi}(j)\mathbf{X}(j) + \mathbf{d}(j)W(j), \quad (13.21)$$

$$\mathbf{Y}(j) = \mathbf{H}(j)\mathbf{X}(j), \quad (13.22)$$

где $\mathbf{W}(j)$ – порождающая случайная последовательность.

В качестве примера рассмотрим авторегрессивный процесс. Так называют последовательность случайных величин $\lambda(j)$, которые удовлетворяют разностному уравнению авторегрессии n -го порядка:

$$\lambda(j) = \beta_1\lambda(j-1) + \beta_2\lambda(j-2) + \dots + \beta_n\lambda(j-n) + \alpha(j), \quad (13.23)$$

где $\alpha(j)$ – последовательность коррелированных случайных величин (дискретный "белый шум"); $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ – постоянные коэффициенты.

Такой процесс можно рассматривать как выходной сигнал дискретного фильтра, возбуждаемого "белым шумом".

Запишем уравнение авторегрессионного процесса второго порядка в форме уравнений состояния. Полагая в (13.23) $n=2$ и выбирая в качестве переменных состояния $\lambda(j-1)$ и $\lambda(j-2)$, т.е.

$$\mathbf{X}(j) = \begin{bmatrix} \lambda(j-1) \\ \lambda(j-2) \end{bmatrix}, \quad (13.24)$$

$$\begin{bmatrix} \lambda(j) \\ \lambda(j-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda(j-1) \\ \lambda(j-2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \alpha(j), \quad (13.25)$$

т.е.
$$\mathbf{X}(j+1) = \mathbf{\Phi}\mathbf{X}(j) + \mathbf{\Gamma}\alpha(j), \quad (13.26)$$

где

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (13.27)$$

Уравнение наблюдений имеет вид

$$\mathbf{Y}(j) = \mathbf{H}\mathbf{X}(j), \quad (13.28)$$

где

$$\mathbf{H} = [1 \quad 0]. \quad (13.29)$$

Случайные процессы, которые могут быть описаны уравнениями состояния, в частности авторегрессивный процесс, относятся к типу марковских процессов (цепей Маркова) /1, стр.24-25/. Многосвязная цепь Маркова – это последовательность таких случайных процессов, условная вероятность каждой из которых зависит только от n других, более ранних. Иначе говоря, вероятностные связи в процессе Маркова распространяются только на n шагов. Марковские модели сигналов занимают важное место в статистической теории связи.

Таким образом, по методу переменных состояния линейная система, в частности фильтр, характеризуется матрицами **A**, **B**, **C**, **D**, входящими в уравнение состояний и наблюдения или (13.19), (13.20). Случайный сигнал может быть охарактеризован матрицами **F**, **G**, **H**, входящими в уравнения формирующего данный процесс фильтра (13.17), (13.18) или (13.21), (13.22). Такой метод описания применим в равной степени как для стационарных, так и для нестационарных сигналов и систем. Другое важное его преимущество – удобство для моделирования на ЭВМ. Действительно, из уравнения (13.19) видно, что все состояния системы могут быть последовательно вычислены, если известно начальное состояние $X(0)$ и входной сигнал $y(j)$:

$$x(1) = Ax(0) + By(0),$$

$$x(2) = Ax(1) + By(1) = A^2x(0) + ABu(0) + Bu(1)$$

и т.д.

2. Оптимальная фильтрация по Калману-Бьюси

Дискретный фильтр Калмана хорошо приспособлен для реализации его на ЭВМ. Поэтому более подробное рассмотрение метода Калмана проведем для дискретного его варианта /1,3/.

Этот метод относится к классу линейных последовательных алгоритмов оценивания состояния, обеспечивающих минимальную среднеквадратическую ошибку. Независимо от того, является ли алгоритм оценивания последовательным или нет, значения полученных оценок состояния не корректируются. Отметим, что наиболее значительный вклад Калмана и Бьюси в теорию оптимальной фильтрации состоит в том, что они впервые получили линейный алгоритм оценивания по критерию минимума дисперсии ошибки в последовательной форме, используя понятие переменных состояния. Проблема линейной последовательной фильтрации по критерию минимума дисперсии ошибки была решена Винером, Колмогоровым и другими авторами применительно к системам с одним входом и одним выходом. Главная заслуга Калмана состоит в том, что он обобщил теорию фильтрации Колмогорова-Винера на случай нестационарных многомерных систем с нестационарными шумовыми реализациями конечной длительности и получил решение задачи фильтрации в рекуррентном виде.

Таким образом, по методу Калмана требуется получить оптимальную по критерию минимума дисперсию ошибки линейную несмещенную оценку состояния линейной нестационарной динамической системы, на которую воздействует белый шум с нулевым средним и известной дисперсией.

Для получения оценки наблюдается изменяющаяся во времени линейная функция состояния на фоне аддитивного белого шума с нулевым средним и известной дисперсией.

Начальное состояние процесса представляет собой случайную величину с известным средним значением и дисперсией. Корреляция между входным шумом и шумом измерения отсутствует.

Задача оптимальной фильтрации дискретных сигналов по Калману-Бьюси ставится следующим образом /1,3/.

1. Фильтрации подлежит дискретный случайный процесс $V(j)$, заданный уравнениями состояния в дискретном времени j вида:

$$X(j+1) = \Phi(j)X(j) + \vartheta(j)W(j), \quad (13.30)$$

$$Y(j) = H(j)X(j), \quad (13.31)$$

где $W(j)$ – порождающий процесс типа "белого шума" с корреляционной функцией

$$B_w(k) = \overline{W(j)W(j+k)} = \sigma_w^2 \delta(k). \quad (13.32)$$

$$\Phi(j) = \begin{bmatrix} \varphi_{11}(j) & \varphi_{21}(j) & \cdots & \varphi_{1n}(j) \\ \varphi_{21}(j) & \varphi_{22}(j) & \cdots & \varphi_{2n}(j) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_{n1}(j) & \varphi_{n2}(j) & \cdots & \varphi_{nn}(j) \end{bmatrix}, \quad \vartheta(j) = \begin{bmatrix} \gamma_1(j) \\ \gamma_2(j) \\ \vdots \\ \gamma_n(j) \end{bmatrix}, \quad H(j) = [h_1(j) \quad h_2(j) \quad \cdots \quad h_n(j)] - \quad (13.33)$$

заданные матрицы, в общем случае зависящие от дискретного времени j

$$X(j) = \begin{bmatrix} x_1(j) \\ x_2(j) \\ \vdots \\ x_n(j) \end{bmatrix} - \text{вектор состояний.} \quad (13.34)$$

2. Процесс $Y(j)$ наблюдается в аддитивной смеси с "белым шумом" $U(j)$

$$Z(j) = Y(j) + U(j) = H(j)X(j) + U(j) \quad (13.35)$$

причем шум $U(j)$ имеет корреляционную функцию

$$B_u(k) = \overline{U(j)U(j+k)} = \sigma_u^2 \delta(k). \quad (13.36)$$

и предполагается некоррелированным с порождающим процессом $W(j)$ и с сигналом $Y(j)$.

Таким образом модель сообщения

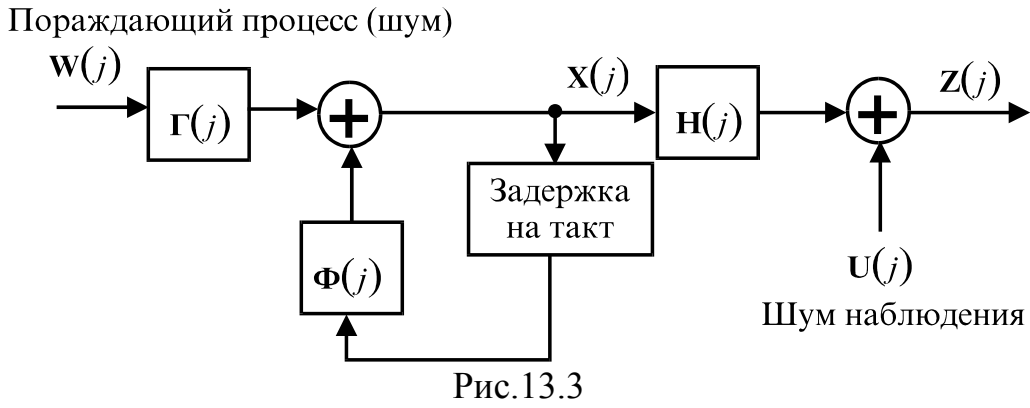
$$\mathbf{X}(j+1) = \Phi(j)\mathbf{X}(j) + \Gamma(j)\mathbf{W}(j),$$

модель наблюдения

$$z(j) = \mathbf{H}(j)\mathbf{X}(j) + u(j).$$

Структурная схема моделей сообщения и наблюдения порождающий процесс (шум)

3. Требуется получить уравнения состояния линейного фильтра, выделяющего из наблюдаемых реализаций $z(j)$ смеси сигнала $y(j)$ с шумом сигнал $\hat{y}(j)$, который является оптимальной оценкой $y(j)$ по критерию минимума дисперсии ошибки:



$$\sigma_{\Delta y}^2 = \overline{[Y(t) - \hat{Y}(t)]^2} \rightarrow \min . \quad (13.37)$$

Поставленная задача является частным случаем общей задачи линейного оценивания величины $y(j)$ по совокупности последовательных наблюдений $z(0), z(1), z(2), \dots, z(k)$. Искомая оценка в общем случае обозначается $\hat{y}(j/k)$. В зависимости от соотношения между величинами j и k оценивание называется предсказанием или экстраполяцией ($j > k$, т.е. предсказывается будущее значение), фильтрацией ($j = k$) и интерполяцией ($j < k$). Здесь мы будем рассматривать только поставленную выше задачу фильтрации.

Искомая оценка $\hat{y}(j) = y(j-k)$ есть условное математическое ожидание величины $y(j)$ при заданных наблюдениях:

$$\hat{y}(j) = M \{y(j) / z(0), z(1), \dots, z(j)\}, \quad (13.38)$$

которое в общем случае не является линейной функцией этих наблюдений. Поэтому обычно ищут оценку, которая является оптимальной лишь в классе линейных алгоритмов. Для гауссовских процессов она оказывается оптимальной и по всем возможным вариантам.

Опуская здесь доказательство, которое можно найти в специальной литературе [3], приведем конечный результат решения задачи Калмана-Бьюси.

Искомая оптимальная линейная оценка $\hat{y}(j)$ сигнала $y(j)$ по наблюдениям $z(j), z(j-1), \dots, z(0)$ удовлетворяет уравнениям состояния

$$\hat{\mathbf{X}}(j) = \mathbf{\Phi}(j)\hat{\mathbf{X}}(j-1) + \mathbf{K}(j)[Z(j) - \mathbf{H}(j)\mathbf{\Phi}(j)\hat{\mathbf{X}}(j-1)], \quad (13.39)$$

$$\hat{y}(j) = \mathbf{H}(j)\hat{\mathbf{X}}(j)$$

при начальных условиях

$$\hat{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{m}_x(0), \quad \mathbf{V}_{\Delta x}(0) = \mathbf{V}_x(0), \quad (13.40)$$

где

$$\mathbf{K}(j) = \mathbf{V}_{\Delta x}(j/j-1)\mathbf{H}^T(j) [\mathbf{H}(j)\mathbf{V}_{\Delta x}(j/j-1)\mathbf{H}^T(j) + \mathbf{V}_{\Delta x}(j)]^{-1}, \quad (13.41)$$

$$\mathbf{V}_{\Delta x}(j/j-1) = \mathbf{\Phi}(j)\mathbf{V}_{\Delta x}(j)\mathbf{\Phi}^T(j) + \mathbf{\Gamma}(j)\mathbf{V}_w(j)\mathbf{\Gamma}^T(j). \quad (13.42)$$

Здесь

$$\mathbf{V}_{\Delta x}(j/j-1) = [\mathbf{X}(j) - \hat{\mathbf{X}}(j/j-1)][\mathbf{X}(j) - \mathbf{X}(j/j-1)]^T \quad (13.43)$$

– априорная корреляционная матрица вектора ошибок;

$$\mathbf{V}_{\Delta x}(j) = [\mathbf{X}(j) - \hat{\mathbf{X}}(j)][\mathbf{X}(j) - \hat{\mathbf{X}}(j)]^T \quad (13.44)$$

– апостериорная корреляционная матрица вектора ошибок;

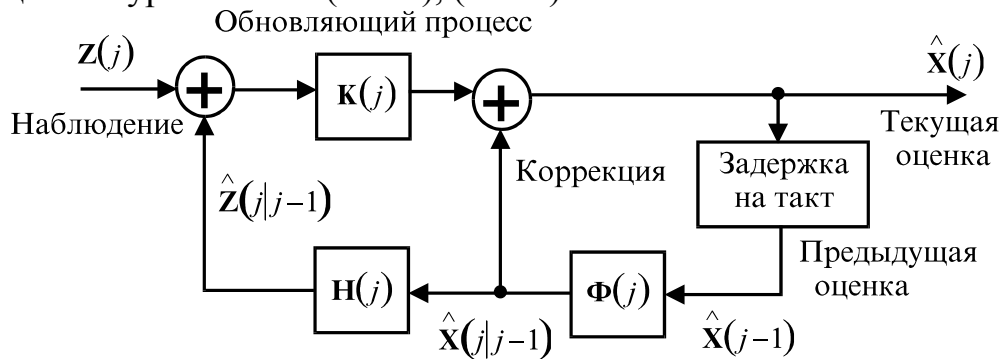
$K(j)$ – коэффициент усиления фильтра.

Корреляционную матрицу $\mathbf{V}_{\Delta x}(j/j-1)$ называют априорной, поскольку она характеризует ошибку оценки $\hat{\mathbf{X}}(j)$ до момента наблюдения j . Апостериорная корреляционная матрица $\mathbf{V}_{\Delta x}(j)$ характеризует ошибку в момент наблюдения. Диагональные элементы этих матриц выражают дисперсии компонент соответствующих ошибок, а недиагональные – их взаимную корреляцию.

Необходимая для оценки точности фильтрации дисперсия выходного сигнала

$$\sigma_{\Delta y}^2(j) = \overline{[Y(j) - \hat{Y}(j)]^2} = H(j)V_{\Delta x}(j)H^T(j). \quad (13.45)$$

Если, в частности, $H=[100 \dots 0]$, то $\sigma_{\Delta y}^2$ – это первый элемент первой строки матрицы. На рис.13.4 показана структурная схема фильтрации Калмана, соответствующая его уравнениям (13.39), (13.40).



Структурная схема дискретного фильтра Калмана

Рис. 13.4

Как видно из этих уравнений и схемы, фильтр работает по принципу последовательного формирования оценки. Для получения оценки $\hat{\mathbf{X}}(j)$ в момент j предыдущая оценка $\hat{\mathbf{X}}(j-1)$ экстраполируется на один шаг вперед и затем используется для получения наилучшей оценки $\hat{z}(j/j-1)$ нового наблюдения $z(j)$ с учетом всех предыдущих наблюдений. Разность между оценкой текущего наблюдения и фактически наблюдением $z(j) - \hat{z}(j/j-1)$ выражает новую информацию, в связи с чем обычно называется *обновляющим* процессом. Нетрудно видеть, что он выполняет здесь роль порождающего процесса для формирования оценки. Из обновляющего процесса путем умножения его на матричный коэффициент усиления, учитывающий дисперсии входного процесса, измерений и ошибки оценивания, получается сигнал коррекции. Он, складываясь с предсказанной оценкой, дает новую оценку.

Оценка заданного сигнала, $\hat{y}(j)$, получается путем матричного преобразования оценки $\hat{x}(j)$ вектора состояний. Чаще всего это первая компонента вектора $\hat{x}(j)$, т.е. $H=[100 \dots]$.

Таким образом, решение задачи фильтрации по Калману-Бьюси в отличие от метода Винера непосредственно представляет собой алгоритм формирования оценки. Поэтому фильтр Калмана хорошо приспособлен для реализации на ЭВМ. При этом оценки $\hat{y}(1), \hat{y}(2), \dots, \hat{y}(j)$ последовательно вычисляются по мере поступления отсчетов наблюдаемого сигнала $z(1), z(2), \dots, z(j)$ и в силу этого не требуется большого объема памяти. Вместе с оценкой, в качестве промежуточного результата, вычисляется дисперсия ошибки, позволяющая контролировать точность процедуры оценивания. Фильтр Калмана-Бьюси пригоден в равной степени как для стационарных, так и для нестационарных сигналов.

На практике фильтруемый процесс $Y(t)$ представляет собой сигнал, несущий полезную информацию (сообщение). При выполнении лабораторной работы этот сигнал формируется искусственно из процесса $W(j)$ с заданной дисперсией σ_w^2 по формулам вида (13.30), (13.31). В качестве порождающего процесса $W(j)$, а также шума наблюдений $U(j)$ берется дискретный гауссовский "белый шум", т.е. последовательность некоррелированных нормально распределенных случайных величин.

Домашнее задание

1. Изучить рекомендуемую литературу.
2. Записать дискретную (одномерную) модель сигнала постоянного уровня $(x(j) = x_0, j = \overline{0, \infty})$ в виде уравнения состояния.
3. Записать дискретную модель (двумерную) гармонического сигнала $(x(j) = x_0 \cos 2\pi j, j = \overline{0, \infty})$.
4. Записать дискретную модель случайного процесса с известными коэффициентами корреляции в виде уравнения состояния.

Порядок выполнения работы

В этой лабораторной работе исследуется фильтр Калмана-Бьюси и прохождение через него постоянного сигнала, гармонического и случайного сигналов.

1. Нажмите «1» для перехода к первой части работы. Фильтрация постоянного сигнала рекурсивным ФНЧ первого порядка. Нажмите любую клавишу для перехода к процессу фильтрации. Просмотрите временные зависимости исходных сигналов и сигналов на выходе фильтра совмещённых на одном графике (жёлтый на входе и фиолетовый на выходе) и график ошибки фильтрации (красный).

Фильтрация производится для сигналов с разной амплитудой и одинаковой дисперсией шума.

$$A_1 = -0,8 D_x = 0,1$$

$$A_1 = -0,9 D_x = 0,1$$

Где A_1 – амплитуда сигнала, D_x – дисперсия шума. Сравните два графика ошибки фильтрации с разной заданной амплитудой сигнала и сделайте соответствующие выводы.

Для продолжения нажмите «Enter». Запишите средний квадрат ошибки (СКО) фильтрации для 1-го и 2-го фильтра. для перехода к фильтрации при одинаковой амплитуде и разной дисперсией нажмите «Enter». Ниже приведены параметры (амплитуда и дисперсия шума) для двух сигналов.

$$A_1 = -0,9 \quad D_x = 0,1$$

$$A_1 = -0,9 \quad D_x = 0,2$$

Сравните два графика ошибки фильтрации и сделайте выводы.

Для продолжения нажмите «Enter». Запишите СКО фильтрации для 1-го и 2-го фильтра. Для перехода к фильтрации сигналов с разной дисперсией фильтром Калмана-Бьюси нажмите «Enter». Сравните графики ошибки фильтрации с предыдущими двумя и сделайте выводы. Нажмите «Enter» и запишите СКО.

Затем перейдите к пункту фильтрации гармонических сигналов. Для просмотра структурных схем рекурсивного и не рекурсивного фильтров нажмите «Enter». Зарисуйте эти схемы. Для вывода зависимости АЧХ рекурсивного фильтра от амплитудных коэффициентов нажмите «Enter». Для перехода к пункту фильтрации гармонического сигнала с различной дисперсией шума рекурсивным фильтром при дисперсии шума 0,25 и 0,5 нажмите «Enter», и переходите к демонстрации графиков нажав «Enter», оцените графики ошибки фильтрации и сделайте выводы. Нажмите «Enter» и запишите СКО. Для перехода к демонстрации графиков при фильтрации сигнала двумя фильтрами из которых у одного резонансная частота совпадает с сигналом, а у другого отличается в два раза нажмите «Enter». Оцените 2 графика ошибки фильтрации и сделайте выводы. Нажмите «Enter» и запишите СКО. Переходите к пункту фильтрации гармонического сигнала фильтром Калмана при разной дисперсии, для вывода графиков нажмите «Enter», оцените графики ошибки фильтрации и сделайте выводы. Нажмите «Enter» и запишите СКО. Переходите к пункту фильтрации случайного сигнала фильтром Калмана нажав «Enter». Для вывода графиков двух случайных сигналов и СКО при фильтрации фильтром Калмана нажмите «Enter» оцените графики ошибки фильтрации и сделайте выводы. Нажмите «Enter», запишите СКО. Для вывода графиков сигналов с различной степенью корреляции и одинаковой мощностью шума нажмите «Enter», оцените графики ошибки фильтрации и сделайте выводы. Нажмите «Enter» и запишите СКО.

Сделайте выводы по оценке СКО для заданных сигналов

Содержание отчета

1. Наименование работы, ее цель.
2. Выполненное домашнее задание.
3. Исходные данные для фильтрации различных испытательных сигналов.
4. Временные диаграммы процесса фильтрации.
5. Выводы по каждому пункту выполненной лабораторной работы.

Контрольные вопросы

1. Что понимают под оптимальной фильтрацией сигналов? В каких случаях в системах связи необходима оптимальная фильтрация?
2. Назовите основные методы математического описания случайных сигналов.
3. Какими способами можно описать линейное звено системы связи?
4. Как описываются линейные звенья по методу переменных состояния?
5. Как представить случайный процесс уравнениями состояния? Какой процесс обычно выбирается в качестве порождающего и почему?
6. Запишите уравнения состояния линейной системы в дискретном времени.
7. Как представить уравнениями состояния случайный процесс с дискретным временем?
8. Запишите уравнения состояния для процесса авторегистрации третьего порядка.
9. Назовите два основных типа задач линейной оптимальной фильтрации. В чем их различие?
10. Сформулируйте задачу оптимальной фильтрации по Колмогорову-Винеру.
11. Как определяется импульсная переходная характеристика оптимального фильтра Винера?
12. В чем преимущества и недостатки фильтров Винера?
13. Поясните требование физической реализуемости фильтра.
14. Сформулируйте задачу оптимальной фильтрации по Калману-Бьюси. В чем отличие ее от задачи Колмогорова-Винера?
15. Назовите другие задачи оценивания, кроме задачи фильтрации.
16. Какие исходные данные о сигналах и помехах необходимы для осуществления калмановской фильтрации?
17. Как определяется оптимальный фильтр по методу Калмана-Бьюси?
18. Поясните, как практически осуществить калмановскую фильтрацию.
19. Приведите структурную схему фильтра Калмана.
20. Приведите блок-схему алгоритма калмановской фильтрации. Как реализуется этот алгоритм на ЭВМ?
21. В чем преимущества и недостатки фильтров Калмана-Бьюси?
22. Расскажите об организации в целом эксперимента по исследованию калмановской фильтрации. Как получают необходимые для проведения эксперимента случайные сигналы и шумы?

Литература

1. Зюко А.Г., Кловский Д.Д., Назаров М.В., Финк Л.М. Теория передачи сигналов. – М.: Связь, 1986, с.232-236.
2. Ван Трис Г. Теория обнаружения, оценок и модуляции. Т.1 – М.: Советское радио, 1972, с.542-713.
3. Сейдж Э., Мелс Дж. Теория оценивания и ее применение в связи и управлении. – М.: Связь, 1976, с.251-325.