Лекция 1

Электрические цепи с распределенными параметрами (длинные линии)

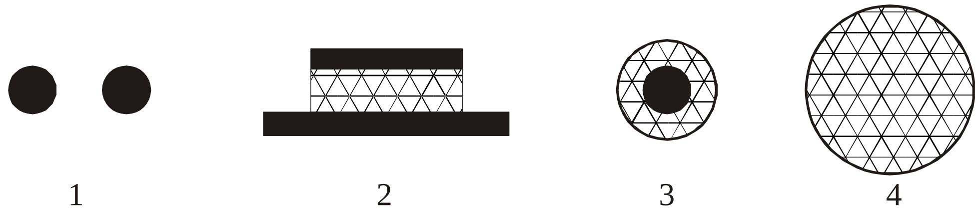
Общие сведения о регулярных линиях передачи

Линия передачи (длинная линия) – устройство, ограничивающее область распространения электромагнитных колебаний и направляющее поток электромагнитной энергии в заданном направлении.

Линия называется регулярной, если в продольном направлении неизменны ее поперечное сечение, положение его в пространстве и электромагнитные свойства заполняющих ее сред.

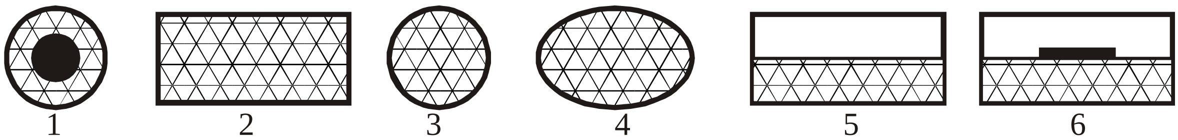
Линия является однородной, если в произвольном поперечном сечении параметры среды неизменны.

Открытые линии передачи



1 – двухпроводная линия, 2 – открытая полосковая линия, 3 – однопроводная линия, 4 – открытая диэлектрическая линия.

Закрытые линии передачи



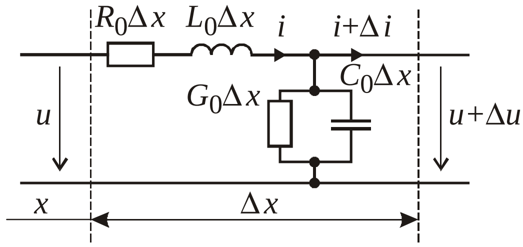
1 – коаксиальный кабель, 2 – прямоугольный волновод, 3 – круглый волновод, 4 – эллиптический волновод, 5 – частично-заполненный волновод, 6 – экранированная полосковая линия.

Длинные линии характеризуются первичными параметрами, то есть параметрами, отнесенными к единице длины линии. К первичным параметрам относят:

1. Резистивное сопротивление единицы длины линии $R_0\left[\frac{\text{Ом}}{\text{м}}\right]$.
2. Индуктивность единицы длины линии $L_0\left[\frac{\text{Гн}}{\text{м}}\right]$.
3. Емкость единицы длины линии $C_0\left[\frac{\text{Ф}}{\text{м}}\right]$.
4. Проводимость единицы длины линии $G_0\left[\frac{\text{См}}{\text{м}}\right]$.

Телеграфные уравнения

Рассмотрим элементарный участок длинной линии.



Линия рассматривается как цепь с бесконечно большим числом звеньев, электрические параметры которых бесконечно малы.

Токи и напряжения в линии описываются системой телеграфных уравнений:

$$-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = R_0 i(x,t) + L_0 \frac{\partial i(x,t)}{\partial t}$$
$$-\frac{\partial i(x,t)}{\partial x} = G_0 u(x,t) + C_0 \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}.$$

Представим мгновенные токи и напряжения в виде комплексных действующих значений:

$$i(x,t) \Leftrightarrow \underline{I}(x),\ u(x,t) \Leftrightarrow \underline{U}(x),\ \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} \Leftrightarrow \mathrm{j}\omega \underline{I}(x),\ \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \Leftrightarrow \mathrm{j}\omega \underline{U}(x).$$

Телеграфные уравнения запишем в более удобном виде:

$$-\frac{d\underline{U}(x)}{dx} = R_0 \underline{I}(x) + \mathrm{j}\omega L_0 \underline{I}(x) = (R_0 + \mathrm{j}\omega L_0)\underline{I}(x)$$
$$-\frac{d\underline{I}(x)}{dx} = G_0 \underline{U}(x) + \mathrm{j}\omega C_0 \underline{U}(x) = (G_0 + \mathrm{j}\omega C_0)\underline{U}(x).$$

Уравнения передачи для однородной длинной линии

Продифференцируем в системе телеграфных уравнений по координате x первое уравнение:

$$-\frac{d^2\underline{U}(x)}{dx^2} = (R_0 + \mathrm{j}\omega L_0)\frac{d\underline{I}(x)}{dx}.$$

Далее, используя второе уравнение, имеем:

$$\frac{d^2\underline{U}(x)}{dx^2} = (R_0 + \mathrm{j}\omega L_0)\cdot(G_0 + \mathrm{j}\omega C_0)\underline{U}(x).$$

Введем переменную $\underline{\gamma}_0 = \sqrt{(R_0 + \mathrm{j}\omega L_0)(G_0 + \mathrm{j}\omega C_0)}$ – коэффициент распространения.

В итоге получаем однородное дифференциальное уравнение вида:

$$\frac{d^2\underline{U}(x)}{dx^2} - \underline{\gamma}_0^2 \underline{U}(x) = 0.$$

Составим характеристическое уравнение $p^2 - \underline{\gamma}_0^2 = 0$, из которого $p = \pm\underline{\gamma}_0$.

Решение для $\underline{U}(x)$ запишем в виде:

$$\underline{U}(x) = \underline{A}_1 \mathrm{e}^{-\underline{\gamma}_0 x} + \underline{A}_2 \mathrm{e}^{\underline{\gamma}_0 x}.$$

Используя телеграфные уравнения, определим $\underline{I}(x)$.

$$\underline{I}(x) = \frac{\underline{\gamma}_0}{R_0 + \mathrm{j}\omega L_0}\left(\underline{A}_1 \mathrm{e}^{-\underline{\gamma}_0 x} - \underline{A}_2 \mathrm{e}^{\underline{\gamma}_0 x}\right).$$

Введем переменную $\underline{Z}_0=\sqrt{\dfrac{R_0+\mathrm{j}\omega L_0}{G_0+\mathrm{j}\omega C_0}}$ – волновое сопротивление линии.

В итоге можно записать:

$$\underline{U}(x)=\underline{A}_1\mathrm{e}^{-\underline{\gamma}_0 x}+\underline{A}_2\mathrm{e}^{\underline{\gamma}_0 x},$$

$$\underline{I}(x)=\frac{1}{\underline{Z}_0}\left(\underline{A}_1\mathrm{e}^{-\underline{\gamma}_0 x}-\underline{A}_2\mathrm{e}^{\underline{\gamma}_0 x}\right).$$

Для определения неизвестных $\underline{A}_1$ и $\underline{A}_2$ зададим граничные условия вначале линии.

Пусть $\underline{U}(0)=\underline{U}_1$ – напряжение на входе линии, $\underline{I}(0)=\underline{I}_1$ – ток на входе линии, тогда

$$\underline{U}_1=\underline{A}_1+\underline{A}_2,\ \underline{I}_1=\frac{1}{\underline{Z}_0}(\underline{A}_1-\underline{A}_2),\ \text{отсюда}$$

$$\underline{A}_1=\frac{\underline{U}_1+\underline{I}_1\underline{Z}_0}{2},\ \underline{A}_2=\frac{\underline{U}_1-\underline{I}_1\underline{Z}_0}{2}.$$

После подстановки, получим в явном виде уравнения для определения напряжений и токов в произвольной точке x.

$$\underline{U}(x)=\frac{\underline{U}_1+\underline{I}_1\underline{Z}_0}{2}\mathrm{e}^{-\underline{\gamma}_0 x}+\frac{\underline{U}_1-\underline{I}_1\underline{Z}_0}{2}\mathrm{e}^{\underline{\gamma}_0 x},$$

$$\underline{I}(x)=\frac{\underline{U}_1+\underline{I}_1\underline{Z}_0}{2\underline{Z}_0}\mathrm{e}^{-\underline{\gamma}_0 x}-\frac{\underline{U}_1-\underline{I}_1\underline{Z}_0}{2\underline{Z}_0}\mathrm{e}^{\underline{\gamma}_0 x}.$$

Последние уравнения – есть уравнения передачи однородной длинной линии.

Поскольку $\mathrm{ch}\underline{\gamma}_0 x=\dfrac{\mathrm{e}^{\underline{\gamma}_0 x}+\mathrm{e}^{-\underline{\gamma}_0 x}}{2}$, $\mathrm{sh}\underline{\gamma}_0 x=\dfrac{\mathrm{e}^{\underline{\gamma}_0 x}-\mathrm{e}^{-\underline{\gamma}_0 x}}{2}$, то уравнения передачи можно записать в более компактном виде:

$$\underline{U}(x)=\underline{U}_1\mathrm{ch}\underline{\gamma}_0 x-\underline{I}_1\underline{Z}_0\mathrm{sh}\underline{\gamma}_0 x,$$

$$\underline{I}(x)=-\frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_0}\mathrm{sh}\underline{\gamma}_0 x+\underline{I}_1\mathrm{ch}\underline{\gamma}_0 x.$$

Зададим граничные условия в конце линии $x=a$.

Пусть $\underline{U}(a)=\underline{U}_2$, $\underline{I}(a)=\underline{I}_2$ – напряжение и ток в конце линии. Тогда последние уравнения примут следующий вид:

$$\underline{U}(a)=\underline{U}_2=\underline{U}_1\mathrm{ch}\underline{\gamma}_0 a-\underline{I}_1\underline{Z}_0\mathrm{sh}\underline{\gamma}_0 a,$$

$$\underline{I}(a)=\underline{I}_2=-\frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_0}\mathrm{sh}\underline{\gamma}_0 a+\underline{I}_1\mathrm{ch}\underline{\gamma}_0 a.$$

Выразим напряжение и ток на входе через напряжение и ток на выходе линии. Решаем методом определителей.

$$\Delta=\begin{vmatrix}\mathrm{ch}\underline{\gamma}_0 a & -\underline{Z}_0\mathrm{sh}\underline{\gamma}_0 a\\ -\dfrac{1}{\underline{Z}_0}\mathrm{sh}\underline{\gamma}_0 a & \mathrm{ch}\underline{\gamma}_0 a\end{vmatrix}=\mathrm{ch}^2\underline{\gamma}_0 a-\mathrm{sh}^2\underline{\gamma}_0 a=1,$$

$$\Delta_{U1}=\begin{vmatrix}\underline{U}_2 & -\underline{Z}_0\operatorname{sh}\underline{\gamma}_0 a\\ \underline{I}_2 & \operatorname{ch}\underline{\gamma}_0 a\end{vmatrix}=\underline{U}_2\operatorname{ch}\underline{\gamma}_0 a+\underline{I}_2\underline{Z}_0\operatorname{sh}\underline{\gamma}_0 a,$$

$$\Delta_{I1}=\begin{vmatrix}\operatorname{ch}\underline{\gamma}_0 a & \underline{U}_2\\ -\dfrac{1}{\underline{Z}_0}\operatorname{sh}\underline{\gamma}_0 a & \underline{I}_2\end{vmatrix}=\underline{I}_2\operatorname{ch}\underline{\gamma}_0 a+\frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_0}\operatorname{sh}\underline{\gamma}_0 a.$$

Окончательно получаем:

$$\underline{U}_1=\underline{U}_2\operatorname{ch}\underline{\gamma}_0 a+\underline{I}_2\underline{Z}_0\operatorname{sh}\underline{\gamma}_0 a,\ \underline{I}_1=\underline{I}_2\operatorname{ch}\underline{\gamma}_0 a+\frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_0}\operatorname{sh}\underline{\gamma}_0 a.$$

Из последних уравнений мы можем определить напряжение и ток вначале линии ($x=0$), зная напряжение и ток в конце линии ($x=a$). Следует отметить, что параметры $\underline{\gamma}_0$ и $\underline{Z}_0$ относятся к вторичным параметрам длинной линии.

Падающие и отраженные волны

В уравнениях передачи введем следующие обозначения:

$$\underline{U}_{\text{пад}}=\frac{\underline{U}_1+\underline{I}_1\underline{Z}_0}{2},\ \underline{U}_{\text{отр}}=\frac{\underline{U}_1-\underline{I}_1\underline{Z}_0}{2},\ \underline{I}_{\text{пад}}=\frac{\underline{U}_1+\underline{I}_1\underline{Z}_0}{2\underline{Z}_0},\ \underline{I}_{\text{отр}}=\frac{\underline{U}_1-\underline{I}_1\underline{Z}_0}{2\underline{Z}_0}.$$

$$\underline{U}(x)=\underline{U}_{\text{пад}}e^{-\underline{\gamma}_0 x}+\underline{U}_{\text{отр}}e^{\underline{\gamma}_0 x}=\underline{U}_{\text{пад}}(x)+\underline{U}_{\text{отр}}(x),$$

$$\underline{I}(x)=\underline{I}_{\text{пад}}e^{-\underline{\gamma}_0 x}-\underline{I}_{\text{отр}}e^{\underline{\gamma}_0 x}=\underline{I}_{\text{пад}}(x)+\underline{I}_{\text{отр}}(x),$$

Отметим, что: $\underline{U}_{\text{пад}}(x)=\underline{Z}_0\underline{I}_{\text{пад}}(x)$, $\underline{U}_{\text{отр}}(x)=-\underline{Z}_0\underline{I}_{\text{отр}}(x)$.

Напряжение и ток состоят из двух слагаемых. Первые слагаемые уменьшаются с увеличением расстояния от начала линии, вторые возрастают.

Вывод: в линии существует два типа волн: падающие и отраженные.
Пусть $\underline{\gamma}_0=\alpha+j\beta$, тогда напряжение и ток в мгновенной форме:

$$u(x,t)=\left|\underline{U}_{\text{пад}}\right|e^{-\alpha x}\sin(\omega t-\beta x)+\left|\underline{U}_{\text{отр}}\right|e^{\alpha x}\sin(\omega t+\beta x),$$

$$i(x,t)=\left|\underline{I}_{\text{пад}}\right|e^{-\alpha x}\sin(\omega t-\beta x)-\left|\underline{I}_{\text{отр}}\right|e^{\alpha x}\sin(\omega t+\beta x).$$

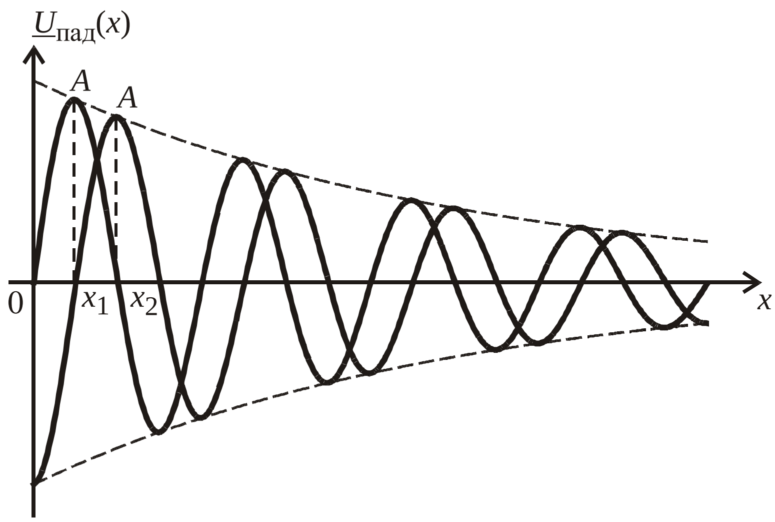
Рассмотрим первые слагаемые в последних уравнениях:

$$u_{\text{пад}}(x,t)=\left|\underline{U}_{\text{пад}}\right|e^{-\alpha x}\sin(\omega t-\beta x),$$

$$i_{\text{пад}}(x,t)=\left|\underline{I}_{\text{пад}}\right|e^{-\alpha x}\sin(\omega t-\beta x),\ \text{где}\ \left|\underline{I}_{\text{пад}}\right|=\left|\frac{\underline{U}_{\text{пад}}}{\underline{Z}_0}\right|.$$

В каждом сечении линии колебания тока и напряжения являются гармоническими;

1. По мере удаления от начала линии амплитуда колебаний затухает по экспоненциальному закону.
2. В каждой последующей точке линии колебания отстают по фазе от колебаний в предыдущей точке (знак «минус» перед βx).



Скорость распространения вдоль цепи состояния равной фазы называется фазовой скоростью.

Определим фазовую скорость распространения волны $v_ф$ из условия:

$$\omega t_1 - \beta x_1 = \omega t_2 - \beta x_2 \text{, откуда } v_ф = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\omega}{\beta}.$$

Вывод: первые слагаемые описывают падающие волны.

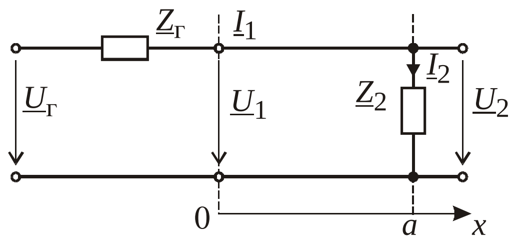
Рассмотрим вторые слагаемые:

$$u_{отр}(x,t) = \left|\underline{U}_{отр}\right| e^{\alpha x} \sin(\omega t + \beta x),\; i_{отр}(x,t) = -\left|\underline{I}_{отр}\right| e^{\alpha x} \sin(\omega t + \beta x) \text{, где } \left|\underline{I}_{отр}\right| = \left|\frac{\underline{U}_{отр}}{\underline{Z}_0}\right|.$$

Эти слагаемые описывают волны точно такого же типа, как и падающие, но распространяющиеся в обратном направлении (знак «плюс» перед βx). Эти волны называются отраженными.

Коэффициенты отражения по току и напряжению. Режимы работы линии

Представим длинную линию в следующем виде:



Определим коэффициент отражения волны от конца линии, нагруженной на сопротивление $\underline{Z}_2$.

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_{пад}(a) + \underline{U}_{отр}(a) = \underline{Z}_0\left(\underline{I}_{пад}(a) - \underline{I}_{отр}(a)\right),$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_{пад}(a) + \underline{I}_{отр}(a) = \frac{1}{\underline{Z}_0}\left(\underline{U}_{пад}(a) - \underline{U}_{отр}(a)\right).$$

Напряжение на сопротивлении $\underline{Z}_2$ определяется согласно закону Ома: $\underline{U}_2 = \underline{Z}_2 \underline{I}_2$.

Принимая во внимание выше сказанное, имеем:

$$\underline{I}_2 \underline{Z}_2 = \underline{U}_{пад}(a) + \underline{U}_{отр}(a) \text{ и } \underline{I}_2 \underline{Z}_0 = \underline{U}_{пад}(a) - \underline{U}_{отр}(a).$$

Определим падающую и отраженную компоненту волны в конце линии.

$$\underline{U}_{пад}(a) = \frac{1}{2}\underline{I}_2\left(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_0\right),\; \underline{U}_{отр}(a) = \frac{1}{2}\underline{I}_2\left(\underline{Z}_2 - \underline{Z}_0\right).$$

Введем понятие коэффициента отражения по напряжению, как отношение отраженной волны к падающей волне в конце линии. $\underline{R}_u = \dfrac{\underline{U}_{\text{отр}}(a)}{\underline{U}_{\text{пад}}(a)} = \dfrac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_0}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_0}$.

По аналогии определим коэффициент отражения по току.

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_0} = \underline{I}_{\text{пад}}(a) - \underline{I}_{\text{отр}}(a), \ \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_2} = \underline{I}_{\text{пад}}(a) + \underline{I}_{\text{отр}}(a).$$

Определим падающую и отраженную компоненты волны в конце линии, $\underline{I}_{\text{отр}}(a) = \dfrac{1}{2}\underline{U}_2\left(\dfrac{1}{\underline{Z}_2} - \dfrac{1}{\underline{Z}_0}\right)$.

Выражение для коэффициента отражения по току примет вид: $\underline{R}_i = \dfrac{\underline{I}_{\text{отр}}(a)}{\underline{I}_{\text{пад}}(a)} = \dfrac{\underline{Z}_0 - \underline{Z}_2}{\underline{Z}_0 + \underline{Z}_2} = -\underline{R}_u$.

В случае, когда $\underline{Z}_2 = 0$ – длинная линия является короткозамкнутой. При этом, $R_u = -1$, а $R_i = 1$, напряжение будет равно нулю, а ток имеет максимальное значение (режим короткого замыкания). Если $\underline{Z}_2 = \infty$ – длинная линия работает на холостом ходе. При этом, $R_u = 1$, а $R_i = -1$, ток будет равен нулю, а напряжение имеет максимальное значение (режим холостого хода). Если $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_0$ – согласованный режим работы линии. При этом $R_u = R_i = 0$, энергия волны передается через линию без потерь.

Лекция 2

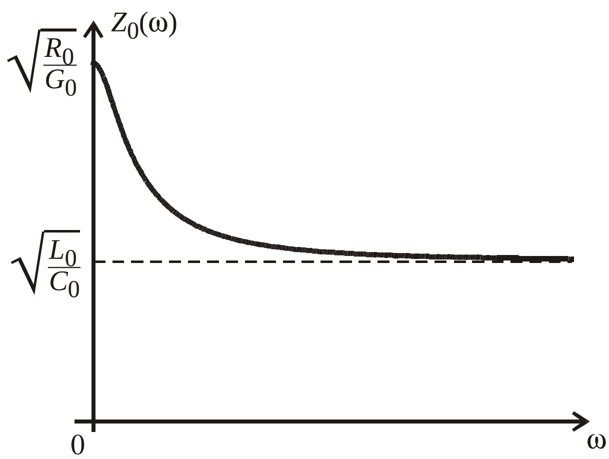
Волновое сопротивление длинной линии.

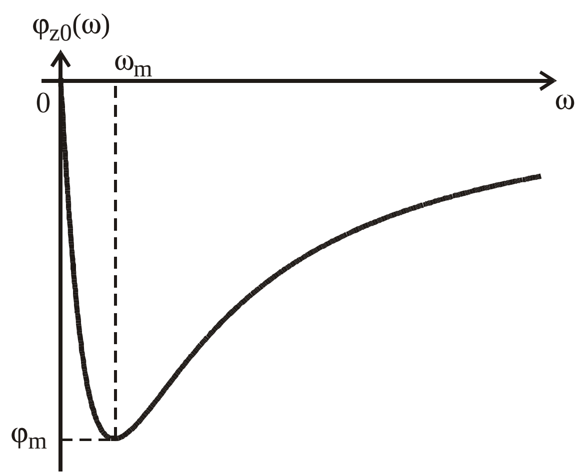
Волновое сопротивление $\underline{Z}_0 = \sqrt{\dfrac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} = Z_0 e^{j\varphi_{zo}}$.

Волновое сопротивление не зависит от длины линии, а определяется ее первичными параметрами. Определим модуль и аргумент волнового сопротивления соответственно:

$$Z_0 = \sqrt[4]{\frac{R_0^2 + (\omega L_0)^2}{G_0^2 + (\omega C_0)^2}}, \ \varphi_{zo} = \frac{1}{2}\left(\text{arctg}\frac{\omega L_0}{R_0} - \text{arctg}\frac{\omega C_0}{G_0}\right).$$

Построим графическую зависимость $Z_0(\omega)$ и $\varphi_{zo}(\omega)$. Для всех реально существующих линий $\dfrac{R_0}{G_0} > \dfrac{L_0}{C_0}$, поэтому:





Самостоятельно определить ω_m! <u>Ответ</u>: $\omega_m = \sqrt{\dfrac{R_0G_0}{L_0C_0}}$.

Используя уравнения передачи вида: $\underline{U}_1 = \underline{U}_2 \mathrm{ch}\underline{\gamma}_0 a + \underline{I}_2 \underline{Z}_0 \mathrm{sh}\underline{\gamma}_0 a$, $\underline{I}_1 = \underline{I}_2 \mathrm{ch}\underline{\gamma}_0 a + \dfrac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_0} \mathrm{sh}\underline{\gamma}_0 a$,

определим напряжение и ток в начале линии при согласованном режиме, когда $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_0$, где $\underline{Z}_2$ – сопротивление нагрузки: $\underline{U}_1 = \underline{U}_2 \mathrm{ch}\underline{\gamma}_0 a + \underline{I}_2 \underline{Z}_2 \mathrm{sh}\underline{\gamma}_0 a$, $\underline{I}_1 = \underline{I}_2 \mathrm{ch}\underline{\gamma}_0 a + \dfrac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_2} \mathrm{sh}\underline{\gamma}_0 a$,

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 \mathrm{ch}\underline{\gamma}_0 a + \underline{U}_2 \mathrm{sh}\underline{\gamma}_0 a,\ \underline{I}_1 = \underline{I}_2 \mathrm{ch}\underline{\gamma}_0 a + \underline{I}_2 \mathrm{sh}\underline{\gamma}_0 a,$$

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 \left(\mathrm{ch}\underline{\gamma}_0 a + \mathrm{sh}\underline{\gamma}_0 a\right),\ \underline{I}_1 = \underline{I}_2 \left(\mathrm{ch}\underline{\gamma}_0 a + \mathrm{sh}\underline{\gamma}_0 a\right).$$

Поскольку $\mathrm{ch}\underline{\gamma}_0 a = \dfrac{e^{\underline{\gamma}_0 a} + e^{-\underline{\gamma}_0 a}}{2}$, $\mathrm{sh}\underline{\gamma}_0 a = \dfrac{e^{\underline{\gamma}_0 a} - e^{-\underline{\gamma}_0 a}}{2}$, тогда $\mathrm{ch}\underline{\gamma}_0 a + \mathrm{sh}\underline{\gamma}_0 a = e^{\underline{\gamma}_0 a}$.

Окончательно получим: $\underline{U}_1 = \underline{U}_2 e^{\underline{\gamma}_0 a}$, $\underline{I}_1 = \underline{I}_2 e^{\underline{\gamma}_0 a}$.

Из последних уравнений легко определить напряжение и ток в конце линии: $\underline{U}_2 = \underline{U}_1 e^{-\underline{\gamma}_0 a}$, $\underline{I}_2 = \underline{I}_1 e^{-\underline{\gamma}_0 a}$. Напряжение и ток в любой точке линии при согласованном режиме определяются: $\underline{U}(x) = \underline{U}_1 e^{-\underline{\gamma}_0 x}$, $\underline{I}(x) = \underline{I}_1 e^{-\underline{\gamma}_0 x}$.

Коэффициент распространения. Способ определения первичных параметров

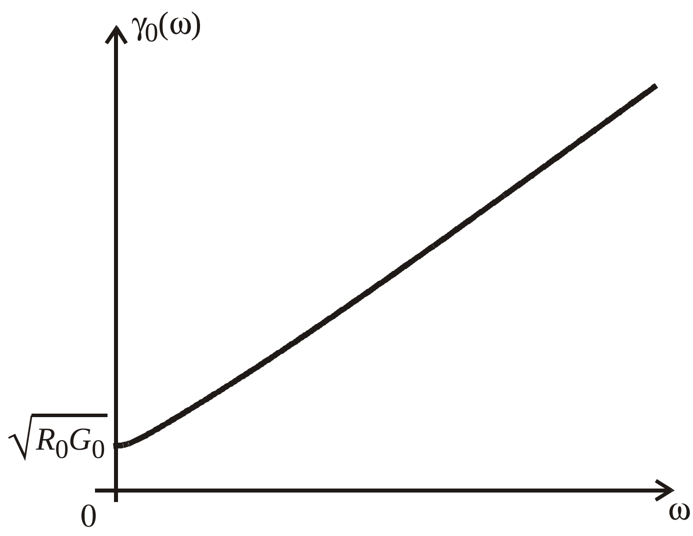
Коэффициент распространения: $\underline{\gamma}_0 = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)\cdot(G_0 + j\omega C_0)} = \gamma_0 e^{j\varphi_{\gamma_0}} = \alpha + j\beta$, откуда

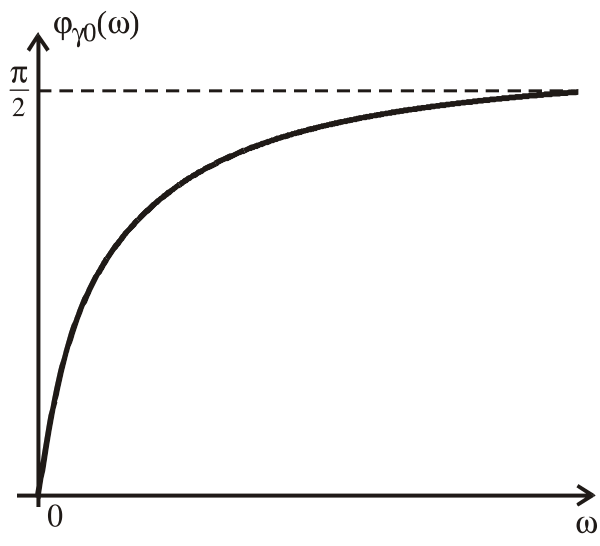
$\alpha = \gamma_0 \cos(\varphi_{\gamma o})$ – коэффициент ослабления, $\beta = \gamma_0 \sin(\varphi_{\gamma o})$ – коэффициент фазы.

Определим модуль и аргумент коэффициента распространения соответственно:

$$\gamma_0 = \sqrt[4]{\left(R_0^2 + (\omega L_0)^2\right)\cdot\left(G_0^2 + (\omega C_0)^2\right)},\ \varphi_{\gamma_o} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{arctg}\frac{\omega L_0}{R_0} + \mathrm{arctg}\frac{\omega C_0}{G_0}\right).$$

Построим графическую зависимость $\gamma_0(\omega)$ и $\varphi_{\gamma o}(\omega)$.





При согласованном режиме $\underline{U}(x) = \underline{U}_1 e^{-\underline{\gamma}_0 x}$, $\underline{I}(x) = \underline{I}_1 e^{-\underline{\gamma}_0 x}$, отсюда: $\dfrac{\underline{U}_1}{\underline{U}(x)} = \dfrac{\underline{I}_1}{\underline{I}(x)} = e^{\underline{\gamma}_0 x} = e^{(\alpha + j\beta)x}$.

Пусть $\underline{U}_1 = U_1 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_{u1}}$, $\underline{I}_1 = I_1 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_{i1}}$, $\underline{U}(x) = U(x)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_{ux}}$, $\underline{I}(x) = I(x)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_{ix}}$, тогда

$$\frac{U_1}{U(x)}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi_{u1}-\varphi_{ux})} = \frac{I_1}{I(x)}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi_{i1}-\varphi_{ix})} = \mathrm{e}^{\alpha x}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta x}, \text{ следовательно}$$

$\dfrac{U_1}{U(x)} = \dfrac{I_1}{I(x)} = \mathrm{e}^{\alpha x}$, $\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi_{u1}-\varphi_{ux})} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi_{i1}-\varphi_{ix})} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta x}$, откуда определяем:

$$\alpha = \ln\frac{U_1}{U(x)} = \ln\frac{I_1}{I(x)} \left[\frac{\text{Нп}}{\text{м}}\right], \text{ либо } \alpha = 20\lg\frac{U_1}{U(x)} = 20\lg\frac{I_1}{I(x)} \left[\frac{\text{Дб}}{\text{м}}\right].$$

$$\beta x = \varphi_{u1} - \varphi_{ux} = \varphi_{i1} - \varphi_{ix}, \text{ для линии длинной } x = 1\,\text{м}, \text{ получаем } \beta = \varphi_{u1} - \varphi_{ux} = \varphi_{i1} - \varphi_{ix} \left[\frac{\text{рад}}{\text{м}}\right].$$

Рассмотрим способ определения первичных параметров по известным вторичным параметрам.

Так как $\underline{\gamma}_0 = \sqrt{(R_0 + \mathrm{j}\omega L_0)\cdot(G_0 + \mathrm{j}\omega C_0)}$, $\underline{Z}_0 = \sqrt{\dfrac{R_0 + \mathrm{j}\omega L_0}{G_0 + \mathrm{j}\omega C_0}}$, то

$$\underline{\gamma}_0 \underline{Z}_0 = R_0 + \mathrm{j}\omega L_0,\ \underline{\gamma}_0 \underline{Z}_0^{-1} = G_0 + \mathrm{j}\omega C_0.$$

Таким образом:

$$R_0 = \mathrm{Re}\left(\underline{\gamma}_0 \underline{Z}_0\right),\ L_0 = \frac{1}{\omega}\mathrm{Im}\left(\underline{\gamma}_0 \underline{Z}_0\right),\ G_0 = \mathrm{Re}\left(\underline{\gamma}_0 \underline{Z}_0^{-1}\right),\ C_0 = \frac{1}{\omega}\mathrm{Im}\left(\underline{\gamma}_0 \underline{Z}_0^{-1}\right).$$

Входное сопротивление длинной линии

Входное сопротивление $\underline{Z}_{\text{вх}}$ линии определяется отношением напряжения и тока в начале линии. Определим входное сопротивление с помощью уравнений передачи:

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{U}_2 \mathrm{ch}\underline{\gamma}_0 a + \underline{I}_2 \underline{Z}_0 \mathrm{sh}\underline{\gamma}_0 a}{\underline{I}_2 \mathrm{ch}\underline{\gamma}_0 a + \dfrac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_0}\mathrm{sh}\underline{\gamma}_0 a} = \frac{\underline{I}_2 \underline{Z}_2 \mathrm{ch}\underline{\gamma}_0 a + \underline{I}_2 \underline{Z}_0 \mathrm{sh}\underline{\gamma}_0 a}{\underline{I}_2 \mathrm{ch}\underline{\gamma}_0 a + \left(\underline{I}_2 \dfrac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_0}\right)\mathrm{sh}\underline{\gamma}_0 a}, \text{ после преобразований}$$

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \underline{Z}_0 \frac{\underline{Z}_2 \mathrm{ch}\underline{\gamma}_0 a + \underline{Z}_0 \mathrm{sh}\underline{\gamma}_0 a}{\underline{Z}_0 \mathrm{ch}\underline{\gamma}_0 a + \underline{Z}_2 \mathrm{sh}\underline{\gamma}_0 a}.$$

Рассмотрим частные случаи режима работы линии.

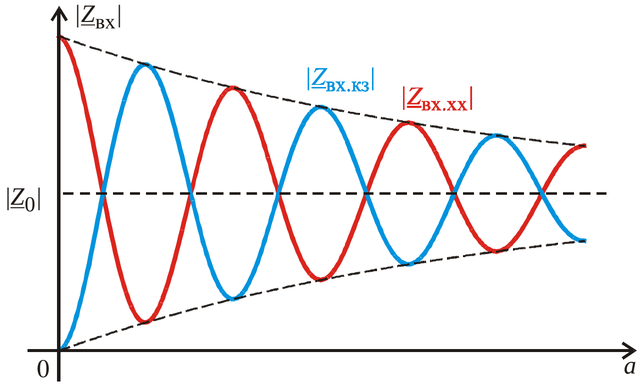
1. При согласованном режиме работы $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_0$, тогда входное сопротивление линии равно волновому сопротивлению: $\underline{Z}_{\text{вх}} = \underline{Z}_0$.
2. В режиме короткого замыкания $\underline{Z}_2 = 0$, тогда $\underline{Z}_{\text{вх}} = \underline{Z}_{\text{вх. кз}} = \underline{Z}_0 \dfrac{\underline{Z}_0 \mathrm{sh}\underline{\gamma}_0 a}{\underline{Z}_0 \mathrm{ch}\underline{\gamma}_0 a} = \underline{Z}_0 \mathrm{th}\underline{\gamma}_0 a$.
3. В режиме холостого хода $\underline{Z}_2 = \infty$, тогда $\underline{Z}_{\text{вх}} = \underline{Z}_{\text{вх. хх}} = \underline{Z}_0 \mathrm{cth}\underline{\gamma}_0 a$.

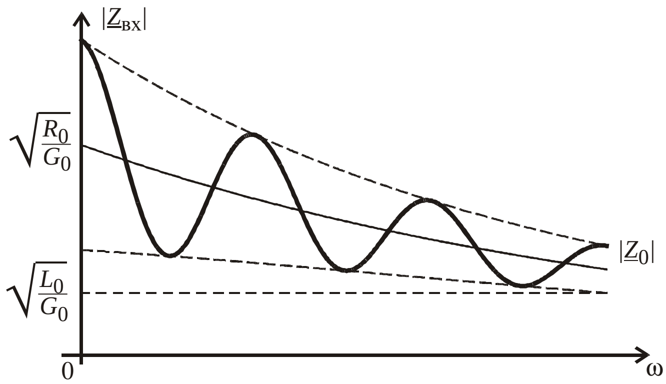
На практике удобно входное сопротивление линии выражать через параметры холостого хода и короткого замыкания, то есть $\underline{Z}_{\text{вх. хх}}$ и $\underline{Z}_{\text{вх. кз}}$.

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \underline{Z}_0 \frac{\underline{Z}_2 \mathrm{ch}\underline{\gamma}_0 a + \underline{Z}_0 \mathrm{sh}\underline{\gamma}_0 a}{\underline{Z}_0 \mathrm{ch}\underline{\gamma}_0 a + \underline{Z}_2 \mathrm{sh}\underline{\gamma}_0 a} = \frac{\underline{Z}_0}{\underline{Z}_0}\cdot\frac{\mathrm{ch}\underline{\gamma}_0 a}{\mathrm{ch}\underline{\gamma}_0 a}\cdot\frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_0 \mathrm{th}\underline{\gamma}_0 a}{1 + \dfrac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_0}\mathrm{th}\underline{\gamma}_0 a} = \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_0 \mathrm{th}\underline{\gamma}_0 a}{1 + \dfrac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_0}\mathrm{th}\underline{\gamma}_0 a} = \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_0 \mathrm{th}\underline{\gamma}_0 a}{1 + \dfrac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_0 \mathrm{cth}\underline{\gamma}_0 a}},$$

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{\text{вх. кз}}}{1 + \dfrac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_{\text{вх. хх}}}} = \underline{Z}_{\text{вх. хх}} \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{\text{вх. кз}}}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{\text{вх. хх}}}.$$

Представим зависимость модулей сопротивлений ХХ и КЗ от длины линии и зависимость модуля $\underline{Z}_{\text{вх}}$ от частоты при несогласованной нагрузке.





Выводы:

1. Колебательный характер входного сопротивления при несогласованном режиме объясняется наличием в линии падающих и отраженных волн.
2. При изменении частоты и длины линии изменяется фаза отраженной волны.
3. Если в начале линии отраженная и падающая волна напряжения совпадают по фазе (отраженная и падающая волна тока находятся в противофазе), то $\left|Z_{\text{вх max}}\right| = \dfrac{\left|U_{1\max}\right|}{\left|I_{1\min}\right|}$.
4. Если в начале линии отраженная и падающая волна напряжения находятся в противофазе (отраженная и падающая волна тока совпадают по фазе), то $\left|Z_{\text{вх min}}\right| = \dfrac{\left|U_{1\min}\right|}{\left|I_{1\max}\right|}$.

Линия без потерь. Согласованный режим.

Линия без потерь – это линия, у которой рассеяние энергии отсутствует, то есть $R_0 = G_0 = 0$.

Определим коэффициент распространения линии без потерь:

$$\underline{\gamma}_0 = \sqrt{(R_0 + \mathrm{j}\omega L_0)\cdot(G_0 + \mathrm{j}\omega C_0)} = \alpha + \mathrm{j}\beta = \sqrt{-\omega^2 L_0 C_0} = \mathrm{j}\omega\sqrt{L_0 C_0}\,.$$

Отсюда коэффициент ослабления $\alpha = 0$, а коэффициент фазы $\beta = \omega\sqrt{L_0 C_0}$ линейно зависит от частоты. Из курса физики известно, что длина волны λ – расстояние между двумя точками, взятыми в направлении распространения волны, фазы в которых отличаются на 2π, то есть $\beta\lambda = 2\pi$, откуда $\lambda = \dfrac{2\pi}{\beta}$. Используя уравнения передачи общего вида:

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 \mathrm{ch}\underline{\gamma}_0 a + \underline{I}_2 \underline{Z}_0 \mathrm{sh}\underline{\gamma}_0 a\,,\ \underline{I}_1 = \underline{I}_2 \mathrm{ch}\underline{\gamma}_0 a + \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_0}\mathrm{sh}\underline{\gamma}_0 a\,,$$ поскольку $\underline{\gamma}_0 = \mathrm{j}\beta$, имеем

$\mathrm{ch}\underline{\gamma}_0 a = \mathrm{ch}(\mathrm{j}\beta a) = \cos\beta a$, и $\mathrm{sh}\underline{\gamma}_0 a = \mathrm{sh}(\mathrm{j}\beta a) = \mathrm{j}\sin\beta a$.

Уравнения передачи для линии без потерь выглядят в виде:

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 \cos\beta a + \mathrm{j}\underline{I}_2 \underline{Z}_0 \sin\beta a\,,\ \underline{I}_1 = \underline{I}_2 \cos\beta a + \mathrm{j}\frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_0}\sin\beta a\,.$$

Для произвольной точки линии без потерь уравнения запишем в виде:

$$\underline{U}(x) = \underline{U}_2 \cos\beta x + \mathrm{j}\underline{I}_2 \underline{Z}_0 \sin\beta x\,,\ \underline{I}(x) = \underline{I}_2 \cos\beta x + \mathrm{j}\frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_0}\sin\beta x\,.$$

При согласованном режиме $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_0$, с учетом того, что $\underline{U}_2 = \underline{I}_2 \underline{Z}_2$, получим

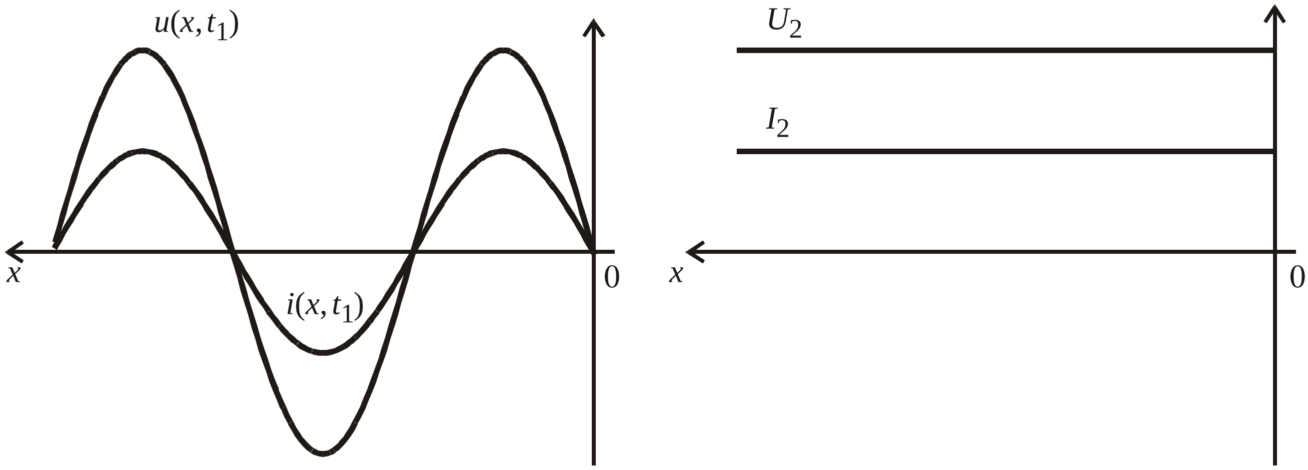
$$\underline{U}(x) = \underline{U}_2(\cos\beta x + \mathrm{j}\sin\beta x) = \underline{U}_2 e^{\mathrm{j}\beta x} = U_2 e^{\mathrm{j}(\omega t + \beta x)},$$

$$\underline{I}(x)=\underline{I}_2(\cos\beta x+\mathrm{j}\sin\beta x)=\underline{I}_2 e^{\mathrm{j}\beta x}=I_2 e^{\mathrm{j}(\omega t+\beta x)}.$$

Запишем уравнения для мгновенных значений напряжения и тока

$$u(x,t)=U_2\sin(\omega t+\beta x),\ i(x,t)=I_2\sin(\omega t+\beta x).$$

Эти уравнения описывают падающие волны, распространяющиеся в линии слева направо. В линии без потерь при согласованном включении существуют только падающие (бегущие) волны. Данный режим работы еще называют режимом бегущей волны.



Линия без потерь. Режим короткого замыкания и холостого хода.

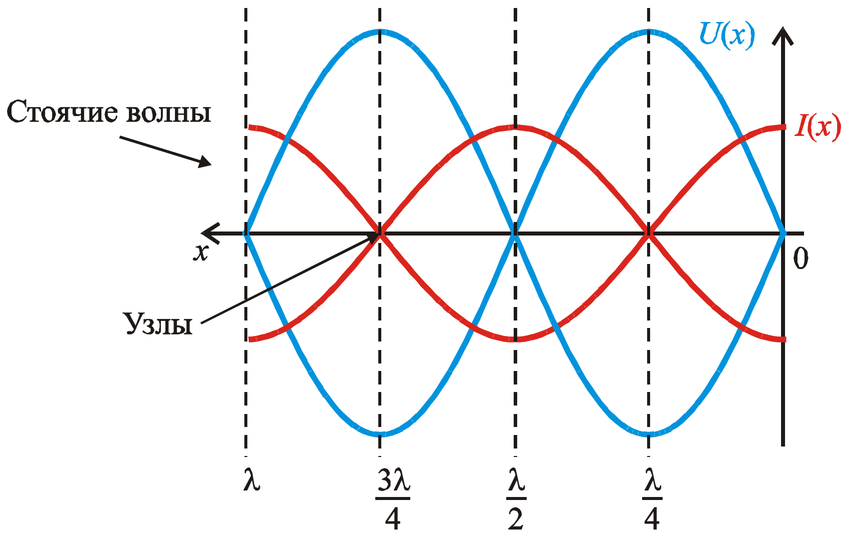
В режиме короткого замыкания $\underline{Z}_2=0$, поэтому $\underline{U}_2=0$.

$$\underline{U}(x)=\mathrm{j}\underline{I}_2\underline{Z}_0\sin\beta x,\ \underline{I}(x)=\underline{I}_2\cos\beta x.$$

Запишем выражения в мгновенной форме:

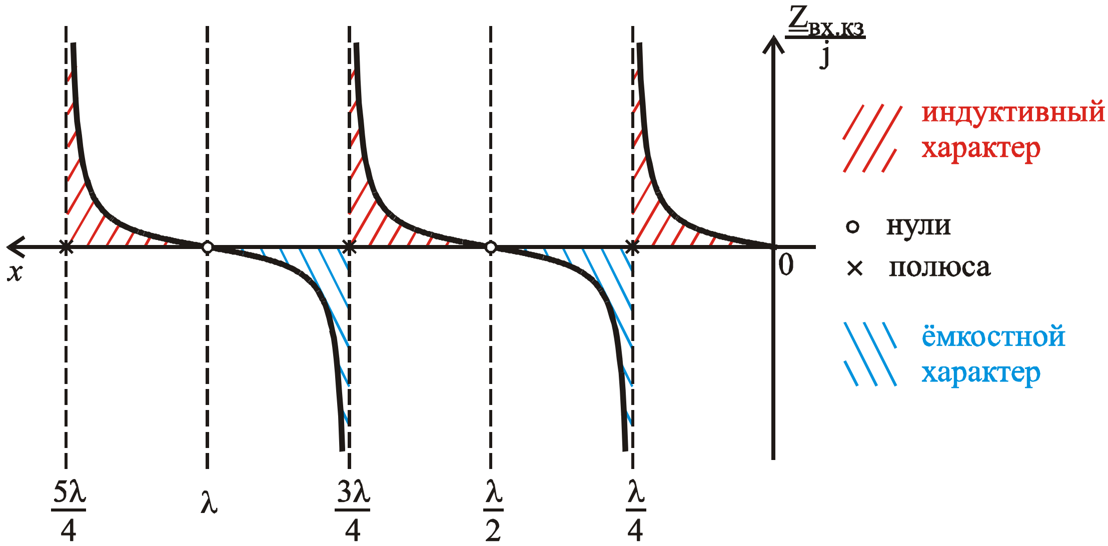
$$u(x,t)=|\underline{I}_2|\rho_0\sin\beta x\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right),\ i(x,t)=|\underline{I}_2|\cos\beta x\sin\omega t,\ \text{где}\ \rho_0=\sqrt{\frac{L_0}{C_0}}.$$

Так как $\beta=\dfrac{2\pi}{\lambda}$, амплитуда напряжения: $U(x)=|\underline{I}_2|\rho_0\sin\dfrac{2\pi}{\lambda}x$, амплитуда тока: $I(x)=|\underline{I}_2|\cos\dfrac{2\pi}{\lambda}x$.



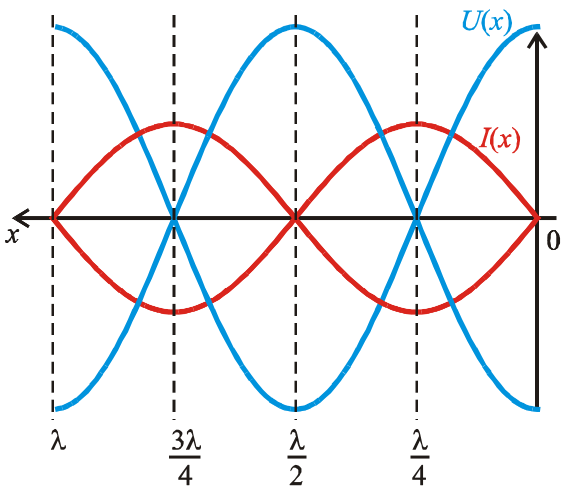
Определим входное сопротивление линии без потерь в режиме КЗ.

$$\underline{Z}_{\text{вх. кз}}=\frac{\underline{U}(x)}{\underline{I}(x)}=\frac{\mathrm{j}\underline{Z}_0\underline{I}_2\sin\beta x}{\underline{I}_2\cos\beta x}=\mathrm{j}\underline{Z}_0\mathrm{tg}\beta x.$$



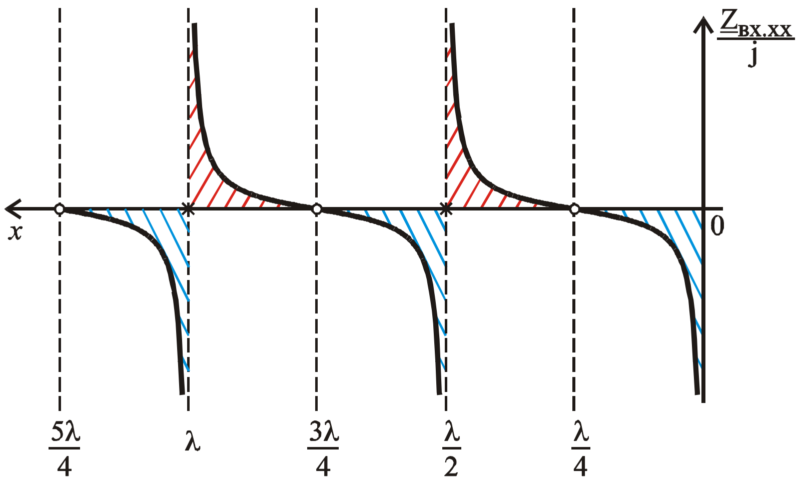
В режиме холостого хода $\underline{Z}_2 = \infty$, поэтому $\underline{I}_2 = 0$.

$\underline{U}(x) = \underline{U}_2 \cos\beta x$, $\underline{I}(x) = \mathrm{j}\dfrac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_0}\sin\beta x$, следовательно $U(x) = |\underline{U}_2|\cos\beta x$, $I(x) = \dfrac{|\underline{U}_2|}{\rho_0}\sin\beta x$.



Определим входное сопротивление линии без потерь в режиме ХХ.

$$\underline{Z}_{\text{вх. хх}} = \frac{\underline{U}(x)}{\underline{I}(x)} = \frac{\underline{Z}_0\underline{U}_2\cos\beta x}{\mathrm{j}\underline{U}_2\sin\beta x} = -\mathrm{j}\underline{Z}_0\mathrm{ctg}\beta x\,.$$



Линия без потерь. Смешанный режим

Рассмотрим работу линии без потерь, если $\underline{Z}_2 > \underline{Z}_0$. Данный режим работы называется смешанным, то есть одновременно наблюдается режим бегущей волны и режим стоячей волны. Для оценки близости к режиму бегущей волны вводят коэффициент бегущей волны (КБВ):

$$КБВ = \left|\frac{\underline{U}_{\min}(x)}{\underline{U}_{\max}(x)}\right| = \left|\frac{\underline{U}_{\text{пад}}(x) - \underline{U}_{\text{отр}}(x)}{\underline{U}_{\text{пад}}(x) + \underline{U}_{\text{отр}}(x)}\right| = \frac{1-|\underline{R}_{\text{u}}|}{1+|\underline{R}_{\text{u}}|}$$

Иногда на практике используют коэффициент стоячей волны (КСВ).

$$КСВ = \left|\frac{\underline{U}_{\max}(x)}{\underline{U}_{\min}(x)}\right| = \left|\frac{\underline{U}_{\text{пад}}(x) + \underline{U}_{\text{отр}}(x)}{\underline{U}_{\text{пад}}(x) - \underline{U}_{\text{отр}}(x)}\right| = \frac{1+|\underline{R}_{\text{u}}|}{1-|\underline{R}_{\text{u}}|}.$$

Область изменения данных коэффициентов: $0 \le КБВ \le 1$, $1 \le КСВ \le \infty$.

Если $КБВ = 0$, $КСВ = \infty$ – стоячая волна, если $КБВ = 1$, $КСВ = 1$ – бегущая волна.

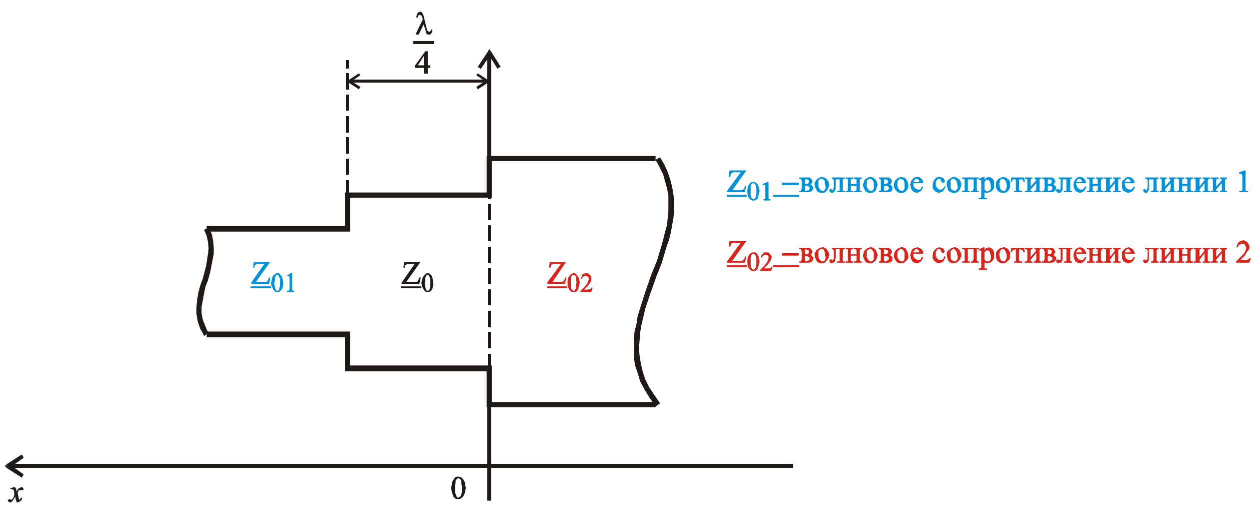
Ранее было показано, что $\underline{R}_{\text{u}} = \dfrac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_0}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_0}$ – комплексный коэффициент отражения по напряжению.

Следовательно: $КБВ = \dfrac{1-|\underline{R}_{\text{u}}|}{1+|\underline{R}_{\text{u}}|} = \dfrac{|\underline{Z}_0|}{|\underline{Z}_2|}$, $КСВ = \dfrac{1+|\underline{R}_{\text{u}}|}{1-|\underline{R}_{\text{u}}|} = \dfrac{|\underline{Z}_2|}{|\underline{Z}_0|}$.

Лекция 3

Четвертьволновый трансформатор сопротивлений.

Важным в теории цепей с распределенными параметрами является вопрос согласованного включения отрезков линии без потерь с разными волновыми сопротивлениями. Хорошее согласование обеспечивает так называемый четвертьволновой трансформатор сопротивлений.



Уравнения передачи определяются в следующем виде:

$$\underline{U}\left(\frac{\lambda}{4}\right) = \mathrm{j}\underline{I}_2\underline{Z}_0, \quad \underline{I}\left(\frac{\lambda}{4}\right) = \mathrm{j}\frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_0}.$$

Входное сопротивление будем определять как:

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \frac{\underline{U}\left(\frac{\lambda}{4}\right)}{\underline{I}\left(\frac{\lambda}{4}\right)} = \underline{Z}_0^2\frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_2} = \underline{Z}_0^2\frac{1}{\underline{Z}_2}.$$

Определим величину волнового сопротивления согласующего участок линии.

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \underline{Z}_0^2 \frac{1}{\underline{Z}_2}, \text{ откуда } \underline{Z}_0 = \sqrt{\underline{Z}_{\text{вх}} \underline{Z}_2}.$$

Поскольку линии 1 и 2 имеют разные волновые сопротивления то для полного их согласования необходимо выполнить условия $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_{02}$ и $\underline{Z}_{\text{вх}} = \underline{Z}_{01}$. Таким образом, волновое сопротивление согласующего участка должно быть равным: $\underline{Z}_0 = \sqrt{\underline{Z}_{01} \underline{Z}_{02}}$.

Самостоятельно решить задачи!

1. Какой минимальной длины s надо взять отрезок линии без потерь с параметрами L_0 и C_0, чтобы на частоте f получить из него индуктивность L?

Ответ: Короткозамкнутый отрезок длиной $s = \dfrac{\operatorname{arctg}\left(2\pi f L\sqrt{\dfrac{C_0}{L_0}}\right)}{2\pi f\sqrt{L_0 C_0}}$.

2. Линия без потерь с волновым сопротивлением ρ_0 работает на нагрузку Z_2. Определите первичные параметры четвертьволнового трансформатора, обеспечивающего согласование линии.

Ответ: $L_0 = \dfrac{\sqrt{\rho_0 Z_2}}{3 \cdot 10^8}$, $C_0 = \dfrac{1}{3 \cdot 10^8 \cdot \sqrt{\rho_0 Z_2}}$.

Линия без искажений

Линия не будет вносить искажений, если волновое сопротивление, коэффициент ослабления и фазовая скорость не будут зависеть от частоты. Условие передачи сигнала в линии без искажений записывается через первичные параметры следующим образом:

$$\frac{R_0}{G_0} = \frac{L_0}{C_0} \text{ – равенство Хевисайда.}$$

Волновое сопротивление:

$$\underline{Z}_0 = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{L_0\left(\dfrac{R_0}{L_0} + j\omega\right)}{C_0\left(\dfrac{G_0}{C_0} + j\omega\right)}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}, \qquad \underline{Z}_0 = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{R_0\left(1 + j\omega\dfrac{L_0}{R_0}\right)}{G_0\left(1 + j\omega\dfrac{C_0}{G_0}\right)}} = \sqrt{\frac{R_0}{G_0}}.$$

Вывод: волновое сопротивление не зависит от частоты.

Коэффициент распространения:

$$\underline{\gamma}_0 = \sqrt{L_0\left(\frac{R_0}{L_0} + j\omega\right) C_0\left(\frac{G_0}{C_0} + j\omega\right)} = \sqrt{L_0 C_0}\left(\frac{R_0}{L_0} + j\omega\right) = \sqrt{L_0 C_0}\left(\frac{G_0}{C_0} + j\omega\right).$$

Поскольку $\underline{\gamma}_0 = \alpha + j\beta$, то $\alpha = R_0\sqrt{\dfrac{C_0}{L_0}} = G_0\sqrt{\dfrac{L_0}{C_0}}$.

Используя равенство Хевисайда, $\alpha = \sqrt{R_0 G_0}$, $\beta = \omega\sqrt{L_0 C_0}$.

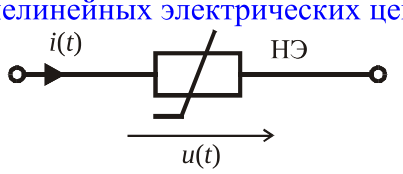
Вывод: коэффициент ослабления не зависит от частоты.

Фазовая скорость:

Ранее было показано, что $v_ф = \dfrac{\omega}{\beta}$, отсюда $v_ф = \dfrac{\omega}{\omega\sqrt{L_0C_0}} = \dfrac{1}{\sqrt{L_0C_0}}$.

Вывод: фазовая скорость не зависит от частоты.

Спектральные методы анализа нелинейных электрических цепей при гармоническом воздействии



Пусть на вход нелинейной резистивной цепи, описываемой ВАХ $i(u)$, действует гармоническое напряжение: $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$.

Требуется определить спектр отклика, то есть спектр тока $i(t)$. Классический метод анализа заключается прямой подстановкой $u(t)$ в $i(u)$, но эта процедура является весьма громоздкой и сложной. Существуют следующие часто применяемые методы определения спектрального состава тока.

- метод тригонометрических функций кратного аргумента
- метод угла отсечки
- метод трех и пяти ординат

Метод тригонометрических функций кратного аргумента.

Этот метод применим в случае полиномиальной аппроксимации ВАХ. Рассмотрим воздействие на нелинейный резистивный элемент, ВАХ которого аппроксимирована полиномом:

$$i(u) = a_0 + a_1u + a_2u^2 + \ldots + a_nu^n,$$

гармонического колебания $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$. Осуществляя прямую подстановку, получаем:

$$i(u) = a_0 + a_1U_m \cos(\omega t + \varphi) + a_2U_m^2 \cos^2(\omega t + \varphi) + \ldots + a_nU_m^n \cos^n(\omega t + \varphi).$$

Понизим порядок данного полинома через тригонометрические функции кратных аргументов, полагая $\alpha = \omega t + \varphi$. Так как $\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$, то

$$\cos^3\alpha = \cos\alpha\left(\frac{1+\cos 2\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\cos 2\alpha\cos\alpha.$$

Учитывая, что $\cos a\cos b = \dfrac{1}{2}\left(\cos(a-b) + \cos(a+b)\right)$ имеем:

$$\cos^3\alpha = \frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{1}{4}(\cos\alpha + \cos 3\alpha) = \frac{3}{4}\cos\alpha + \frac{1}{4}\cos 3\alpha.$$

По аналогии можно получить:

$$\cos^4\alpha = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2\alpha + \frac{1}{8}\cos 4\alpha,\ \cos^5\alpha = \frac{5}{8}\cos\alpha + \frac{5}{16}\cos 3\alpha + \frac{1}{16}\cos 5\alpha.$$

Для тока выражение приобретает вид (ограничимся 6 слагаемыми):

$$i(\alpha) = a_0 + a_1U_m\cos\alpha + a_2U_m^2\left(\frac{1+\cos 2\alpha}{2}\right) + a_3U_m^3\left(\frac{3}{4}\cos\alpha + \frac{1}{4}\cos 3\alpha\right) +$$

$$+ a_4U_m^4\left(\frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2\alpha + \frac{1}{8}\cos 4\alpha\right) + a_5U_m^5\left(\frac{5}{8}\cos\alpha + \frac{5}{16}\cos 3\alpha + \frac{1}{16}\cos 5\alpha\right).$$

Приводим подобные слагаемые:

$$i(\alpha) = \left(a_0 + \frac{1}{2}a_2U_m^2 + \frac{3}{8}a_4U_m^4\right) + \left(a_1U_m + \frac{3}{4}a_3U_m^3 + \frac{5}{8}a_5U_m^5\right)\cos\alpha + \left(\frac{1}{2}a_2U_m^2 + \frac{1}{2}a_4U_m^4\right)\cos 2\alpha +$$

$$+ \left(\frac{1}{4}a_3U_m^3 + \frac{5}{16}a_5U_m^5\right)\cos 3\alpha + \left(\frac{1}{8}a_4U_m^4\right)\cos 4\alpha + \left(\frac{1}{16}a_5U_m^5\right)\cos 5\alpha.$$

Спектральный состав тока можно записать в виде:

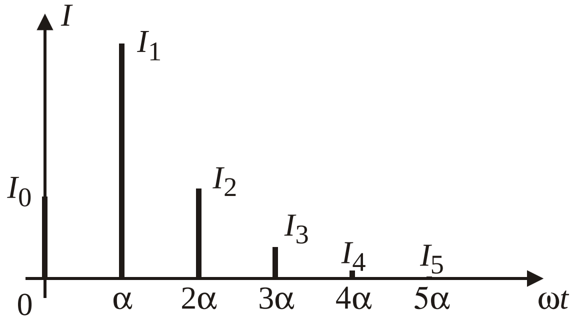
$$i(\alpha) = I_0 + I_1\cos\alpha + I_2\cos 2\alpha + I_3\cos 3\alpha + I_4\cos 4\alpha + I_5\cos 5\alpha,$$

где амплитуды гармоник определяются как:

$$I_0 = a_0 + \frac{1}{2}a_2U_m^2 + \frac{3}{8}a_4U_m^4,\ I_1 = a_1U_m + \frac{3}{4}a_3U_m^3 + \frac{5}{8}a_5U_m^5,$$

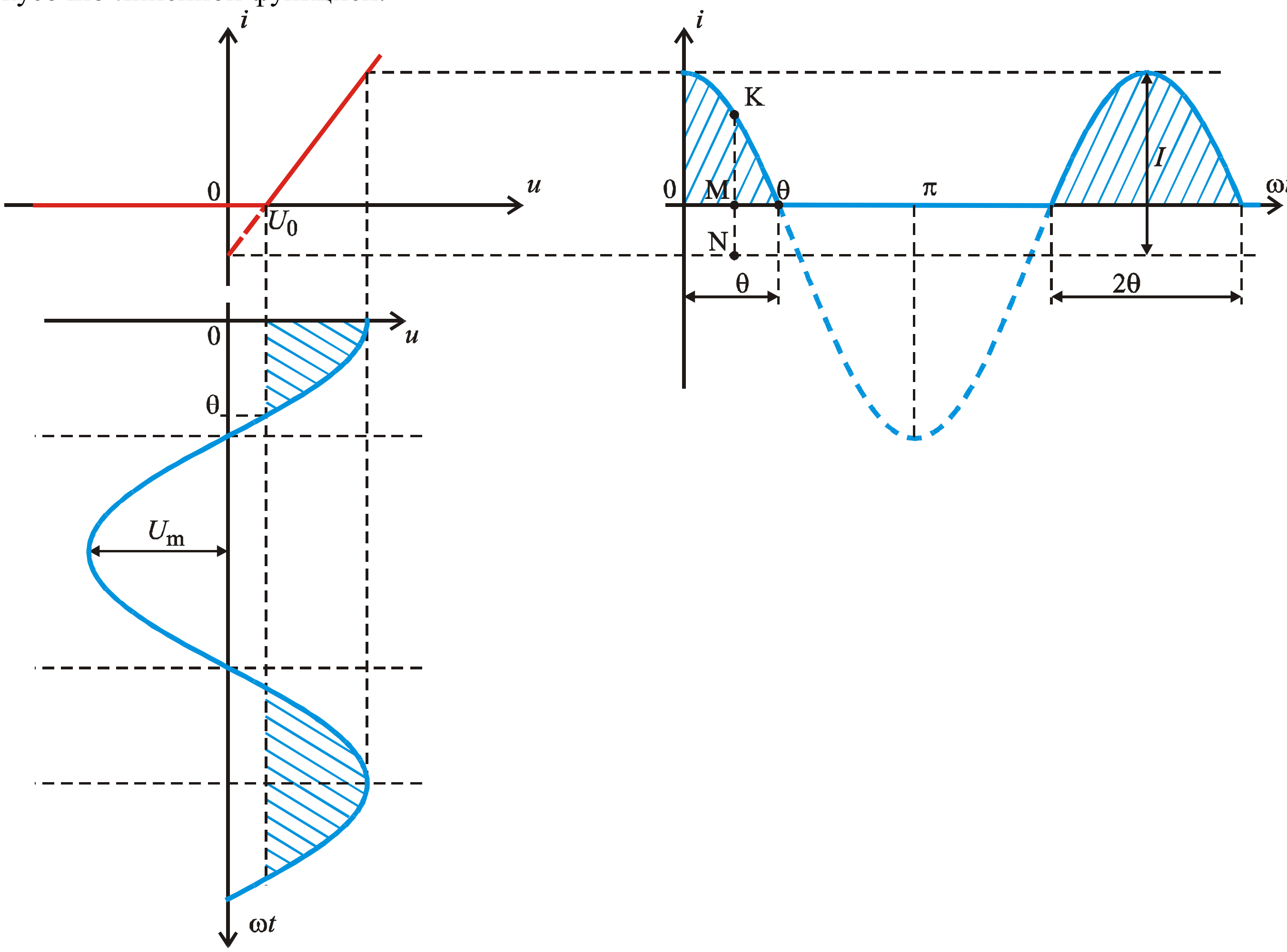
$$I_2 = \frac{1}{2}a_2U_m^2 + \frac{1}{2}a_4U_m^4,\ I_3 = \frac{1}{4}a_3U_m^3 + \frac{5}{16}a_5U_m^5,\ I_4 = \frac{1}{8}a_4U_m^4,\ I_5 = \frac{1}{16}a_5U_m^5.$$

Спектр тока является линейчатым, постоянная составляющая и амплитуды четных гармоник определяются только четными степенями полинома.



Метод угла отсечки

Данный метод применяется при кусочно-линейной аппроксимации ВАХ. Рассмотрим воздействие вида $u(t) = U_m \cos\omega t$ на нелинейный элемент, ВАХ которого аппроксимирована кусочно-линейной функцией.



Применяя метод проекций, удобно сначала, определить ток, которой бы получился в случае линейной характеристики прибора с крутизной *S*. Поскольку нелинейный элемент работает с отсечкой, то только заштрихованная часть напряжения участвует в создании тока. Получившиеся импульсы характеризуются следующими величинами:

Угол отсечки θ – часть периода, в течении которого ток изменяется от максимального до нулевого значения. Максимальное значение тока – I_{max}.

В интервале $0 \le \omega t \le \theta$ ток отличен от нуля и принимает следующее значение:

$$i(t) = |KN| - |MN| = I\cos\omega t - I\cos\theta = I(\cos\omega t - \cos\theta).$$

Максимальное значение тока наблюдается в точке 0, то есть

$$I_{\max} = I(1-\cos\theta) = SU_{\text{m}}(1-\cos\theta).$$

Периодическая последовательность импульсов $i(t)$ представляется в виде ряда Фурье:

$$i(t) = I_0 + I_1\cos\omega t + I_2\cos 2\omega t + \ldots + I_n\cos n\omega t.$$

Откуда спектральные составляющие определяются как:

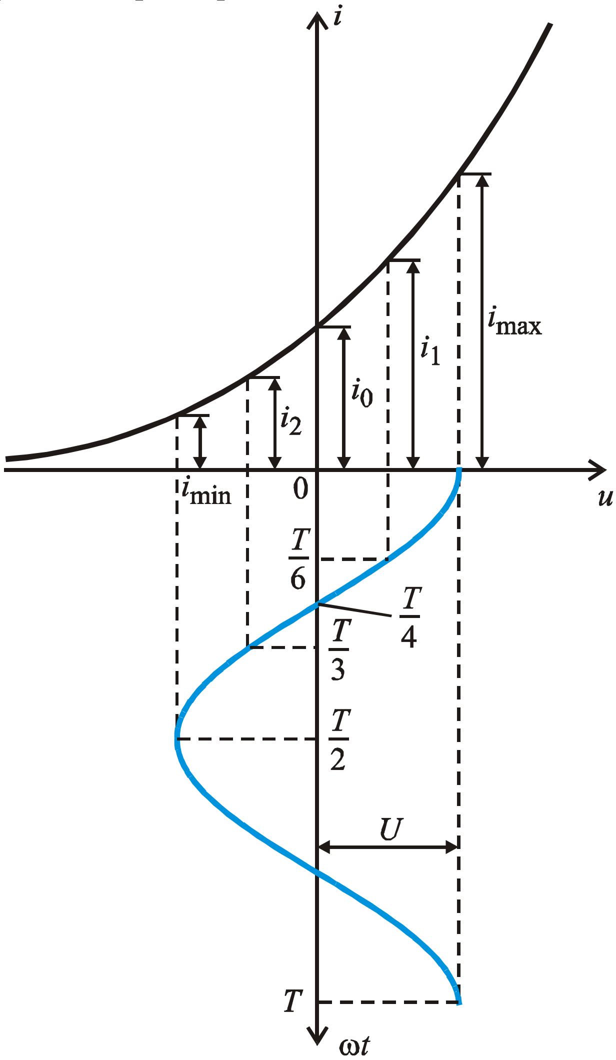
$$I_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\theta}^{\theta} i(t)\,d\omega t = SU_{\text{m}}\eta_0(\theta),\ I_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\theta}^{\theta} i(t)\cos\omega t\,d\omega t = SU_{\text{m}}\eta_1(\theta),$$

$$I_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\theta}^{\theta} i(t)\cos n\omega t\,d\omega t = SU_{\text{m}}\eta_n(\theta),\quad n = 2, 3, 4\ldots$$

где $\eta_0(\theta) = \frac{1}{\pi}(\sin\theta - \theta\cos\theta)$, $\eta_1(\theta) = \frac{1}{\pi}(\theta - \sin\theta\cos\theta)$, $\eta_n(\theta) = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\sin n\theta\cos\theta - n\cos n\theta\sin\theta}{n(n^2-1)}$.

Метод пяти ординат

Данный метод позволяет определить спектральный состав тока, состоящий из постоянной составляющей и амплитуд первых четырёх гармоник.



Ток в нелинейном элементе описывается уравнением вида:

$$i(t) = I_0 + I_1\cos\omega t + I_2\cos 2\omega t + I_3\cos 3\omega t + I_4\cos 4\omega t,\ \text{где}\ \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Учитывая тот факт, что при $t = 0, \frac{T}{6}, \frac{T}{4}, \frac{T}{3}, \frac{T}{2}$ ток приобретает значения $i_{\max}, i_1, i_0, i_2, i_{\min}$ соответственно, получим следующую систему из 5 алгебраических уравнений:

$$(1)\quad i_{max} = I_0 + I_1 + I_2 + I_3 + I_4,$$

$$(2)\quad i_1 = I_0 + \frac{1}{2}I_1 - \frac{1}{2}I_2 - I_3 - \frac{1}{2}I_4,$$

$$(3)\quad i_0 = I_0 - I_2 + I_4,$$

$$(4)\quad i_2 = I_0 - \frac{1}{2}I_1 - \frac{1}{2}I_2 + I_3 - \frac{1}{2}I_4,$$

$$(5)\quad i_{min} = I_0 - I_1 + I_2 - I_3 + I_4.$$

Решим данную систему уравнений относительно неизвестных спектральных составляющих. Сложим и вычтем (1) и (5), получим:

$$i_{max} + i_{min} = 2I_0 + 2I_2 + 2I_4$$
$$i_{max} - i_{min} = 2I_1 + 2I_3$$

Сложим и вычтем (2) и (4), получим:

$$i_1 + i_2 = 2I_0 - I_2 - I_4,$$
$$i_1 - i_2 = I_1 - 2I_3.$$

Из последнего уравнения, определяя $I_1 = i_1 - i_2 + 2I_3$, имеем:

$$i_{max} - i_{min} = 2(i_1 - i_2 + 2I_3) + 2I_3 = 2(i_1 - i_2) + 6I_3,\ \text{откуда}$$

$$\boxed{I_3 = \frac{1}{6}\left(i_{max} - i_{min} - 2(i_1 - i_2)\right)}$$ – третья гармоника тока.

Далее $I_1 = i_1 - i_2 + 2\cdot\frac{1}{6}\left(i_{max} - i_{min} - 2(i_1 - i_2)\right) = \frac{1}{3}(i_{max} - i_{min}) + \frac{1}{3}(i_1 - i_2)$.

Преобразуя последнее выражение, получим:

$$\boxed{I_1 = \frac{1}{3}(i_{max} - i_{min} + i_1 - i_2)}$$ – первая (основная) гармоника тока.

Из (3) $I_0 = i_0 + I_2 - I_4$, учитывая, что $i_{max} + i_{min} = 2I_0 + 2I_2 + 2I_4$ получим:

$$i_{max} + i_{min} = 2(i_0 + I_2 - I_4) + 2I_2 + 2I_4 = 2i_0 + 4I_2,\ \text{откуда}$$

$$\boxed{I_2 = \frac{1}{4}(i_{max} + i_{min} - 2i_0)}$$ – вторая гармоника тока.

Поскольку $i_1 + i_2 = 2I_0 - I_2 - I_4$, $I_0 = i_0 + I_2 - I_4$, имеем:

$$i_1 + i_2 = 2(i_0 + I_2 - I_4) - I_2 - I_4 = 2i_0 + I_2 - 3I_4.$$

Подставляя I_2 в явном виде, получим:

$$i_1 + i_2 = 2i_0 + \frac{1}{4}(i_{max} + i_{min} - 2i_0) - 3I_4,\ \text{откуда}$$

$$\boxed{I_4 = \frac{1}{12}\left(i_{max} + i_{min} - 4(i_1 + i_2) + 6i_0\right)}$$ – четвертая гармоника тока.

Определим постоянную составляющую тока, так как $I_0 = i_0 + I_2 - I_4$, то

$$I_0 = i_0 + \frac{1}{4}(i_{max} + i_{min} - 2i_0) - \frac{1}{12}\left(i_{max} + i_{min} - 4(i_1 + i_2) + 6i_0\right),$$

откуда окончательно имеем:

$$\boxed{I_0 = \frac{1}{6}\left(i_{max} + i_{min} + 2(i_1 + i_2)\right)}$$ – нулевая (постоянная) гармоника тока.

Таким образом, мы определили все спектральные составляющие тока в нелинейном элементе. Построение спектра осуществляется в следующем виде:

Лекция 4

Модуляция. Модулированные колебания

Модуляция – операция преобразования низкочастотного первичного сигнала в высокочастотный сигнал (переносчик), с сохранением содержащейся в нем информации.

Передача сигнала осуществляется высокочастотными модулированными колебаниями. В одном периоде первичного сигнала $T = \dfrac{1}{F} = \dfrac{2\pi}{\Omega}$ укладываются сотни, тысячи и более периодов высокочастотного колебания $T_0 = \dfrac{1}{f_0} = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$. В общем случае модулированное высокочастотное колебание описывается соотношением вида:

$$u(t) = U(t)\cos\left(\omega_0 t + \Delta\varphi(t) + \varphi_0\right) = U(t)\cos\psi(t),$$

где $U(t)$ и $\psi(t)$ – амплитуда, мгновенная фаза сигнала, $\omega(t) = \dfrac{d\psi}{dt}$ называют мгновенной частотой колебания. Если закон изменения мгновенной частоты известен, то мгновенная фаза колебаний определяется как:

$$\psi(t) = \int_0^t \omega(t)\,dt + \varphi_0,$$

где φ_0 – начальная фаза колебаний.

Модуляция обычно заключается в пропорциональном первичному сигналу $x(t)$ изменении параметра переносчика. Отсюда имеем следующие виды модуляций:

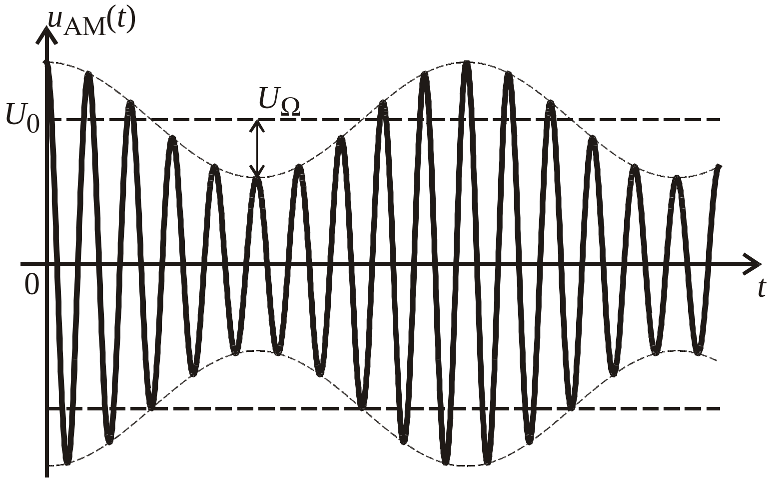
Амплитудная модуляция (АМ) – состоит в пропорциональном первичному сигналу изменении амплитуды переносчика $U_{\text{АМ}} = U_0 + ax(t)$. В результате получаем АМ колебание:

$$u_{\text{АМ}}(t) = \left(U_0 + ax(t)\right)\cos\left(\omega_0 t + \varphi_0\right).$$

В простейшем случае, когда $x(t) = X\cos\Omega t$ имеем следующее модулированное колебание:

$$u_{\text{АМ}}(t) = \left(U_0 + aX\cos\Omega t\right)\cos\left(\omega_0 t + \varphi_0\right).$$

Амплитудно-модулированное колебание



$$m = \frac{U_\Omega}{U_0}$$ – коэффициент модуляции.

Отношение амплитуды огибающей к амплитуде несущего (немодулированного) колебания называют коэффициентом модуляции m.

Коэффициент модуляции, выраженный в процентах, называют глубиной модуляции. Коэффициент модуляции пропорционален амплитуде модулирующего сигнала.

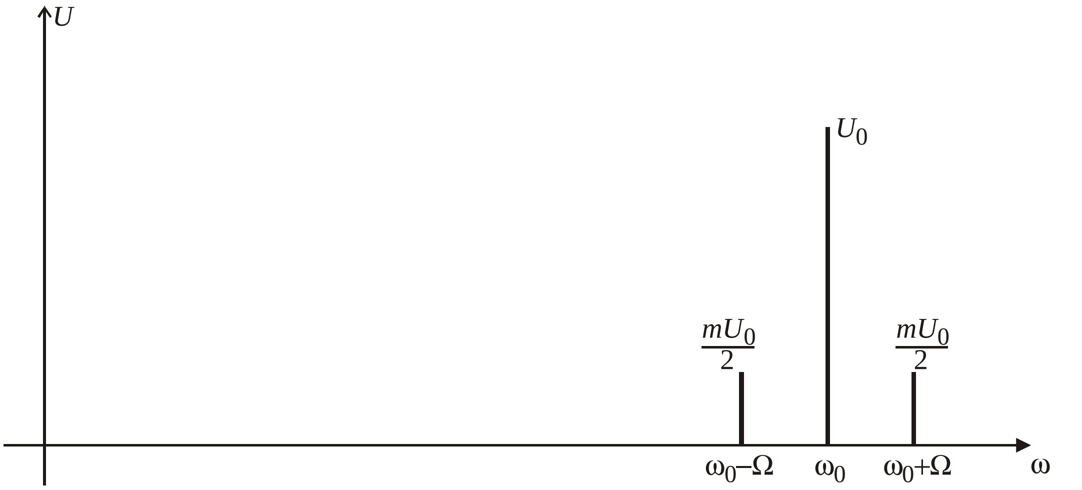
$$u_{\text{АМ}}(t) = U_0\left(1 + m\cos\Omega t\right)\cos\left(\omega_0 t + \varphi_0\right),$$

где $m = \dfrac{U_\Omega}{U_0}$, а $U_\Omega = aX$.

Определим спектр АМ колебания:

$$u_{АМ}(t) = U_0\cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{m}{2}U_0\cos((\omega_0 + \Omega)t + \varphi_0) + \frac{m}{2}U_0\cos((\omega_0 - \Omega)t + \varphi_0).$$

Спектр АМ колебания, модулированного гармоническим сигналом с частотой Ω

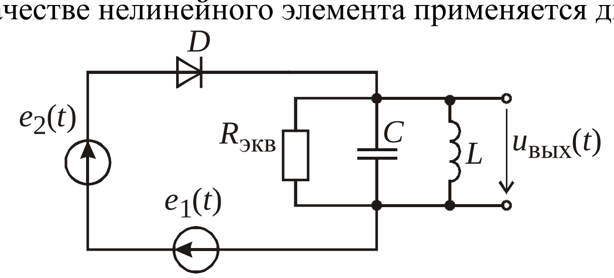


Фазовая модуляция (ФМ) – заключается в пропорциональном первичному сигналу x(t) изменении фазы переносчика $\varphi = \varphi_0 + ax(t)$.

Частотная модуляция (ЧМ) заключается в пропорциональном первичному сигналу изменении мгновенной частоты переносчика $\omega = \omega_0 + ax(t)$.

Нелинейные модуляторы

Амплитудную модуляцию можно осуществить в нелинейных цепях. Наиболее широкое распространение получили такие устройства как нелинейные модуляторы. Представим его схему. В качестве нелинейного элемента применяется диод.



$u_1(t) = U_1\cos\omega_0 t$ – высокочастотное напряжение,

$u_2(t) = U_2\cos\Omega t$ – низкочастотное напряжение.

ВАХ диода D аппроксимируем полиномом второй степени: $i(u) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2$.

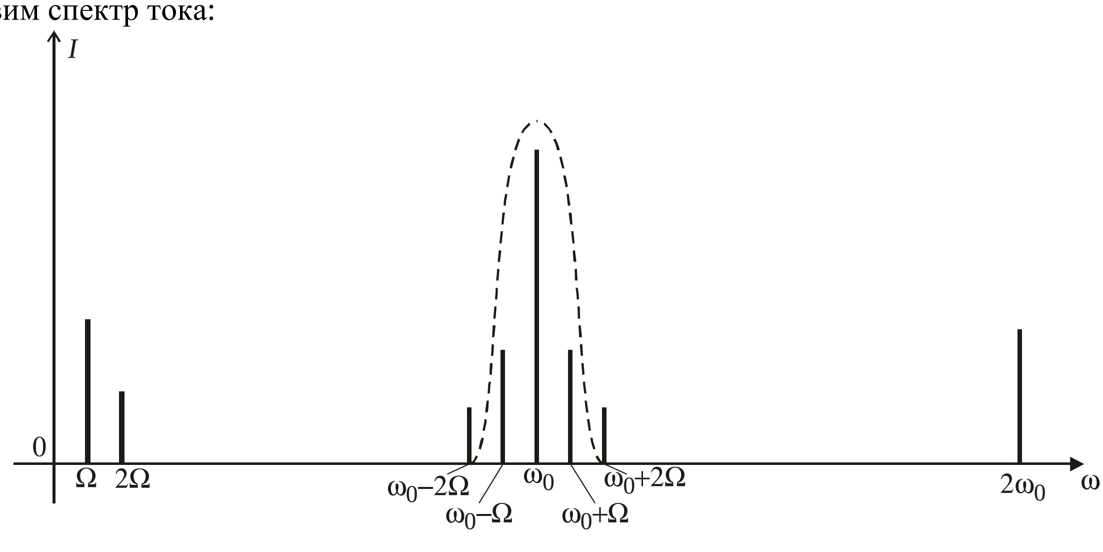
Если $R_{эк}$ меньше сопротивления диода, то общее напряжение:

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) = U_1\cos\omega_0 t + U_2\cos\Omega t.$$

Подставим это напряжение в ВАХ, тогда получим:

$$i(t) = a_0 + a_1(U_1\cos\omega_0 t + U_2\cos\Omega t) + a_2(U_1\cos\omega_0 t + U_2\cos\Omega t)^2.$$

Представим спектр тока:



Для получения АМ колебания нужно из всего спектра выделить компоненты с частотами:

$$\omega_0,\ \omega_0-\Omega,\ \omega_0+\Omega.$$

Это достигается настройкой колебательного контура на резонансную частоту ω_0.

Составляющие тока с частотами, близкими к ω_0, определяются как:

$$i_{\omega_0}(t)=a_1U_1\cos\omega_0 t+a_2U_1U_2\cos\Omega t\cos\omega_0 t.$$

Если $Z_{\text{эк}}(\omega)\big|_{\omega=\omega_0,\ \omega_0-\Omega,\ \omega_0+\Omega}=R_{\text{эк}}$, а для остальных частот $Z_{\text{эк}}(\omega)\approx 0$, то на контуре получим АМ напряжение вида:

$$u_{\text{вых}}(t)=i_{\omega_0}(t)R_{\text{эк}}=a_1R_{\text{эк}}U_1\left(1+\frac{2a_2U_2}{a_1}\cos\Omega t\right)\cos\omega_0 t.$$

Запишем в компактном виде:

$$u_{\text{вых}}(t)=U_{\text{вых}}(1+m\cos\Omega t)\cos\omega_0 t,$$

где $U_{\text{вых}}=a_1R_{\text{эк}}U_1$, $m=2\dfrac{a_2U_2}{a_1}$.

Вывод: коэффициент модуляции m напряжения тем больше, чем сильнее нелинейность характеристики, определяемая a_2, и амплитуда низкочастотного сигнала U_2.

Классификация цепей с обратной связью. Виды соединений.

Передача электромагнитной энергии с выхода устройства обратно к его входу, называется обратной связью (ОС).

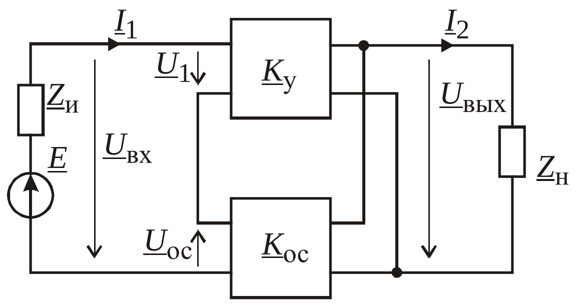
ОС классифицируются по следующим признакам:

1. по характеру связи – положительной (ПОС), отрицательной (ООС) и комплексной;
2. по структуре – внешней и внутренней;
3. по характеру реализующих ее элементов – активной и пассивной, линейной и нелинейной;

Как правило, цепь с обратной связью содержит два четырехполюсника. Первый из них представляет собой основную цепь (усилитель) с коэффициентом передачи $K_{\text{у}}(p)$. Второй представляет цепь ОС, как правило, пассивной, с коэффициентом передачи $K_{\text{ОС}}(p)$.

Рассмотрим способы проектирования ОС:

а) последовательный по напряжению



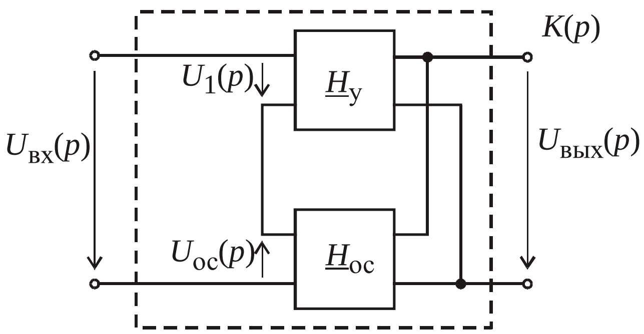
б) параллельной по напряжению

в) последовательной по току Построить схемы самостоятельно!

г) параллельной по току

Коэффициент передачи цепи с ОС

Рассмотрим схему цепи с ОС с последовательным по напряжению способом включения и определим ее коэффициент передачи $K(p)$.



Операторное напряжение на входе определяется уравнением вида:

$$U_{вх}(p) = U_1(p) - U_{ОС}(p),$$

где $U_1(p) = \dfrac{U_{вых}(p)}{H_у(p)}$, $U_{ОС}(p) = U_{ВЫХ}(p) \cdot H_{ОС}(p)$.

После подстановки получаем:

$$U_{вх}(p) = \frac{U_{вых}}{H_у(p)} - U_{вых}(p) \cdot H_{ОС}(p),$$

преобразовывая, получаем:

$$U_{вх}(p) = U_{вых}(p) \cdot \left(\frac{1}{H_у(p)} - H_{ОС}(p) \right) = U_{вых}(p) \cdot \frac{1 - H_{ОС}(p) \cdot H_у(p)}{H_у(p)}.$$

Операторный коэффициент передачи цепи с ОС определяется как:

$$H(p) = \frac{U_{вых}(p)}{U_{вх}(p)} = \frac{H_у(p)}{1 - H_{ОС}(p) \cdot H_у(p)}.$$

Переходя от переменной p к $j\omega$, получаем КПФ вида:

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{H}_у(\omega)}{1 - \underline{H}_{ОС}(\omega) \cdot \underline{H}_у(\omega)},$$

где $\underline{H}_у(\omega)$ – КПФ усилителя, $\underline{H}_{ОС}(\omega)$ – КПФ пассивной цепи ОС.

Произведение $\underline{H}_{ОС}(\omega) \cdot \underline{H}_у(\omega) = \underline{H}_р(\omega)$ – КПФ цепи с ОС, при условии, что ОС разорвана. $\underline{H}_р(\omega)$ – петлевое усиление. Отметим, что если напряжение на выходе устройства совпадает по фазе с напряжением обратной связи, то такая связь считается положительной (ПОС). В противном случае имеет место отрицательная ОС (ООС). При ПОС петлевая функция располагается в правой части комплексной полуплоскости, при ООС – в левой части. ПОС может являться причиной неустойчивости цепи, то есть в том случае, когда $\underline{H}_p(\omega) = 1$, значение коэффициента передачи устройства стремится к бесконечности. То есть при очень малых амплитудах входного воздействия, выходное напряжение неограниченно возрастает. В этом случае наступает так называемый режим самовозбуждения. Поэтому при проектировании цепей с ОС важно исследовать их на устойчивость.

Лекция 5

Устойчивость цепи ОС

Введём понятие устойчивой и неустойчивой цепи. Если свободные колебания с течением времени стремятся к нулю, то цепь устойчива. В противном случае – неустойчива. Иными словами, если корни характеристического уравнения лежат в левой полуплоскости, то цепь является устойчивой, если в правой – неустойчивой, то есть находится в режиме самовозбуждения. Однако вывод характеристического уравнения является трудоёмкой процедурой для цепей более высокого порядка. Введение понятия ОС облегчает вывод характеристического уравнения, а в некоторых случаях даёт возможность обойтись без него.

Рассмотрим последний рисунок. Пусть $U_{вх}(p) = 0$, то следует

$$1 - H_{ОС}(p) H_у(p) = 0$$

Пусть коэффициенты передачи описываются следующими дробно-рациональными функциями:

$$H_у(p) = \frac{w_1(p)}{v_1(p)}, \quad H_{ОС}(p) = \frac{w_2(p)}{v_2(p)}.$$

Далее имеем: $\quad 1 - \dfrac{w_1(p)}{v_1(p)} \cdot \dfrac{w_2(p)}{v_2(p)} = 0, \quad \dfrac{v_1(p) v_2(p) - w_1(p) w_2(p)}{v_1(p) v_2(p)} = 0,$

Откуда последнее равенство выполняется в том случае, если:

$$v_1(p) v_2(p) - w_1(p) w_2(p) = 0.$$

Так как последнее выражение представляет собой полином, то его запишем в более общем виде:

$$b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + ... + b_1 p + b_0 = 0.$$

Это есть характеристическое уравнение цепи. Корни этого уравнения в общем случае являются комплексными величинами. Чтобы напряжение на выходе устройства не возрастало неограниченно необходимо, чтобы действительная часть корней была отрицательной. Цепь, обладающая такими свойствами, является абсолютно устойчивой.

При проектировании цепей с ОС возникает две проблемы. Если проектируемая цепь должна быть устойчивой, необходимо обладать критерием, который по виду петлевой функции позволял бы судить об отсутствии корней в правой полуплоскости. Если проектируемая цепь ОС используется для создания неустойчивой цепи, то следует убедиться, что корни располагаются в левой плоскости. При этом необходимо иметь такое расположение корней, при котором самовозбуждение происходило бы на требуемой частоте.

Критерий устойчивости Рауса-Гурвица

Адольф Гурвиц (нем. Adolf Hurwitz), 26 марта 1859, Хильдесхайм — 18 ноября 1919, Цюрих) — немецкий математик

Раус Эдвард Джон (1831 - 1907) - английский ученый и педагог

Это алгебраический критерий устойчивости, который по значениям коэффициентов $b_m, b_{m-1}, ..., b_1, b_0$ характеристического уравнения $b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + ... + b_1 p + b_0 = 0$, без определения его корней, узнать является ли исследуемая цепь устойчивой.

Определение: Цепь с ОС является устойчивой, если полином характеристического уравнения, является полиномом Гурвица.

Для того, чтобы многочлен $b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + ... + b_1 p + b_0 = 0$ являлся полиномом Гурвица, необходимо и достаточно, чтобы определитель Рауса-Гурвица D_{m-1} и все его главные миноры принимали положительные значения.

$$D_{m-1} = \begin{bmatrix} b_{m-1} & b_{m-3} & b_{m-5} & b_{m-7} & \cdots & 0 \\ b_m & b_{m-2} & b_{m-4} & b_{m-8} & \cdots & 0 \\ 0 & b_{m-1} & b_{m-3} & b_{m-5} & \cdots & 0 \\ 0 & b_m & b_{m-2} & b_{m-4} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_0 \end{bmatrix}.$$

Проверим с помощью критерия Рауса-Гурвица устойчивость цепи с ОС характеристическое уравнение которой имеет вид: $p^4 + 3p^3 + 4p^2 + 6p + 2 = 0$

Составим определитель Рауса-Гурвица и определим его главные миноры.

Порядок уравнения равен 4.

$$D_3 = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Главные миноры: $D_2 = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$, $D_1 = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, $D_0 = 3$

$$D_1 = 12 - 6 = 6,\ D_2 = 6 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} + 2 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = 6 \cdot 6 - 2 \cdot 9 = 18$$

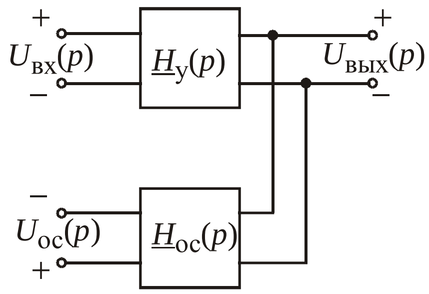
$$D_3 = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} = 2 \cdot (-1)^{4+4} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix} = 2 \cdot 18 = 36.$$

Видно, что определитель и все его главные миноры положительные, следовательно цепь является устойчивой.

Критерий устойчивости Найквиста

Гарри Найквист (англ. Harry Nyquist; 7 февраля 1889, Нильсби, Швеция — 4 апреля 1976, Фарр, Техас) — один из пионеров теории информации

Данный критерий позволяет судить об устойчивости цепи с ОС по свойствам разомкнутой цепи.



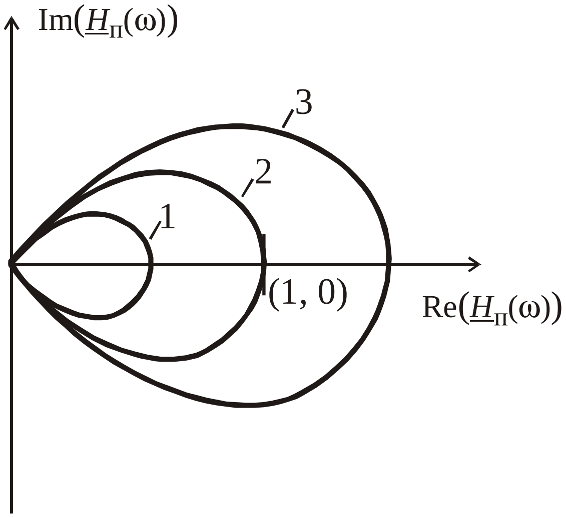
Из уравнения $1-H_{ОС}(p)H_{У}(p)=0$ видно, что передаточная функция разорванной цепи (петлевая функция усиления) $\underline{H}_{ОС}(\omega)\cdot\underline{H}_{У}(\omega)=\underline{H}_{п}(\omega)$ определяется как:

$$1-\underline{H}_{п}(\omega)=0.$$

Если найдется такая частота, для которой конец вектора $\underline{H}_{п}(\omega)$ попадет в точку $(1,0j)$, то на этой частоте возникнет режим самовозбуждения.

Определение: если годограф (кривая, которую описывает конец вектора $\underline{H}_{п}(\omega)$ при изменении частоты ω) петлевой функции не охватывает точку с координатами $(1,0j)$, то при замкнутой цепи ОС цепь является устойчивой.

На рисунке



показаны годографы трёх цепей с положительной обратной связью (годографу устойчивой цепи соответствует кривая 1).

Так как $\underline{H}_{п}(\omega)=\left|H_{ОС}(\omega)H_{У}(\omega)\right|e^{j(\varphi_{ОС}(\omega)+\varphi_{У}(\omega))}$, то имеем следующие условия самовозбуждения цепи с ОС.

1. Баланс фаз $\varphi_{ОС}(\omega)+\varphi_{У}(\omega)=2\pi n$, где $n=0,1,2,...$

2. Баланс амплитуд $H_{ОС}(\omega)H_{У}(\omega)=1$.

При $H_{ОС}(\omega_{Г})H_{У}(\omega_{Г})>1$ наступает процесс нарастания колебаний

Баланс фаз позволяет определить частоту генерирующих колебаний, а баланс амплитуд – величину выходного напряжения (генерируемого колебания).

Критерий устойчивости Михайлова

Михайлов, Александр Иванович (1905—1988) — русский/советский инженер, информатик,

Пусть характеристическое уравнение вида $v(p)=b_m p^m+b_{m-1}p^{m-1}+...+b_1 p+b_0=0$ (полином Гурвица степени *m*) имеет *n* пар комплексно-сопряжённых корней $p_s=-\alpha_s+j\omega_s$, $p_s^*=-\alpha_s-j\omega_s$

и $m-2n$ – вещественных корней $p_k=-\alpha_k$. Тогда полином Гурвица $v(p)$ можно представить в виде: $v(p)=\prod_{s=1}^{n}(p-p_s)(p-p_s^*)\cdot\prod_{k=1}^{m-2n}(p-p_k)$.

Далее преобразуем: $v(p)=\prod_{s=1}^{n}(p-(-\alpha_s+\mathrm{j}\omega_s))(p-(-\alpha_s-\mathrm{j}\omega_s))\cdot\prod_{k=1}^{m-2n}(p+\alpha_k)$.

Далее $v(p)=\prod_{s=1}^{n}(p^2+c_s\cdot p+d_s)\cdot\prod_{k=1}^{m-2n}(p+\alpha_k)$,

где $c_s=2\alpha_s$, $d_s=\alpha_s^2+\omega_s^2$.

В последнем выражении, заменяя p на jω, получаем комплексную функцию:

$$\underline{v}(\omega)=\prod_{s=1}^{n}(-\omega^2+\mathrm{j}\omega c_s+d_s)\cdot\prod_{k=1}^{m-2n}(\mathrm{j}\omega+\alpha_k).$$

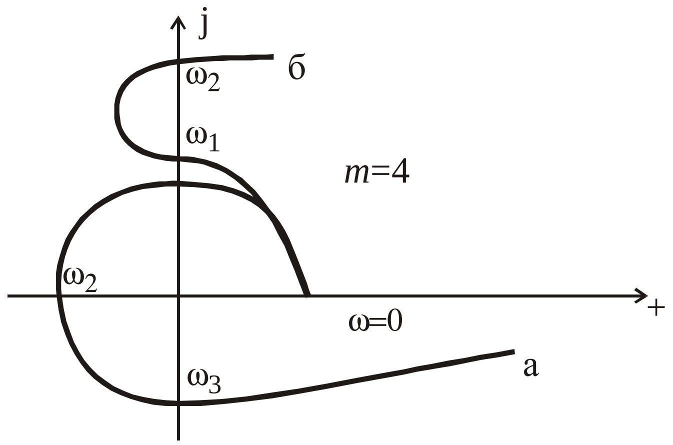
Определим аргумент комплексной функции:

$$\arg(\underline{v}(\omega))=\varphi_v(\omega)=\sum_{k=1}^{m-2n}\varphi_k(\omega)+\sum_{s=1}^{n}\varphi_s(\omega),$$

где $\varphi_s(\omega)=\frac{\pi}{2}+\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{d_s}}{c_s}\cdot\left(\frac{\omega}{\sqrt{d_s}}-\frac{\sqrt{d_s}}{\omega}\right)\right)$, $\varphi_k(\omega)=\mathrm{arctg}\frac{\omega_k}{\alpha_k}$.

Определение: цепь с обратной связью будет устойчивой, если в интервале частот от 0 до ∞ аргумент комплексной функции $\varphi_v(\omega)$ изменяется от 0 до $\frac{m\pi}{2}$. То есть иными словами, годограф комплексной функции $\underline{v}(\omega)$, будет последовательно обходить m квадрантов комплексной плоскости в положительном направлении.

На рисунке



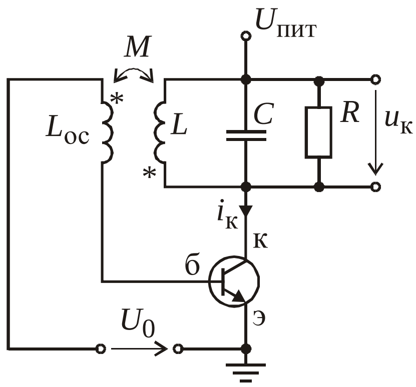
приведены годографы устойчивой – **а**, и неустойчивой – **б** цепи 4 порядка.

Автоколебательные цепи

Автоколебательными называются активные электрические цепи, в которых без посторонних воздействий самостоятельно возникают электрические колебания (автоколебания).

Автогенераторы являются преобразователями энергии постоянного напряжения (тока) в энергию различной формы колебаний (гармонической, пилообразной и т. д.). Чтобы автогенераторы выполняли свои функции, состояние равновесия в них должно быть неустойчивым, чтобы нарушение устойчивости заключалось в росте амплитуды колебаний, то есть самовозбуждении.

LC-генератор с внешней обратной связью



Напряжение обратной связи: $u_{\text{ОС}} = U_0 - u_{\text{БЭ}}$. По I закону Кирхгофа: $i_{\text{к}} = i_R + i_L + i_C$, либо записывая через напряжения: $u_{\text{к}} G + \frac{1}{L}\int u_{\text{к}} dt + C\frac{du_{\text{к}}}{dt} = i_{\text{к}}(u_{\text{ОС}})$, где $G = \frac{1}{R}$.

Поскольку $u_{\text{к}} = L\frac{di_L}{dt}$, $u_{\text{ОС}} = M\frac{di_L}{dt}$, то $u_{\text{ОС}} = \frac{M}{L}u_{\text{к}}$.

Продифференцировав уравнение Кирхгофа, получим дифференциальное уравнение вида (1/C в правой части уравнения?):

$$\frac{d^2 u_{\text{к}}}{dt^2} + \frac{G}{C}\cdot\frac{du_{\text{к}}}{dt} + \frac{1}{LC}u_{\text{к}} = \frac{di_{\text{к}}(u_{\text{ОС}})}{dt}\cdot\frac{1}{C}.$$

Определим производную в правой части уравнения $\frac{di_{\text{к}}(u_{\text{ОС}})}{dt} = \frac{di_{\text{к}}(u_{\text{ОС}})}{du_{\text{ОС}}}\cdot\frac{du_{\text{ОС}}}{dt}$.

$\frac{di_{\text{к}}(u_{\text{ОС}})}{du_{\text{ОС}}} = S(u_{\text{ОС}})$ – дифференциальная проводимость (крутизна ВАХ транзистора),

Поскольку $u_{\text{ОС}} = \frac{M}{L}u_{\text{к}}$, то $\frac{du_{\text{ОС}}}{dt} = \frac{M}{L}\cdot\frac{du_{\text{к}}}{dt}$. После подстановки получим: $\frac{di_{\text{к}}(u_{\text{ОС}})}{dt} = S(u_{\text{ОС}})\frac{M}{L}\cdot\frac{du_{\text{к}}}{dt}$.

Дифференциальное уравнение запишем в виде:

$$\frac{d^2 u_{\text{к}}}{dt^2} + \left(\frac{G}{C} - S(u_{\text{ОС}})\frac{M}{LC}\right)\frac{du_{\text{к}}}{dt} + \frac{1}{LC}u_{\text{к}} = 0$$ – нелинейное дифференциальное уравнение

Определим условие самовозбуждения генератора. Амплитуда нарастающих колебаний происходит на линейном участке ВАХ, поэтому $S(u_{\text{ОС}}) = S$.

$$\frac{d^2 u_{\text{к}}}{dt^2} + \left(\frac{G}{C} - S\frac{M}{LC}\right)\frac{du_{\text{к}}}{dt} + \frac{1}{LC}u_{\text{к}} = 0$$ – линейное дифференциальное уравнение

Перепишем его в виде: $\dfrac{d^2u_к}{dt^2}+2\alpha_э\dfrac{du_к}{dt}+\dfrac{1}{LC}u_к=0$, где $\alpha_э=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{G}{C}-S\dfrac{M}{LC}\right)$ – эквивалентный коэффициент затухания колебательного контура.

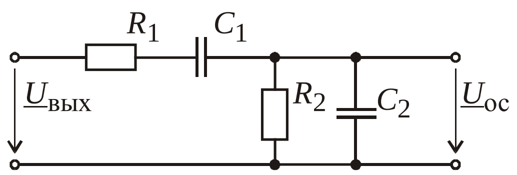
Чтобы в контуре возникли нарастающие колебания необходимо выполнить условие:

$$\alpha_э=\frac{1}{2}\left(\frac{G}{C}-S\frac{M}{LC}\right)<0.$$

Отсюда условие самовозбуждения (возникновение колебаний): $M>\dfrac{LG}{S}$.

RC-генератор с внутренней обратной связью

В RC-генераторах часто находит применение схема цепи обратной связи вида:



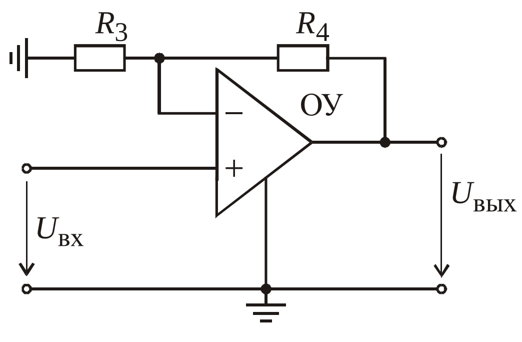
Определим выражение для передаточной функции:

$$\underline{H}_{ОС}(\omega)=\frac{\underline{U}_{ОС}}{\underline{U}_{вых}}=\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2}=\frac{R_2 j\omega C_1}{-\omega^2 C_1R_1C_2R_2+1+j\omega\left(C_1R_1+C_2R_2+C_1R_2\right)},$$

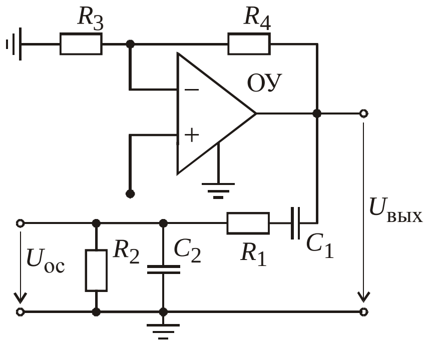
где $\underline{Z}_1=R_1+\dfrac{1}{j\omega C_1}$, $\underline{Z}_2=\dfrac{R_2}{j\omega C_2R_2+1}$.

После преобразований: $H_{ОС}(j\omega)=\dfrac{1}{1+\dfrac{C_2}{C_1}+\dfrac{R_1}{R_2}+j\left(\omega R_1C_2-\dfrac{1}{\omega R_2C_1}\right)}$.

В качестве усилителя в схеме автогенератора используется каскад на основе операционного усилителя с коэффициентом передачи: $H_у=\dfrac{R_3+R_4}{R_3}$.



Таким образом, схема RC-генератора принимает вид:



Из условия баланса фаз определяем частоту генерации:

$$\omega R_1 C_2 - \frac{1}{\omega R_2 C_1} = 0\text{, отсюда } f_{\text{г}} = \frac{\omega_{\text{г}}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}.$$

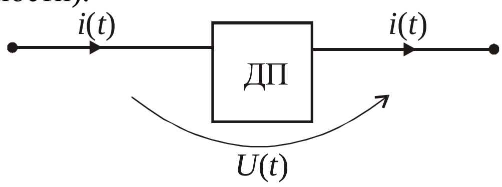
Из условия баланса амплитуд определим необходимый коэффициент усиления ОУ для возникновения колебаний: $1 = H_{\text{у}0} H_{\text{ОС}}(\omega_{\text{г}})$, отсюда $H_{\text{у}0} = \dfrac{1}{H_{\text{ОС}}(\omega_{\text{г}})} = 1 + \dfrac{C_2}{C_1} + \dfrac{R_1}{R_2}$.

Лекция 6

Введение в теорию двухполюсников

Под *полюсами* в ЭЦ понимают выводы, их количество (как параметр), через которые данная электрическая цепь соединяется и взаимодействует с другими цепями. По количеству этих выводов (проводников или полюсов) выделяют двухполюсники, трехполюсники, четырехполюсники и многополюсники.

Еще понятие «полюс» употребляется в математическом смысле для некоторых характеристик электрической цепи: операторных и частотных (значение переменной, когда функция стремится к бесконечности).



Классификация двухполюсников

По своим свойствам двухполюсники делятся на автономные и неавтономные. Автономными являются двухполюсники, которые самостоятельно создают напряжение на разомкнутых зажимах или ток при закороченных зажимах, то есть без внешних подключений. Неавтономные двухполюсники сами по себе ничего не создают.

Также двухполюсники можно разделить на линейные (только линейные элементы) и нелинейные. У линейных двухполюсников свойства не зависят от величин токов и напряжений в двухполюснике.

Также можно произвести деление двухполюсников на активные и пассивные. Активные двухполюсники отдают больше энергии, чем потребляют; пассивные двухполюсники больше потребляют, чем отдают. В данном случае вводят понятие средней мощности:

$$P_{\text{ср}} = \frac{1}{T}\int_0^T iu\,dt$$

Для пассивных двухполюсников $P_{\text{ср}} \geq 0$, а для активных – $P_{\text{ср}} < 0$.

По элементам можно разделить двухполюсники с элементами с сосредоточенными параметрами (R, L, C элементы) и с распределёнными параметрами (например, длинными линиями).

Можно выделить двухполюсники без потерь энергии (реактивные, содержащие L, C элементы), двухполюсники с малыми потерями (содержат катушки индуктивности, конденсаторы) и двухполюсники с потерями энергии (диссипативные, то есть содержат резисторы).

В общем случае при нахождении характеристик двухполюсников используют операторные функции, то есть операторное напряжение и операторный ток.

Операторное сопротивление двухполюсника и его свойства

Под операторным сопротивлением двухполюсника понимают операторного изображения напряжения к операторному изображению тока через двухполюсник.

$$Z(p) = \frac{U(p)}{I(p)}$$

Операторное сопротивление представляет собой некоторую функцию комплексной переменной $p = \sigma + \mathrm{j}\omega$. Эта функция зависит от типа двухполюсника. Она может быть трансцендентной функцией, если в двухполюснике имеется участок с распределенными параметрами, и рациональной, если таких участков нет.

В дальнейшем будем рассматривать только двухполюсники без участков с распределенными параметрами, то есть рациональные функции.

Если при каком-то p сопротивление $Z(p)=0$, то это называется нулем сопротивления двухполюсника. Если при каком-то p сопротивление $Z(p)=\infty$, то это называется полюсом. Для пассивных двухполюсников все нули и полюсы располагаются в левой полуплоскости комплексной переменной p. В крайнем случае могут быть нули и полюсы на мнимой оси.

Полиномы, у которых нули располагаются в левой полуплоскости, называют полиномами Гурвица.

Если двухполюсник пассивный, то цепь будет устойчивой; если двухполюсник активный, то цепь может быть и неустойчивой.

Для пассивных двухполюсников функция сопротивления или проводимости является положительной вещественной функцией. Она вещественна, если p – вещественная величина, ее вещественная часть положительна, когда положительна вещественная часть p.

Из операторного сопротивления можно получить комплексное:

$$Z(p)\Big|_{p=j\omega} = \underline{Z}(\omega) = Z(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)} = R(\omega) + \mathrm{j}X(\omega)$$

Для пассивных двухполюсников $R(\omega) \geq 0$, а для активных может выполняться соотношение: $R(\omega) < 0$.

$$P(\omega) = I^2 R(\omega) = UI\cos\varphi(\omega)$$

Функции $Z(\omega)$, $\varphi(\omega)$, $R(\omega)$, $X(\omega)$ являются частотными характеристиками.

Используя определенный математический аппарат от операторных функций можно перейти к временным функциям и получить временные характеристики двухполюсника, которые оценивают реакцию двухполюсника на стандартное воздействие. Для пассивного двухполюсника по свободным составляющим эта реакция должна носить затухающий характер, то есть стремиться к 0 (за исключением крайнего случая, когда какие-то нули или полюсы располагаются на мнимой оси).

Простейшие двухполюсники имеют сопротивления R, $pL = \mathrm{j}\omega L$, $\dfrac{1}{pC} = \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C} = -\dfrac{\mathrm{j}}{\omega C}$. Сложные двухполюсники составляются из различных комбинаций простых.

Активные двухполюсники содержат по схемам замещения управляемые или зависимые источники. Автономные двухполюсники содержат независимые источники.

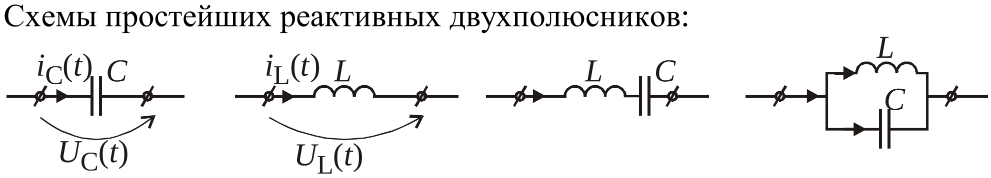
Реактивные двухполюсники

Реактивные двухполюсники содержат только реактивные элементы (L и C). В принципе они неавтономные и могут быть линейными и нелинейными. Эти двухполюсники относят к разряду пассивных, так как они, сколько получают энергии, столько отдают. Соответственно все нули и полюсы располагаются на мнимой оси.

Практически, для реальных цепей реактивные двухполюсники – это двухполюсники из катушек индуктивности и конденсаторов (двухполюсники с малыми потерями).

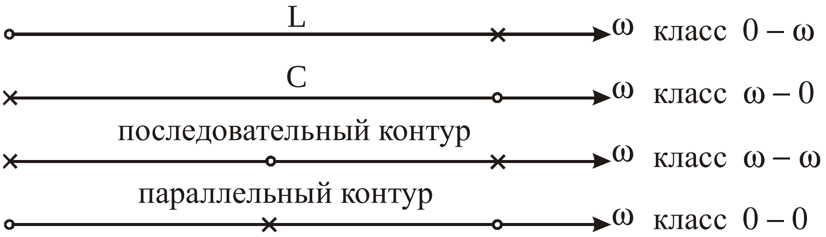
Простейшие реактивные двухполюсники

Схемы простейших реактивных двухполюсников:



У всех реактивных двухполюсников комплексное сопротивление чисто мнимое: $\underline{Z}(\omega) = \mathrm{j}X(\omega)$. Соответственно мнимая часть или реактивное сопротивление характеризует частотные свойства двухполюсника.

Иногда вместо графиков сопротивлений изображают характеристические оси:

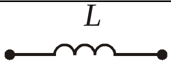
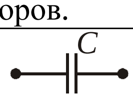
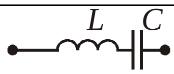
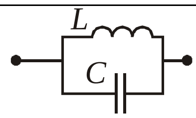
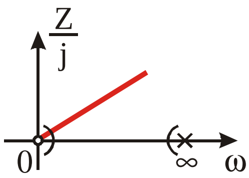
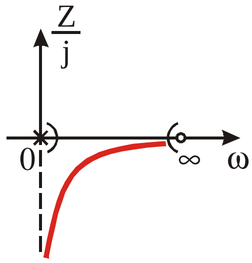
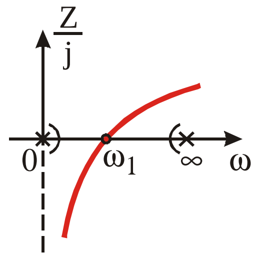
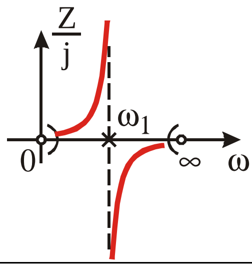


Значение величины сопротивления реактивного двухполюсника в крайних точках, на крайних частотах 0 и ∞ называют классом реактивного двухполюсника.

Все это касается и сложных двухполюсников, которые являются комбинацией простых.

Функция $X(\omega)$ – всегда возрастающая в математическом смысле, то есть ее производная по частоте – положительная.

Так как активных сопротивлений в этих схемах нет, то комплексное сопротивление реактивных двухполюсников не содержит активной составляющей и является мнимым: $\underline{Z} = \pm jX$, то есть содержит только реактивную составляющую. Реактивные двухполюсники представляют собой идеализированную модель реальных двухполюсников, составленных из катушек индуктивностей и конденсаторов.

		 $\omega_1 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$	 $\omega_2 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$
$Z(p) = pL$ $Z(j\omega) = j\omega L$ $Z(p) = \dfrac{1}{pL}$ Класс $0-\infty$ 	$Z(p) = \dfrac{1}{pC}$ $Z(j\omega) = \dfrac{1}{j\omega C}$ $Y(p) = pC$ Класс $\infty - 0$ 	$Z(p) = pL + \dfrac{1}{pC} =$ $= \dfrac{L\left(p^2 + \omega_1^2\right)}{p}$ $Z(j\omega) = \dfrac{H \cdot \left(\omega_1^2 - \omega^2\right)}{j\omega}$ $Y(p) = \dfrac{p}{L} \cdot \dfrac{1}{p^2 + \omega_1^2}$ Класс $\infty - \infty$ 	$Z(p) = \dfrac{pL\dfrac{1}{pC}}{pL + \dfrac{1}{pC}} =$ $= \dfrac{p}{C} \cdot \dfrac{1}{p^2 + \omega_2^2}$ $Z(j\omega) = \dfrac{j\omega H}{\omega_2^2 - \omega^2}$ $Y(p) = \dfrac{C\left(p^2 + \omega_2^2\right)}{p}$ Класс $0-0$ 

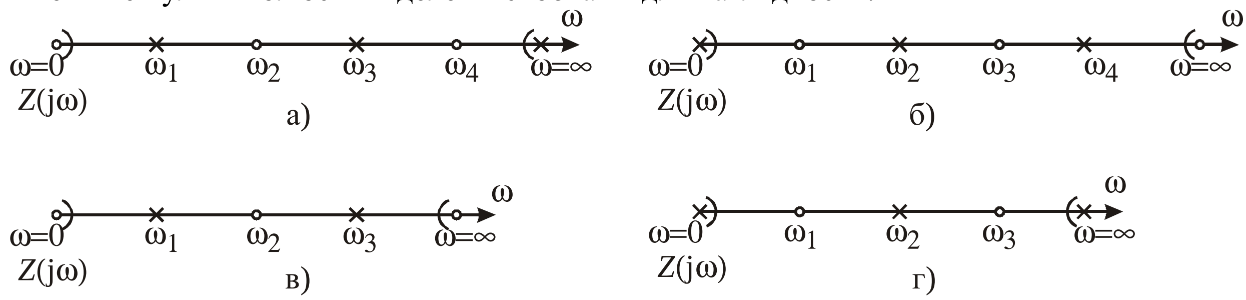
Если на вход реактивного двухполюсника подать гармоническое колебание и менять его частоту, то сопротивление двухполюсника на разных частотах будет иметь различные значения. Зависимость комплексного сопротивления $\underline{Z}(\omega)$ от частоты называется частотной характеристикой реактивного двухполюсника.

<u>Значение частоты ω, при котором функция сопротивления двухполюсника обращается в нуль, называется нулями входного сопротивления</u>. Значение частоты ω, при которых функция <u>сопротивления равно бесконечности</u>, называется <u>полюсами функции</u> сопротивления. Нули на графиках обозначают кружочками, полюсы – крестиками.

Во многих случаях, характеризуя частотную зависимость сопротивления реактивного двухполюсника, можно ограничиться графиком, который определяет лишь частоты нулей и полюсов сопротивления. Его называют <u>характеристической строкой двухполюсника (или полюсно–нулевыми диаграммами).</u>

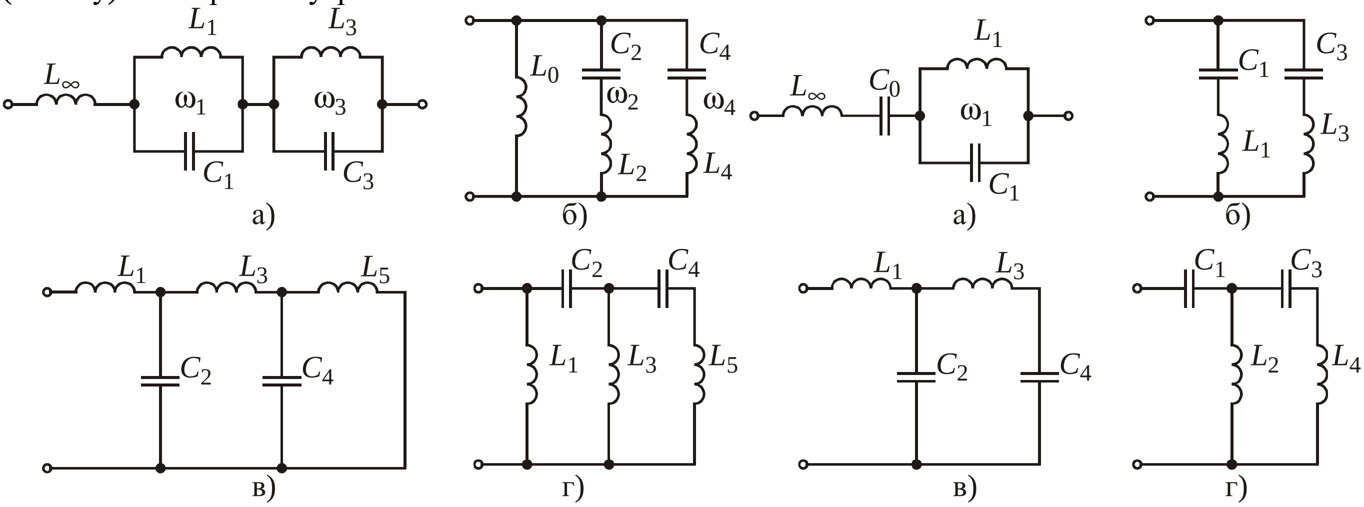
В зависимости от характера сопротивления на концах частотного диапазона ($\omega = 0$ и $\omega = \infty$), двухполюсники можно разделить на четыре класса. Нумерация класса условна и состоит из двух цифр (0 и ∞). Первая цифра класса определяет величину сопротивления на частоте $\omega = 0$, вторая – на частоте $\omega = \infty$. Выберем здесь следующую нумерацию классов: 1 класс: $(0, \infty)$; 2 класс: $(\infty, 0)$; 3 класс $(0, 0)$; 4 класс (∞, ∞). Нули и полюсы сопротивления двухполюсника можно разделить на внешние, определяемые классом, и собственные (внутренние), определяемые резонансами. Частоты резонанса напряжений являются нулями сопротивления двухполюсника, а частоты резонанса токов – полюсами.

Характеристические строки двухполюсников указанных 4-х классов приведены на рисунке Здесь внешние нули и полюсы выделены скобками для наглядности.

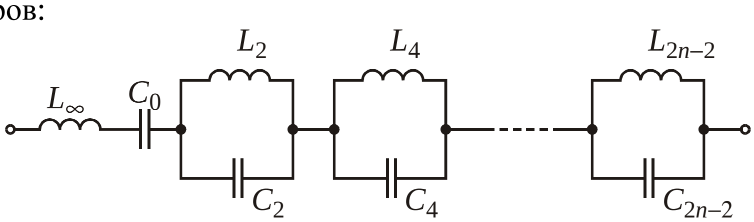


Канонические схемы реактивных двухполюсников

Канонические схемы – схемы, построенные по определенному правилу (канону). Наиболее распространенными в теории электрических цепей являются схемы, построенные по правилу (канону) Фостера и Кауэра.



I схема Фостера представляется в виде последовательного соединения параллельных колебательных контуров:

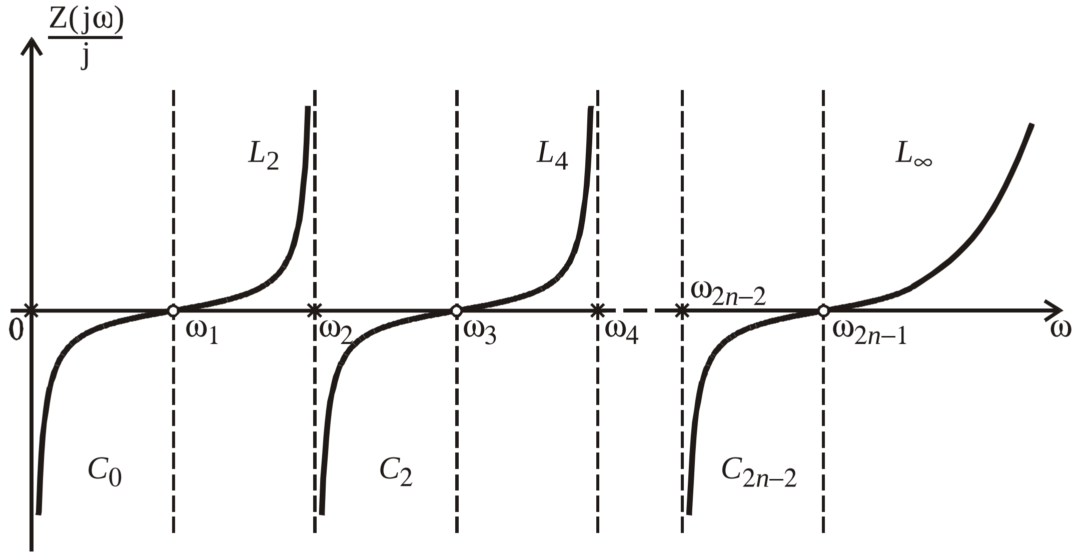


Класс данного двухполюсника: (∞, ∞)

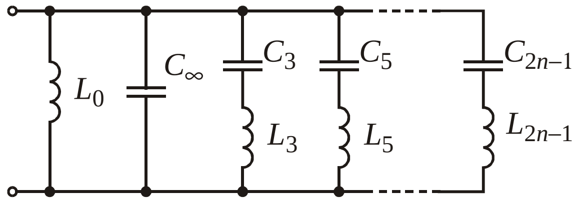
Входное операторное сопротивление имеет вид:

$$Z(p) = H\frac{\left(p^2+\omega_1^2\right)\left(p^2+\omega_3^2\right)\ldots\left(p^2+\omega_{2n-1}^2\right)}{p\left(p^2+\omega_2^2\right)\left(p^2+\omega_4^2\right)\ldots\left(p^2+\omega_{2n-2}^2\right)}$$

Представим график частотной зависимости входного сопротивления:



II схема Фостера представляется в виде параллельного соединения последовательных колебательных контуров:

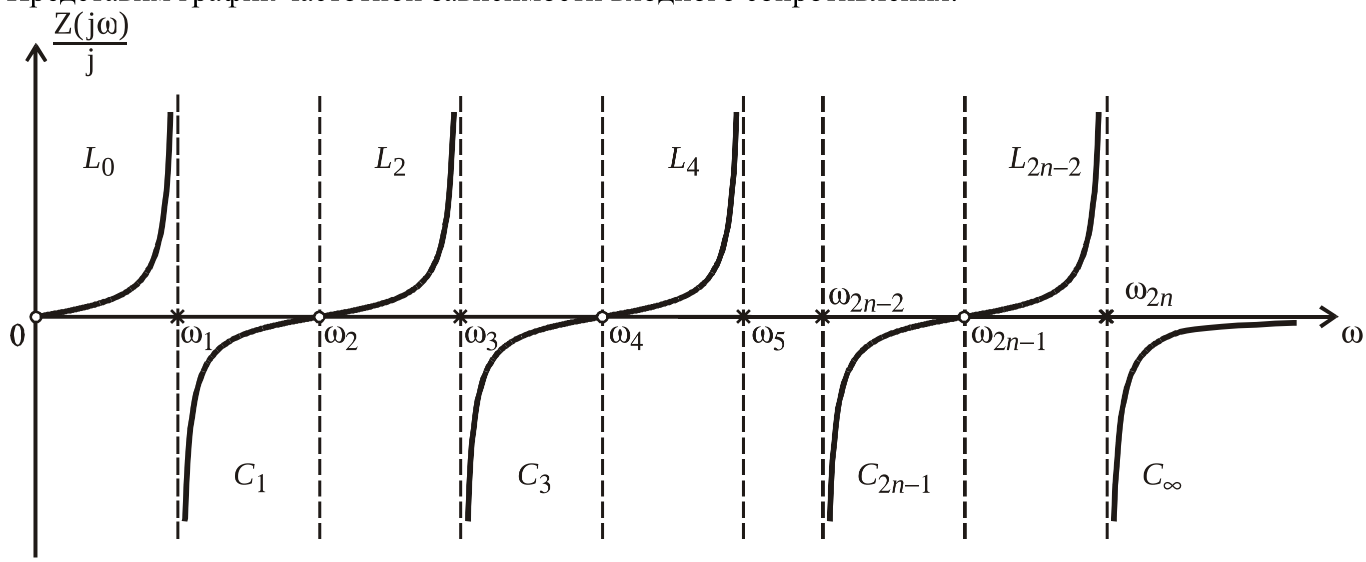


Класс данного двухполюсника: $(0, 0)$

Входное операторное сопротивление имеет вид:

$$Z(p) = H\frac{p\left(p^2+\omega_3^2\right)\left(p^2+\omega_5^2\right)\ldots\left(p^2+\omega_{2n-1}^2\right)}{\left(p^2+\omega_2^2\right)\left(p^2+\omega_4^2\right)\ldots\left(p^2+\omega_{2n}^2\right)}$$

Представим график частотной зависимости входного сопротивления:

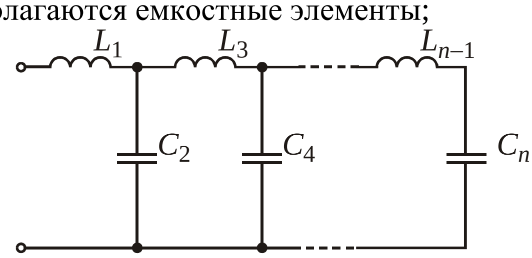


В схемах Кауэра двухполюсники представлены в виде цепочных (лестничных) схем.

I схема Кауэра представляется в следующем виде:

а) в продольных плечах располагаются индуктивные элементы;

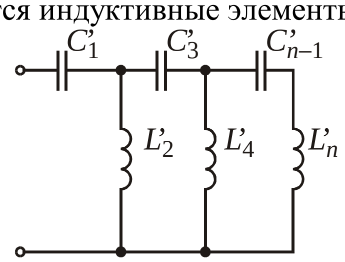
б) в поперечных плечах располагаются емкостные элементы;



Класс данного двухполюсника: (∞, ∞)

II схема Кауэра представляется в следующем виде:

а) в продольных плечах располагаются емкостные элементы;
б) в поперечных плечах располагаются индуктивные элементы;



Класс данного двухполюсника: (∞, ∞)

Входные операторные сопротивления записываются аналогично, как и по схемам Фостера.

Основные общие свойства реактивных двухполюсников вытекают из формулы Фостера.

1) Если известно расположение нулей и полюсов реактивного двухполюсника (то есть известна характеристическая строка), его частотная характеристика определяется с точностью до постоянного множителя H.

2) Нули и полюсы сопротивления, то есть частоты резонансов напряжений и токов чередуются. Это же относится и к нулям и полюсам класса.

3) В зависимости от величины сопротивления двухполюсника на частоте $\omega = 0$ множитель $j\omega$ записывается либо в числителе (для 1 и 3 классов), либо в знаменателе (для 2 и 4 классов).

4) В числителе $\underline{Z}(\omega)$ стоят скобки с частотами резонансов напряжений, которые являются нулями входного сопротивления. В знаменателе $\underline{Z}(\omega)$ стоят скобки с частотами резонансов токов (полюсов сопротивления).

5) Входное сопротивление $\underline{Z}(\omega)$ возрастает (в алгебраическом смысле) с ростом частоты, то есть

$$\frac{d\dfrac{\underline{Z}(\omega)}{j}}{d\omega} > 0$$

Лекция 7

Синтез реактивных двухполюсников

Синтез – это создание электрической цепи по заданным требованиям.

Основные этапы синтеза:

1. Установление требований.
2. Математическое описание требований к цепи.
3. Разработка схемы цепи и расчет величин элементов.
4. Проверка соответствия цепи заданным требованиям.
5. При практической реализации необходимо провести миниатюризацию цепи и измерение ее параметров.

Синтез реактивных двухполюсников заключается в разработке схем и расчете величин элементов. При этом должны выполняться условия физической реализуемости и требования к цепи. Обычно синтез реактивных двухполюсников ведется по какой-либо из канонических схем.

Синтез по схемам Фостера

Математически процедура синтеза по I схеме Фостера основана на разложении функции входного операторного сопротивления в ряд Лорана в следующем виде:

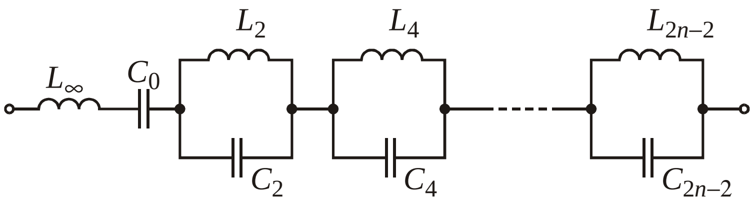
$$Z(p) = pL_\infty + \frac{1}{pC_0} + \sum_{k=1}^{n} \frac{p}{C_{2k-2}\left(p^2 + \omega_{2k-2}^2\right)},$$

Причем неизвестные коэффициенты определяются по следующим соотношениям:

$$L_\infty = \lim_{p\to\infty} \frac{Z(p)}{p}, \quad \frac{1}{C_0} = \lim_{p\to 0} Z(p)\,p,$$

$$\frac{1}{C_{2k-2}} = \lim_{p^2\to -\omega_{2k-2}^2} \frac{p^2 + \omega_{2k-2}^2}{p} Z(p), \quad L_{2k-2} = \frac{1}{\omega_{2k-2}^2 C_{2k-2}}.$$

Далее, подставляем полученные значения в следующую схему:



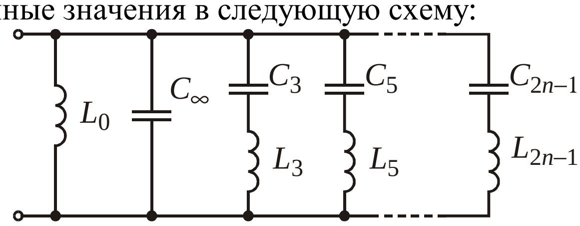
Процедура синтеза по II схеме Фостера основана на разложении функции входной операторной проводимости в ряд Лорана в следующем виде:

$$Y(p)=\frac{1}{Z(p)}=pC_\infty+\frac{1}{pL_0}+\sum_{k=1}^{n}\frac{p}{L_{2k-1}\left(p^2+\omega_{2k-1}^2\right)},$$

Причем неизвестные коэффициенты определяются по следующим соотношениям:

$$C_\infty=\lim_{p\to\infty}\frac{Y(p)}{p},\ \frac{1}{L_0}=\lim_{p\to\infty}Y(p)\,p,\ \frac{1}{L_{2k-1}}=\lim_{p^2\to-\omega_{2k-1}^2}\frac{p^2+\omega_{2k-1}^2}{p}Y(p),\ C_{2k-1}=\frac{1}{\omega_{2k-1}^2L_{2k-1}}.$$

Далее, подставляем полученные значения в следующую схему:



Синтез по схемам Кауэра.

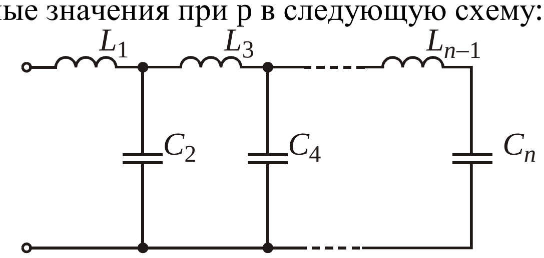
Синтез по I схеме Кауэра заключается в разложении функции операторного сопротивления в цепную дробь с выделением целой части по переменной *p*. (Разложение по положительным степеням). Для входной реактивной функции сопротивления необходимо полином числителя и знаменателя расположить в порядке убывания по степеням. За делимое принимается полином высшей степени. Если такой полином находится в числителе функции $Z(p)$, то схема начинается с продольного плеча с элементом pL. В противном случае синтез ведется по функции $Y(p)$, следовательно, схема начинается с поперечного плеча с элементом $\frac{1}{pC}$.

Цепная дробь записывается в следующем виде:

$$Z(p)=Z_1(p)+\cfrac{1}{Y_2(p)+\cfrac{1}{Z_3(p)+\cfrac{1}{Y_4(p)+\cdots}}},$$

где $Z_1(p)=pL_1$, $Y_2(p)=pC_2$, $Z_3(p)=pL_3$, $Y_4(p)=pC_4$ и т.д.

Далее, подставляем полученные значения при p в следующую схему:

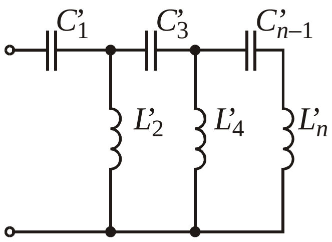


Синтез по II схеме Кауэра заключается в разложении функции операторного сопротивления в цепную дробь по отрицательным степеням. Полиномы числителя и знаменателя располагаются по возрастанию. Начинают деление с низшей степени *p*.

$$Z'(p)=Z'_1(p)+\cfrac{1}{Y'_2(p)+\cfrac{1}{Z'_3(p)+\cfrac{1}{Y'_4(p)+\cdots}}},$$

где $Z'_1(p)=\frac{1}{pC'_1}$, $Y'_2(p)=\frac{1}{pL'_2}$, $Z'_3(p)=\frac{1}{pC'_3}$, $Y'_4(p)=\frac{1}{pL'_4}$ и т.д.

Далее, подставляем полученные значения при *p* в следующую схему:



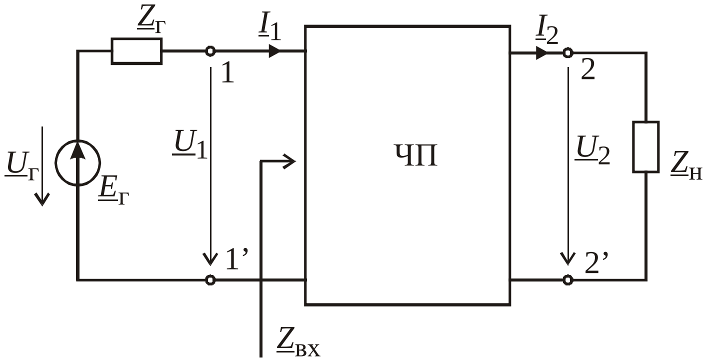
Понятие о четырехполюсниках и их классификация

Четырехполюсником (ЧП) называют электрическую цепь (или ее часть), имеющую две пары зажимов для подключения к источнику и приемнику электрической энергии.

Входные зажимы – зажимы, к которым подключается источник электрической энергии.

Выходные зажимы – зажимы, к которым подключается приемник электрической энергии.

ЧП изображают в следующем виде:



Классификация ЧП по типу

1. Линейные и нелинейные ЧП.
2. Автономные и неавтономные ЧП.
3. Активные и пассивные ЧП.
4. Обратимые и необратимые ЧП.
5. Симметричные и несимметричные ЧП.
6. Уравновешенные и неуравновешенные ЧП.

Классификация ЧП по структуре

1. Мостовые ЧП (рис. а).
2. Г-образные ЧП (рис. б).
3. Т-образные ЧП (рис. в).
4. П-образные ЧП (рис. г).
5. Т-перекрытые ЧП (рис. д)

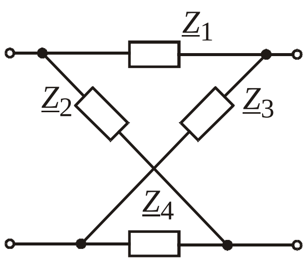


Рис. а.

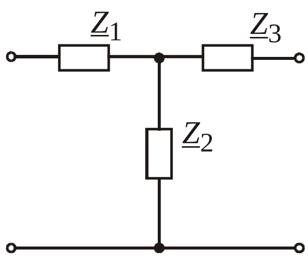


Рис. в.

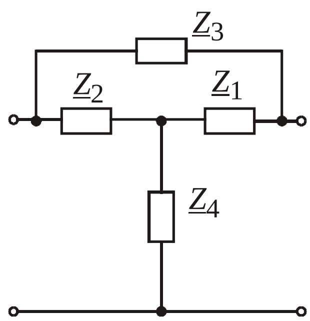


Рис. д

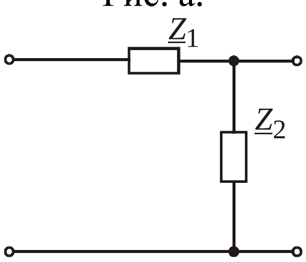


Рис. б.

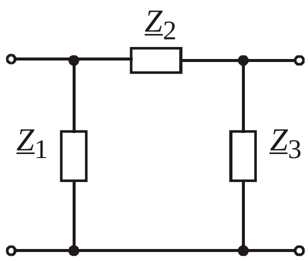


Рис. г.

Уравнения передачи и внутренние параметры четырехполюсников.

Уравнения передачи ЧП – уравнения, дающие зависимость между входными и выходными напряжениями и токами. Параметры ЧП – величины, связывающие в уравнениях передачи напряжения и токи. Уравнения передачи ЧП существуют в шести формах:

1. Уравнения передачи в Z-параметрах.

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{Z} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} \text{ или } \begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{Z}_{11}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{12}\underline{I}_2 \\ \underline{U}_2 = \underline{Z}_{21}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{22}\underline{I}_2 \end{cases}.$$

$\underline{Z}_{11} = \left(\dfrac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1}\right)_{\underline{I}_2=0} = \underline{Z}_{1\text{Х}}$ – входное сопротивление при разомкнутых выходных зажимах (2, 2’).

$\underline{Z}_{12} = \left(\dfrac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2}\right)_{\underline{I}_1=0}$ – взаимное сопротивление при разомкнутых входных зажимах (1, 1’).

$\underline{Z}_{21} = \left(\dfrac{\underline{U}_2}{\underline{I}_1}\right)_{\underline{I}_2=0}$ – взаимное сопротивление при разомкнутых выходных зажимах (2, 2’).

$\underline{Z}_{22} = \left(\dfrac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2}\right)_{\underline{I}_1=0} = \underline{Z}_{2\text{Х}}$ – выходное сопротивление при разомкнутых входных зажимах (1, 1’).

2. Уравнения передачи в Y-параметрах.

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{Y} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} \text{ или } \begin{cases} \underline{I}_1 = \underline{Y}_{11}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{12}\underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 = \underline{Y}_{21}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{22}\underline{U}_2 \end{cases}.$$

$\underline{Y}_{11} = \left(\dfrac{\underline{I}_1}{\underline{U}_1}\right)_{\underline{U}_2=0} = \underline{Y}_{1\text{К}}$ – входная проводимость при замкнутых выходных зажимах (2, 2’).

$\underline{Y}_{12} = \left(\dfrac{\underline{I}_1}{\underline{U}_2}\right)_{\underline{U}_1=0}$ – взаимная проводимость при замкнутых входных зажимах (1, 1’).

$\underline{Y}_{21} = \left(\dfrac{\underline{I}_2}{\underline{U}_1}\right)_{\underline{U}_2=0}$ – взаимная проводимость при замкнутых выходных зажимах (2, 2’).

$\underline{Y}_{22} = \left(\dfrac{\underline{I}_2}{\underline{U}_2}\right)_{\underline{U}_1=0} = \underline{Y}_{2\text{К}}$ – выходная проводимость при замкнутых входных зажимах (1, 1’).

3. Уравнения передачи в A-параметрах.

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} \text{ или } \begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{A}_{11}\underline{U}_2 + \underline{A}_{12}\underline{I}_2 \\ \underline{I}_1 = \underline{A}_{21}\underline{U}_2 + \underline{A}_{22}\underline{I}_2 \end{cases}.$$

$\underline{A}_{11} = \left(\dfrac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2}\right)_{\underline{I}_2=0}$ – обратный коэффициент передачи по напряжению при Х.Х.

$\underline{A}_{12} = \left(\dfrac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2}\right)_{\underline{U}_2=0}$ – взаимное сопротивление при замкнутых выходных зажимах (2, 2’).

$\underline{A}_{21} = \left(\dfrac{\underline{I}_1}{\underline{U}_2}\right)_{\underline{I}_2=0}$ – взаимная проводимость при разомкнутых выходных зажимах (2, 2’).

$\underline{A}_{22} = \left(\dfrac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2}\right)_{\underline{U}_2=0}$ – обратный коэффициент передачи по току при К.З.

4. Уравнения передачи в B-параметрах.

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} \text{ или } \begin{cases} \underline{U}_2 = \underline{B}_{11}\underline{U}_1 + \underline{B}_{12}\underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 = \underline{B}_{21}\underline{U}_1 + \underline{B}_{22}\underline{I}_1 \end{cases}.$$

5. Уравнения передачи в H-параметрах.

$$\begin{bmatrix}\underline{U}_1\\ \underline{I}_2\end{bmatrix}=\mathbf{H}\cdot\begin{bmatrix}\underline{I}_1\\ \underline{U}_2\end{bmatrix} \text{ или } \begin{cases}\underline{U}_1=\underline{H}_{11}\underline{I}_1+\underline{H}_{12}\underline{U}_2\\ \underline{I}_2=\underline{H}_{21}\underline{I}_1+\underline{H}_{22}\underline{U}_2\end{cases}.$$

6. Уравнения передачи в F-параметрах.

$$\begin{bmatrix}\underline{I}_1\\ \underline{U}_2\end{bmatrix}=\mathbf{F}\cdot\begin{bmatrix}\underline{U}_1\\ \underline{I}_2\end{bmatrix} \text{ или } \begin{cases}\underline{I}_1=\underline{F}_{11}\underline{U}_1+\underline{F}_{12}\underline{I}_2\\ \underline{U}_2=\underline{F}_{21}\underline{U}_1+\underline{F}_{22}\underline{I}_2\end{cases}.$$

Самостоятельно!!!

Определить оставшиеся параметры и их физический смысл.

Свойства и способы определения параметров четырехполюсников.

Основные свойства параметров ЧП:

1. Параметры определяются только схемой ЧП и ее элементов.
2. Между параметрами существует взаимная связь (см. Шебес, стр. 330)
3. Обратимый ЧП характеризуется не более чем тремя независимыми параметрами:

$$\underline{Z}_{11}, \underline{Z}_{12}=\underline{Z}_{21}, \text{ и } \underline{Z}_{22};\ \underline{Y}_{11}, \underline{Y}_{12}=\underline{Y}_{21} \text{ и } \underline{Y}_{22};\ \underline{H}_{11}, \underline{H}_{12}=-\underline{H}_{21}, \text{ и } \underline{H}_{22};$$

$$\underline{F}_{11}, \underline{F}_{12}=-\underline{F}_{21} \text{ и } \underline{F}_{22};\ \underline{A}_{11}\underline{A}_{22}-\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}=1;\ \underline{B}_{11}\underline{B}_{22}-\underline{B}_{12}\underline{B}_{21}=1;$$

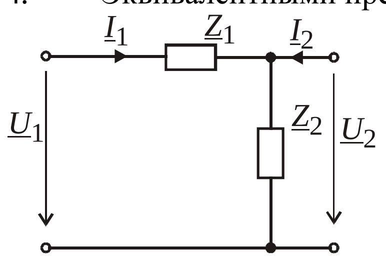
4. Обратимый симметричный ЧП имеет только два независимых параметра:

$$\underline{Z}_{11}=\underline{Z}_{22}, \underline{Z}_{12}=\underline{Z}_{21}, \underline{Y}_{11}=\underline{Y}_{22}, \underline{Y}_{12}=\underline{Y}_{21}.$$

5. Параметры ЧП имеют определенный физический смысл.

Способы определения параметров ЧП

1. Составление уравнений по законам Кирхгофа (либо по МКТ или по МУН) и представлением их решения в виде одной из форм уравнений передачи.
2. По значениям напряжений и токов в режимах Х.Х. и К.З.
3. Разбивкой сложного ЧП на более простые ЧП, параметры которых известны.
4. Эквивалентными преобразованиями.



$$\underline{Z}_{11}=\left(\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1}\right)_{\underline{I}_2=0}=\frac{\underline{I}_1\left(\underline{Z}_1+\underline{Z}_2\right)}{\underline{I}_1}=\underline{Z}_1+\underline{Z}_2.$$

$$\underline{Z}_{22}=\left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2}\right)_{\underline{I}_1=0}=\frac{\underline{I}_2\underline{Z}_2}{\underline{I}_2}=\underline{Z}_2.$$

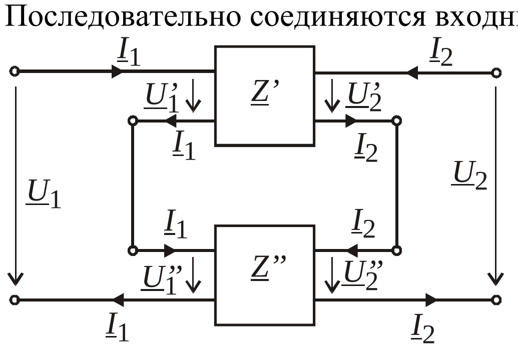
$$\underline{Z}_{12}=\left(\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2}\right)_{\underline{I}_1=0}=\frac{\underline{I}_2\underline{Z}_2}{\underline{I}_2}=\underline{Z}_2.$$

$$\underline{Z}_{21}=\left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_1}\right)_{\underline{I}_2=0}=\frac{\underline{I}_1\underline{Z}_2}{\underline{I}_1}=\underline{Z}_2.$$

Способы соединений четырехполюсников.

1. Последовательное соединение ЧП

Последовательно соединяются входные и выходные зажимы.



$$\mathbf{U}=\begin{bmatrix}\underline{U}_1\\ \underline{U}_2\end{bmatrix},\ \mathbf{I}=\begin{bmatrix}\underline{I}_1\\ \underline{I}_2\end{bmatrix}.$$

Матрица токов одинакова.
Напряжения складываются.

$$\mathbf{U}=\mathbf{U}'+\mathbf{U}''=\mathbf{Z}'\cdot\mathbf{I}+\mathbf{Z}''\cdot\mathbf{I}$$

Получаем:

$$\mathbf{U}=\left(\mathbf{Z}'+\mathbf{Z}''\right)\mathbf{I}$$

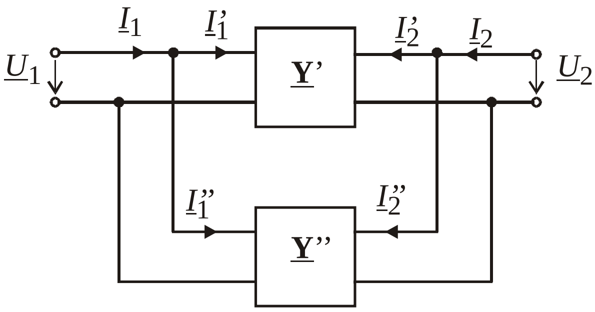
Вывод: при последовательном соединении ЧП матрица сопротивлений эквивалентного ЧП равна сумме матриц сопротивлений соединенных ЧП.

$$\mathbf{Z}=\mathbf{Z}'+\mathbf{Z}''=\begin{bmatrix}\underline{Z}'_{11}+\underline{Z}''_{11} & \underline{Z}'_{12}+\underline{Z}''_{12}\\ \underline{Z}'_{21}+\underline{Z}''_{21} & \underline{Z}'_{22}+\underline{Z}''_{22}\end{bmatrix}.$$

2. Параллельное соединение ЧП

Входные и выходные зажимы соединяются параллельно. При этом, целесообразно использовать матрицы проводимостей.

$$\mathbf{Y}=\mathbf{Y}'+\mathbf{Y}''=\begin{bmatrix}\underline{Y}'_{11}+\underline{Y}''_{11} & \underline{Y}'_{12}+\underline{Y}''_{12}\\ \underline{Y}'_{21}+\underline{Y}''_{21} & \underline{Y}'_{22}+\underline{Y}''_{22}\end{bmatrix}.$$



Матрица напряжений одинакова.
Токи складываются.

$$\mathbf{I}=\mathbf{I}'+\mathbf{I}''=\mathbf{Y}'\cdot\mathbf{U}+\mathbf{Y}''\cdot\mathbf{U}$$

Получаем:

$$\mathbf{I}=\left(\mathbf{Y}'+\mathbf{Y}''\right)\mathbf{U}.$$

Вывод: при параллельном соединении ЧП матрица проводимостей эквивалентного ЧП равна сумме матриц проводимостей соединенных ЧП.

3. Последовательно-параллельное соединение ЧП

Входные зажимы соединяются последовательно, а выходные – параллельно. При этом используются уравнения в H-параметрах.

Самостоятельно построить схему последовательно-параллельного соединения!

$$\mathbf{H}=\mathbf{H}'+\mathbf{H}''=\begin{bmatrix}\underline{H}'_{11}+\underline{H}''_{11} & \underline{H}'_{12}+\underline{H}''_{12}\\ \underline{H}'_{21}+\underline{H}''_{21} & \underline{H}'_{22}+\underline{H}''_{22}\end{bmatrix}.$$

4. Параллельно-последовательное соединения ЧП

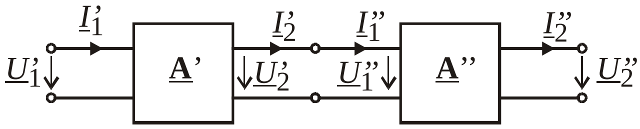
Входные зажимы соединяются параллельно, а выходные – последовательно. При этом используются уравнения в F-параметрах.

Самостоятельно построить схему параллельно-последовательного соединения!

$$\mathbf{F}=\mathbf{F}'+\mathbf{F}''=\begin{bmatrix}\underline{F}'_{11}+\underline{F}''_{11} & \underline{F}'_{12}+\underline{F}''_{12}\\ \underline{F}'_{21}+\underline{F}''_{21} & \underline{F}'_{22}+\underline{F}''_{22}\end{bmatrix}.$$

5. Каскадное соединение ЧП

При каскадном соединении выходное напряжение первого ЧП равно входному напряжению второго $\underline{U}'_2=\underline{U}''_1$. Необходимо согласовать направления токов – выходного первого ЧП и входного второго так, чтобы $\underline{I}'_2=\underline{I}''_1$. Удобно использовать уравнения в A-параметрах.



$$\mathbf{A} = \mathbf{A}' \times \mathbf{A}''.$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \underline{A}'_{11} & \underline{A}'_{12} \\ \underline{A}'_{21} & \underline{A}'_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \underline{A}''_{11} & \underline{A}''_{12} \\ \underline{A}''_{21} & \underline{A}''_{22} \end{bmatrix}.$$

Указанные формулы нахождения матриц сложных ЧП справедливы лишь при выполнении условий регулярности их соединений. Соединение ЧП регулярно, если токи, протекающие через оба первичных и оба вторичных зажима каждого ЧП, равны по величине и обратны по направлению.

Параметры холостого хода и короткого замыкания. Входное сопротивление четырехполюсника.

Параметры ХХ и КЗ можно представить в виде:

$$\underline{Z}_{1\text{X}} = \underline{Z}_{11},\ \underline{Z}_{2\text{X}} = \underline{Z}_{22},\ \underline{Z}_{1\text{K}} = \frac{1}{\underline{Y}_{11}},\ \underline{Z}_{2\text{K}} = \frac{1}{\underline{Y}_{22}}.$$

Этих параметров достаточно для описания обратимого ЧП.

$$\frac{\underline{Z}_{1\text{K}}}{\underline{Z}_{1\text{X}}} = \frac{\underline{Z}_{2\text{K}}}{\underline{Z}_{2\text{X}}}.$$ – условие обратимости ЧП.

Для симметричного обратимого ЧП выполняется условие:

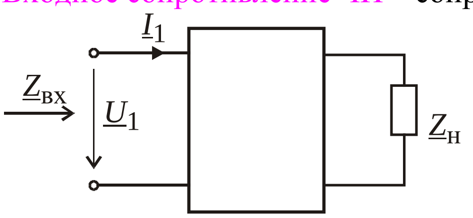
$$\underline{Z}_{1\text{K}} = \underline{Z}_{2\text{K}},\ \underline{Z}_{1\text{X}} = \underline{Z}_{2\text{X}}.$$

Вывод: симметричный обратимый ЧП определяется 2 независимыми параметрами.

Параметры ХХ и КЗ могут быть выражены через любую систему коэффициентов, например через коэффициенты А:

$$\underline{Z}_{1\text{K}} = \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{22}},\ \underline{Z}_{2\text{K}} = \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{11}},\ \underline{Z}_{1\text{X}} = \frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{21}},\ \underline{Z}_{2\text{X}} = \frac{\underline{A}_{22}}{\underline{A}_{21}}.$$

Входное сопротивление ЧП – сопротивление со стороны входных зажимов ЧП.



$$\underline{Z}_{\text{вх}1} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{A}_{11}\underline{U}_2 + \underline{A}_{12}\underline{I}_2}{\underline{A}_{21}\underline{U}_2 + \underline{A}_{22}\underline{I}_2}.$$

Поскольку $\underline{Z}_{\text{н}} = \dfrac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2}$, то получаем: $\underline{Z}_{\text{вх}1} = \dfrac{\underline{A}_{11}\underline{Z}_{\text{н}} + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{Z}_{\text{н}} + \underline{A}_{22}}$.

Входное сопротивление с другой стороны ЧП определяется в виде:

$$\underline{Z}_{\text{вх}2} = \frac{\underline{A}_{22}\underline{Z}_{\text{г}} + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{Z}_{\text{г}} + \underline{A}_{11}}.$$

На практике удобна формула для входного сопротивления через параметры ХХ и КЗ:

$$\underline{Z}_{\text{вх}1} = \frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{21}} \cdot \frac{\dfrac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{11}} + \underline{Z}_{\text{н}}}{\dfrac{\underline{A}_{22}}{\underline{A}_{21}} + \underline{Z}_{\text{н}}} = \underline{Z}_{1\text{X}} \cdot \frac{\underline{Z}_{2\text{K}} + \underline{Z}_{\text{н}}}{\underline{Z}_{2\text{X}} + \underline{Z}_{\text{н}}}.$$

Лекция 8

Согласованное включение и характеристические сопротивления ЧП.

Режим согласованного включения является наиболее благоприятным при передаче сигналов, поскольку при этом отсутствуют отражения электрической энергии на стыках «генератор-четырехполюсник» и «четырехполюсник-нагрузка» и искажение сигнала. Отсюда следует, что в режиме согласования должны выполнятся условия:

$$\underline{Z}_{\text{вх}1} = \underline{Z}_{\text{г}},\ \underline{Z}_{\text{вх}2} = \underline{Z}_{\text{н}}.$$

Существует пара сопротивлений, для которых выполняются выше указанные условия. Эти сопротивления называются характеристическими и обозначаются:

$\underline{Z}_{\text{c}1}$ – сопротивление, определяемое со стороны входных зажимов.

$\underline{Z}_{\text{c}2}$ – сопротивление, определяемое со стороны выходных зажимов.

Режимом согласованного включения ЧП называется такой режим работы, когда $\underline{Z}_{\text{г}} = \underline{Z}_{\text{c}1}$ и $\underline{Z}_{\text{н}} = \underline{Z}_{\text{c}2}$. Отсюда следует: $\underline{Z}_{\text{вх}1} = \underline{Z}_{\text{г}} = \underline{Z}_{\text{c}1}$ и $\underline{Z}_{\text{вх}2} = \underline{Z}_{\text{н}} = \underline{Z}_{\text{c}2}$.

Характеристические сопротивления через А-параметры определяются в виде:

$$\underline{Z}_{\text{c}1} = \frac{\underline{A}_{11}\underline{Z}_{\text{c}2} + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{Z}_{\text{c}2} + \underline{A}_{22}},\ \underline{Z}_{\text{c}2} = \frac{\underline{A}_{22}\underline{Z}_{\text{c}1} + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{Z}_{\text{c}2} + \underline{A}_{11}}.$$

После алгебраических преобразований получаем:

$$\underline{Z}_{\text{c}1} = \sqrt{\frac{\underline{A}_{11}\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{A}_{22}}},\ \underline{Z}_{\text{c}2} = \sqrt{\frac{\underline{A}_{22}\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{A}_{11}}}.$$

Характеристические сопротивления через параметры ХХ и КЗ определяются в виде:

$$\underline{Z}_{\text{c}1} = \sqrt{\underline{Z}_{1\text{X}}\underline{Z}_{1\text{K}}},\ \underline{Z}_{\text{c}2} = \sqrt{\underline{Z}_{2\text{X}}\underline{Z}_{2\text{K}}}.$$

Для обратимого симметричного ЧП выполняется равенство:

$$\underline{Z}_{\text{c}1} = \underline{Z}_{\text{c}2} = \underline{Z}_{\text{c}}.$$

Характеристическая мера передачи четырехполюсника.

При согласованном включении потери энергии будут только в ЧП. Чтобы учесть эти потери вводят характеристическую меру передачи, определяемую как:

$$\underline{\Gamma}_{\text{c}} = \frac{1}{2}\ln\frac{\underline{U}_1\underline{I}_1}{\underline{U}_2\underline{I}_2}.$$

Поскольку $\underline{U}_1 = \underline{I}_1\underline{Z}_{\text{c}1}$ и $\underline{U}_2 = \underline{I}_2\underline{Z}_{\text{c}2}$, то:

$$\underline{\Gamma}_{\text{c}} = \ln\left(\frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2}\sqrt{\frac{\underline{Z}_{\text{c}1}}{\underline{Z}_{\text{c}2}}}\right) = \ln\left(\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2}\sqrt{\frac{\underline{Z}_{\text{c}2}}{\underline{Z}_{\text{c}1}}}\right).$$

Для симметричного обратимого ЧП:

$$\underline{\Gamma}_{\text{c}} = \ln\frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} = \ln\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2}.$$

Характеристическая мера передачи через А-параметры:

$$\underline{\Gamma}_{\text{c}} = \ln\left(\sqrt{\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}} + \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}}\right).$$

Часто характеристическую меру передачи определяют с помощью гиперболических функций.

Т.к. $e^{\underline{\Gamma}_{\text{c}}} = \text{sh}\underline{\Gamma}_{\text{c}} + \text{ch}\underline{\Gamma}_{\text{c}}$, то $\text{ch}\underline{\Gamma}_{\text{c}} = \sqrt{\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}}$, $\text{sh}\underline{\Gamma}_{\text{c}} = \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}}$.

Характеристическая мера передачи через параметры ХХ и КЗ:

$$\text{th}\underline{\Gamma}_{\text{c}} = \frac{\text{sh}\underline{\Gamma}_{\text{c}}}{\text{ch}\underline{\Gamma}_{\text{c}}} = \sqrt{\frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{22}}\cdot\frac{\underline{A}_{21}}{\underline{A}_{11}}} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1\text{K}}}{\underline{Z}_{1\text{X}}}} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{2\text{K}}}{\underline{Z}_{2\text{X}}}}.$$

Более удобная формула для практики:

$$\underline{\Gamma}_{\text{c}} = \frac{1}{2}\ln\left[\frac{1+\sqrt{\frac{\underline{Z}_{1\text{K}}}{\underline{Z}_{1\text{X}}}}}{1-\sqrt{\frac{\underline{Z}_{1\text{K}}}{\underline{Z}_{1\text{X}}}}}\right] = \frac{1}{2}\ln\left[\frac{1+\sqrt{\frac{\underline{Z}_{2\text{K}}}{\underline{Z}_{2\text{X}}}}}{1-\sqrt{\frac{\underline{Z}_{2\text{K}}}{\underline{Z}_{2\text{X}}}}}\right].$$

Физический смысл характеристической меры передачи:

$$\underline{\Gamma}_c = \frac{1}{2}\ln\frac{\underline{U}_1\underline{I}_1}{\underline{U}_2\underline{I}_2} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{|\underline{U}_1|e^{j\varphi_{u1}}}{|\underline{U}_2|e^{j\varphi_{u2}}}\cdot\frac{|\underline{I}_1|e^{j\varphi_{i1}}}{|\underline{I}_2|e^{j\varphi_{i2}}}\right).$$

После алгебраических преобразований:

$$\underline{\Gamma}_c = \frac{1}{2}\ln\frac{|\underline{U}_1\underline{I}_1|}{|\underline{U}_2\underline{I}_2|} + j\frac{1}{2}\left(\left(\varphi_{u1}-\varphi_{u2}\right)+\left(\varphi_{i1}-\varphi_{i2}\right)\right) = A_c + jB_c, \text{ где}$$

$A_c = \frac{1}{2}\ln\frac{|\underline{U}_1\underline{I}_1|}{|\underline{U}_2\underline{I}_2|} = \ln\frac{S_1}{S_2}$ – характеристическое ослабление. Единица измерения: непер (Нп).

На практике характеристическое ослабление принято вычислять в децибелах (дБ):

$$A_c = 10\lg\frac{|\underline{U}_1\underline{I}_1|}{|\underline{U}_2\underline{I}_2|} = 10\lg\frac{S_1}{S_2}.$$

Для обратимого симметричного ЧП: $A_c = \ln\frac{|\underline{U}_1|}{|\underline{U}_2|} = \ln\frac{|\underline{I}_1|}{|\underline{I}_2|}$ [Нп], $A_c = 20\lg\frac{|\underline{U}_1|}{|\underline{U}_2|} = 20\lg\frac{|\underline{I}_1|}{|\underline{I}_2|}$ [дБ].

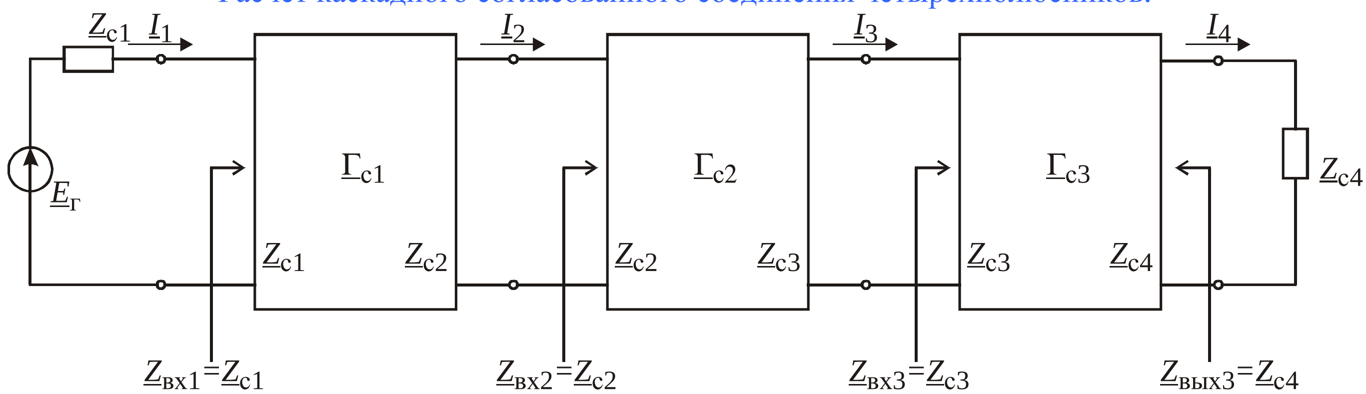
Связь между Нп и дБ: $1\,\text{Нп} = 8,686\,\text{дБ}$, $1\,\text{дБ} = 0,115\,\text{Нп}$.

$B_c = \frac{1}{2}\left(\left(\varphi_{u1}-\varphi_{u2}\right)+\left(\varphi_{i1}-\varphi_{i2}\right)\right)$ – характеристическая фаза. Единица измерения: рад (град).

Вывод: к характеристическим параметрам ЧП относятся:

1. Характеристические сопротивления $\underline{Z}_{c1}$, $\underline{Z}_{c2}$.
2. Характеристическая мера передачи $\underline{\Gamma}_c$.
3. Характеристическое ослабление A_c.
4. Характеристическая фаза B_c.

Расчёт каскадного согласованного соединения четырехполюсников.



Согласование четырехполюсников состоит в том, что характеристические сопротивления со стороны их соединения выбраны равными друг другу, а внутреннее сопротивление генератора и сопротивление нагрузки – равными характеристическим сопротивлениям крайних четырехполюсников.

Характеристическая мера передачи определяется:

$$\underline{\Gamma}_c = \ln\left(\frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_4}\sqrt{\frac{\underline{Z}_{c1}}{\underline{Z}_{c4}}}\right) = \ln\left(\frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2}\cdot\frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_3}\cdot\frac{\underline{I}_3}{\underline{I}_4}\cdot\sqrt{\frac{\underline{Z}_{c1}}{\underline{Z}_{c2}}}\cdot\sqrt{\frac{\underline{Z}_{c2}}{\underline{Z}_{c3}}}\cdot\sqrt{\frac{\underline{Z}_{c3}}{\underline{Z}_{c4}}}\right).$$

После несложных преобразований получаем:

$$\underline{\Gamma}_c = \ln\left(\frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2}\sqrt{\frac{\underline{Z}_{c1}}{\underline{Z}_{c2}}}\right) + \ln\left(\frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_3}\sqrt{\frac{\underline{Z}_{c2}}{\underline{Z}_{c3}}}\right) + \ln\left(\frac{\underline{I}_3}{\underline{I}_4}\sqrt{\frac{\underline{Z}_{c3}}{\underline{Z}_{c4}}}\right) = \underline{\Gamma}_{c1} + \underline{\Gamma}_{c2} + \underline{\Gamma}_{c3}.$$

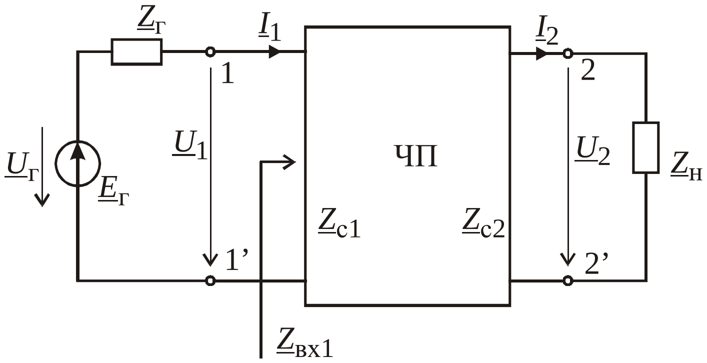
Вывод: характеристическая мера передачи результирующего ЧП равна сумме характеристических мер передачи соединяемых ЧП.

Рабочая мера передачи и передаточная функция четырехполюсника.

Обеспечить идеальное согласование ЧП с генератором и нагрузкой в широкой полосе частот возможно в случае, когда внутреннее сопротивление генератора, сопротивление нагрузки и характеристические сопротивления являются резистивными. Добиться равенства комплексных сопротивлений на всем частотном диапазоне не удается. Вследствие этого возникают дополнительные потери энергии.

Рассмотрим работу ЧП в реальных условиях:

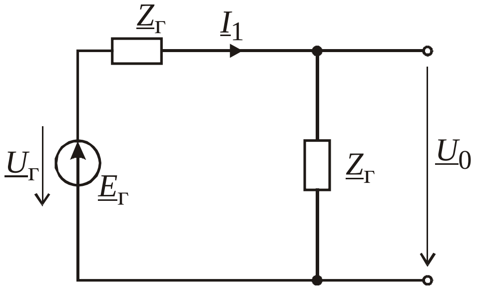
$\underline{Z}_г \neq \underline{Z}_{c1}$, $\underline{Z}_н \neq \underline{Z}_{c2}$, то есть $\underline{Z}_{вх1} \neq \underline{Z}_г$, $\underline{Z}_{вх2} \neq \underline{Z}_н$.



Мощность, выделяемая в нагрузке:

$$\underline{S}_2 = \underline{U}_2 \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2^2}{\underline{Z}_н}.$$

Максимальная мощность $\underline{S}_m$ выделяется на сопротивлении, равном внутреннему сопротивлению генератора по следующей схеме:



$$\underline{S}_m = \underline{U}_0 \underline{I} = \underline{I}^2 \underline{Z}_г = \left(\frac{\underline{U}_г}{2\underline{Z}_г}\right)^2 \underline{Z}_г = \frac{\underline{U}_г^2}{4\underline{Z}_г}.$$

Рабочая мера передачи определяется в виде: $\underline{\Gamma}_р = \frac{1}{2}\ln\frac{\underline{U}_0 \underline{I}}{\underline{U}_2 \underline{I}_2} = \frac{1}{2}\ln\frac{\underline{S}_m}{\underline{S}_2} = A_р + jB_р$.

$$A_р = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\underline{S}_m}{\underline{S}_2}\right| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\underline{U}_г^2 \underline{Z}_н}{4\underline{U}_2^2 \underline{Z}_г}\right| = \ln\left|\frac{\underline{U}_г}{2\underline{U}_2}\right| + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\underline{Z}_н}{\underline{Z}_г}\right|$$ – рабочее ослабление (Нп).

$$A_р = 20\lg\left|\frac{\underline{U}_г}{2\underline{U}_2}\right| + 10\lg\left|\frac{\underline{Z}_н}{\underline{Z}_г}\right|$$ – рабочее ослабление (дБ).

Теоретически рабочее ослабление вычисляют по формуле: $A_р = A_c + \Delta A_1 + \Delta A_2 + \Delta A_3$, где A_c – характеристическое ослабление ЧП; ΔA_1, ΔA_2 – дополнительные ослабления, связанные из-за несогласованности на входе и выходе ЧП:

$$\Delta A_1 = 20\lg\left|\frac{\underline{Z}_{c1} + \underline{Z}_г}{2\sqrt{\underline{Z}_{c1}\underline{Z}_г}}\right|, \quad \Delta A_2 = 20\lg\left|\frac{\underline{Z}_{c2} + \underline{Z}_н}{2\sqrt{\underline{Z}_{c2}\underline{Z}_н}}\right|.$$

ΔA_3 – дополнительное ослабление за счет многократного отражения энергии от входных и выходных зажимов ЧП:

$$\Delta A_3 = 20\lg\left|1 - \frac{\underline{Z}_{c1} - \underline{Z}_г}{\underline{Z}_{c1} + \underline{Z}_г} \cdot \frac{\underline{Z}_{c2} - \underline{Z}_н}{\underline{Z}_{c2} + \underline{Z}_н} e^{-2\underline{\Gamma}_c}\right|.$$

При полном согласовании: $A_р = A_c$.

Рабочее ослабление является вещественной частью рабочей меры передачи:

$\underline{\Gamma}_р = A_р + jB_р$, где $B_р$ – рабочая фаза.

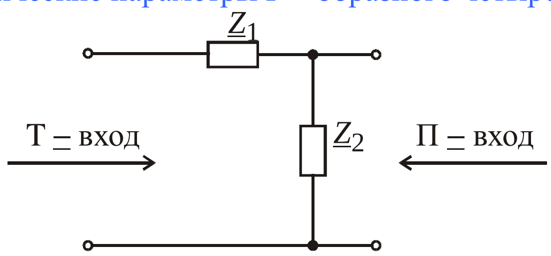
Рабочая передаточная функция определяется в виде: $\underline{T}_р = 2\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_г}\sqrt{\frac{\underline{Z}_г}{\underline{Z}_н}}$.

Т.к. $A_{\text{р}} = \ln\left|\frac{\underline{U}_{\text{г}}}{2\underline{U}_2}\right| + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\underline{Z}_{\text{н}}}{\underline{Z}_{\text{г}}}\right|$, то легко установить следующую связь: $A_{\text{р}} = \ln\frac{1}{|\underline{T}_{\text{р}}|}$.

Вывод: к рабочим параметрам ЧП относят:

1. Входное сопротивление $\underline{Z}_{\text{вх}}$;
2. Рабочее ослабление $A_{\text{р}}$;
3. Рабочая мера передачи $\underline{\Gamma}_{\text{р}}$;
4. Рабочая фаза $B_{\text{р}}$;
5. Рабочая передаточная функция $\underline{T}_{\text{р}}$;

Характеристические параметры Г – образного четырехполюсника.



Характеристические сопротивления:

$\underline{Z}_{\text{c}1} = \sqrt{\underline{Z}_{1\text{X}}\underline{Z}_{1\text{K}}}$, $\underline{Z}_{\text{c}2} = \sqrt{\underline{Z}_{2\text{X}}\underline{Z}_{2\text{K}}}$.

$\underline{Z}_{1\text{X}} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$, $\underline{Z}_{1\text{K}} = \underline{Z}_1$.

$\underline{Z}_{2\text{X}} = \underline{Z}_2$, $\underline{Z}_{2\text{K}} = \dfrac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$.

Отсюда получаем:

$$\underline{Z}_{\text{c}1} = \sqrt{\underline{Z}_1\left(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2\right)} = \sqrt{\underline{Z}_1\underline{Z}_2\left(1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}\right)} = \underline{Z}_{\text{T}},\ \underline{Z}_{\text{c}2} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}\underline{Z}_2} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{1 + \dfrac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}}} = \underline{Z}_{\Pi}.$$

Определим характеристическую меру передачи через А – параметры:

$$\text{ch}\underline{\Gamma}_{\text{c}} = \sqrt{\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}},\ \text{sh}\underline{\Gamma}_{\text{c}} = \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}},\ \text{где}$$

$\underline{A}_{11} = 1 + \dfrac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}$, $\underline{A}_{12} = \underline{Z}_1$, $\underline{A}_{21} = \dfrac{1}{\underline{Z}_2}$, $\underline{A}_{22} = 1$.

После подстановки получаем:

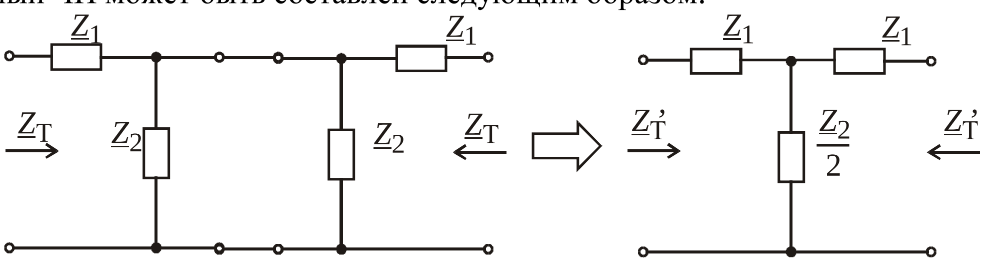
$$\text{ch}\underline{\Gamma}_{\text{c}} = \sqrt{\left(1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}\right)\cdot 1} = \sqrt{1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}},\ \text{sh}\underline{\Gamma}_{\text{c}} = \sqrt{\underline{Z}_1\frac{1}{\underline{Z}_2}} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}}.$$

Выучить формулы для Г-образного ЧП:

$$\underline{Z}_{\text{T}} = \sqrt{\underline{Z}_1\underline{Z}_2\left(1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}\right)},\ \underline{Z}_{\Pi} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{1 + \dfrac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}}},\ \text{ch}\underline{\Gamma}_{\text{c}} = \sqrt{1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}},\ \text{sh}\underline{\Gamma}_{\text{c}} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}}.$$

Характеристические параметры Т – образного четырехполюсника.

Т-образный ЧП может быть составлен следующим образом:



Поскольку Г-образные ЧП соединены согласованно и регулярно, то характеристические параметры Т-образного ЧП определяются как:

$$\underline{Z}'_{\text{T}} = \underline{Z}_{\text{T}} = \sqrt{\underline{Z}_1\underline{Z}_2\left(1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}\right)},\ \underline{\Gamma}'_{\text{c}} = 2\underline{\Gamma}_{\text{c}}.$$

Поскольку $\mathrm{ch}\underline{\Gamma}'_{c}=\mathrm{ch}2\underline{\Gamma}_{c}=1+2\mathrm{sh}^{2}\underline{\Gamma}_{c}$, а $\mathrm{sh}\underline{\Gamma}_{c}=\sqrt{\dfrac{\underline{Z}_{1}}{\underline{Z}_{2}}}$, то $\mathrm{ch}\underline{\Gamma}'_{c}=1+2\dfrac{\underline{Z}_{1}}{\underline{Z}_{2}}$

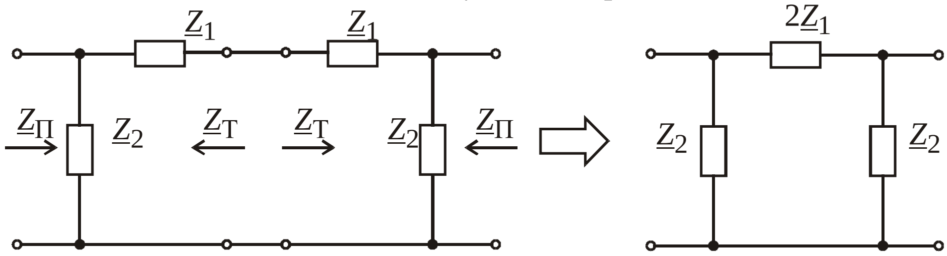
Выучить формулы для Т-образного ЧП:

$$\underline{Z}'_{\mathrm{T}}=\sqrt{\underline{Z}_{1}\underline{Z}_{2}\left(1+\frac{\underline{Z}_{1}}{\underline{Z}_{2}}\right)},\ \mathrm{ch}\underline{\Gamma}'_{c}=1+2\frac{\underline{Z}_{1}}{\underline{Z}_{2}}.$$

Поскольку ЧП симметричный, то $\mathrm{ch}\ \underline{\Gamma}'_{c}=\sqrt{\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}}=\underline{A}_{11}=1+2\dfrac{\underline{Z}_{1}}{\underline{Z}_{2}}$.

Характеристические параметры П – образного четырехполюсника.

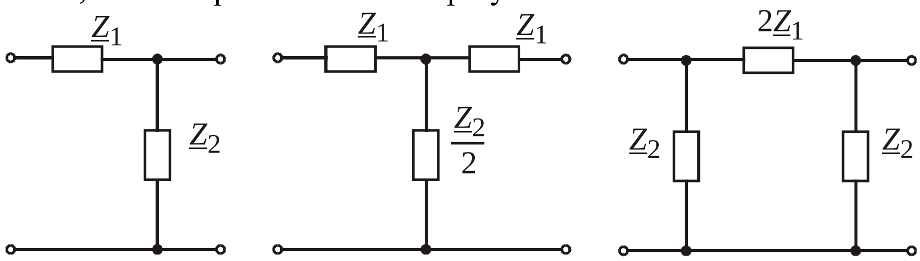
П-образный ЧП может быть составлен следующим образом:



Аналогично, как и для Т-образного ЧП можно показать, что характеристические параметры определяются в виде:

$$\underline{Z}'_{\Pi}=\underline{Z}_{\Pi}=\sqrt{\frac{\underline{Z}_{1}\underline{Z}_{2}}{1+\dfrac{\underline{Z}_{1}}{\underline{Z}_{2}}}},\ \mathrm{ch}\underline{\Gamma}'_{c}=1+2\frac{\underline{Z}_{1}}{\underline{Z}_{2}}.$$ (Формулы выучить!)

Четырехполюсники Г, Т и П-образного типов образуют класс лестничных схем



Последние 3 схемы находят широкое применение в электрических фильтрах.

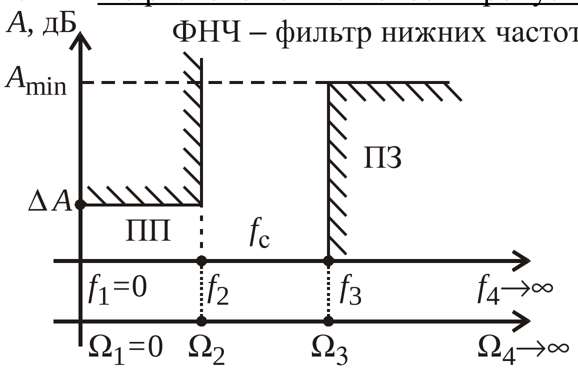
Лекция 9

Аналоговые частотно-избирательные фильтры. Определение и классификация

Электрический фильтр – четырехполюсник, пропускающий без заметного ослабления колебания определенных частот и подавляющий колебания других частот.

Классификация фильтров.

1. <u>По расположению полосы пропускания (ПП) и полосы задерживания (ПЗ).</u>



f_1 – нижняя граничная частота ПП [Гц];

f_2 – верхняя граничная частота ПП [Гц];

f_3 – нижняя граничная частота ПЗ [Гц];

f_4 – верхняя граничная частота ПЗ [Гц];

Ω_1 – нормированная нижняя граничная частота ПП;

Ω_2 – нормированная верхняя граничная частота ПП;

Ω_3 – нормированная нижняя граничная частота ПЗ;

Ω_4 – нормированная верхняя граничная частота ПЗ;

f_c – частота среза [Гц] (Ослабление равно 3 дБ)

$A_{\min}$ – минимальное допустимое ослабление в ПЗ;

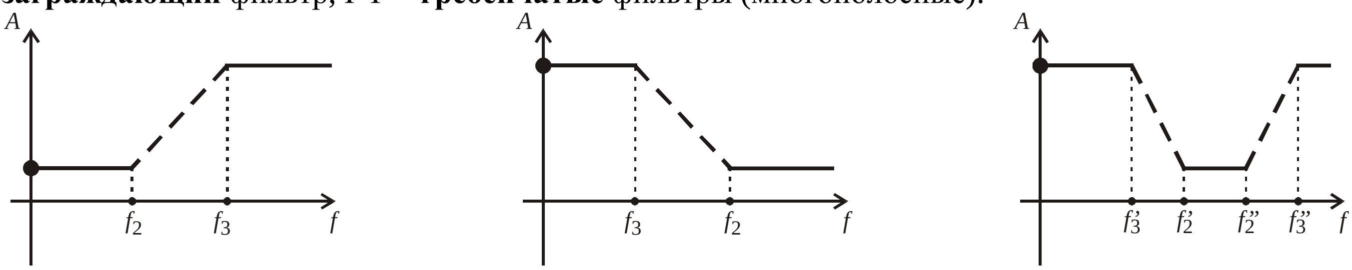
ΔA – максимальное допустимое ослабление в ПП;

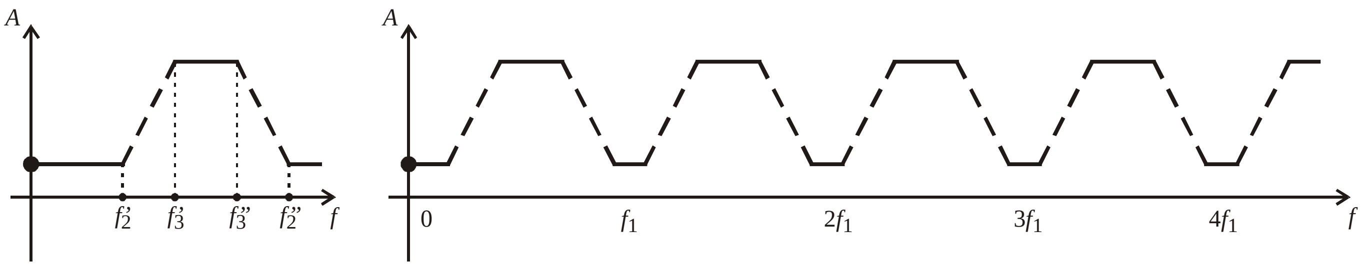
Переходной областью называют диапазон частот: $f_2 < f < f_3$, или $\Omega_2 < \Omega < \Omega_3$. Нормирование у ФНЧ по частоте проводят относительно верхней граничной частоты ПП f_2.

$$\Omega_1 = \frac{f_1}{f_2} = 0, \Omega_2 = \frac{f_2}{f_2} = 1, \ \Omega_3 = \frac{f_3}{f_2}, \ \Omega_4 = \frac{f_4}{f_2} = \infty.$$

При расчете фильтров по рабочим параметрам никаких требований к переходной области не предъявляются.

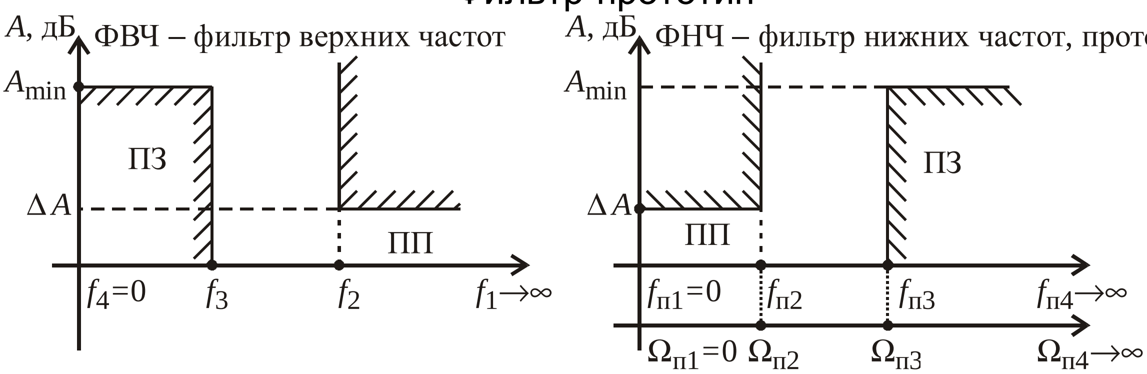
Существуют также: ФВЧ – фильтр **верхних** частот, ПФ – **полосовой** фильтр, ЗФ – **заграждающий** фильтр, ГФ – **гребенчатые** фильтры (многополосные):





Самостоятельно!!! Дайте определение каждому из перечисленных фильтров.

Фильтр-прототип



f_{p1}, f_{p2}, f_{p3}, f_{p4} – граничные частоты ФНЧП [Гц]. Для ФНЧП справедливы соотношения:

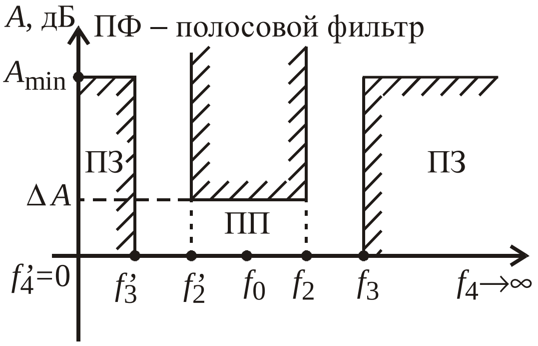
$$f_{p1} = f_4, \ f_{p2} = f_3, \ f_{p3} = f_2, \ f_{p4} = f_1.$$

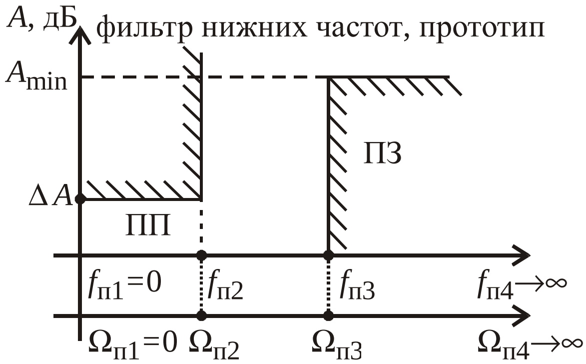
Ω_{p1}, Ω_{p2}, Ω_{p3}, Ω_{p4} – нормированные граничные частоты ФНЧП.

$$\Omega_{p1} = \frac{f_{p1}}{f_{p2}} = 0, \ \Omega_{p2} = \frac{f_{p2}}{f_{p2}} = 1, \ \Omega_{p3} = \frac{f_{p3}}{f_{p2}}, \ \Omega_{p4} = \frac{f_{p4}}{f_{p2}} = \infty.$$

Для перехода обратно к схеме ФВЧ используются соотношения:

$$\Omega_1 = \frac{f_1}{f_2} = \frac{1}{\Omega_{p1}} = \infty, \ \Omega_2 = \frac{f_2}{f_2} = \frac{1}{\Omega_{p2}} = 1, \ \Omega_3 = \frac{f_3}{f_2} = \frac{1}{\Omega_{p3}}, \ \Omega_4 = \frac{f_4}{f_2} = \frac{1}{\Omega_{p4}} = 0.$$





$f_0 = f_1 = f_1' = \sqrt{f_2 f_2'} = \sqrt{f_3 f_3'}$ – центральная (среднегеометрическая) частота [Гц].

Для ФНЧП справедливы следующие соотношения:

$$f_{p1} = f_1 - f_1' = 0,\ f_{p2} = f_2 - f_2',\ f_{p3} = f_3 - f_3',\ f_{p4} = f_4 - f_4' = \infty .$$

$$\Omega_{p1} = \frac{f_{p1}}{f_{p2}} = 0,\ \Omega_{p2} = \frac{f_{p2}}{f_{p2}} = 1,\ \Omega_{p3} = \frac{f_{p3}}{f_{p2}},\ \Omega_{p4} = \frac{f_{p4}}{f_{p2}} = \infty .$$

Для ПФ выполняются соотношения:

$$\Omega_1 = \frac{f_1}{f_0} = 1,\ \Omega_1 = \frac{f_1}{f_0} = 1,\ \Omega_1 = \frac{1}{\Omega_1'},\ \Omega_2 = \frac{f_2}{f_0},\ \Omega_2' = \frac{f_2'}{f_0},\ \Omega_2 = \frac{1}{\Omega_2'} .$$

$$\Omega_3 = \frac{f_3}{f_0},\ \Omega_3' = \frac{f_3'}{f_0},\ \Omega_3 = \frac{1}{\Omega_3'},\ \Omega_4 = \frac{f_4}{f_0} = \infty,\ \Omega_4' = \frac{f_4'}{f_0} = 0,\ \Omega_4 = \frac{1}{\Omega_4'} .$$

Для перехода от ФНЧП к схеме ПФ и обратно используются соотношения:

$$\Omega_p = \frac{1}{a}\left(\Omega - \frac{1}{\Omega}\right),\ \Omega = \frac{1}{2}\left(\Omega_p a + \sqrt{a^2\Omega_p^2 + 4}\right),$$

где $a = \frac{f_2 - f_2'}{f_0} = \frac{f_3 - f_3'}{f_0}$ – коэффициент преобразования.

2. <u>По использованию элементов</u>

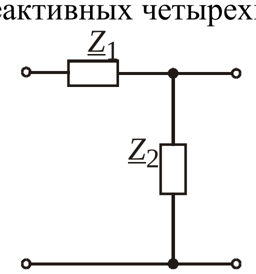
- LC-фильтры (содержат индуктивности и емкости)
- RC-фильтры (содержат резисторы и емкости)
- Резонаторные фильтры
- ARC-фильтры (активные фильтры содержат усилительные элементы)

3. <u>Классификация по схемам</u>

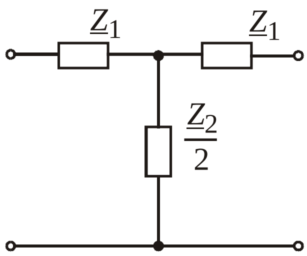
- Лестничные (цепочные) фильтры
- Мостовые фильтры
- Фильтры с цепями обратной связи

Лестничные LC – фильтры

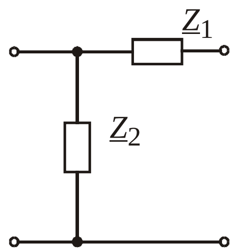
Лестничные LC – фильтры – это фильтры из каскадно соединенных Г, Т и П-образных реактивных четырехполюсников.



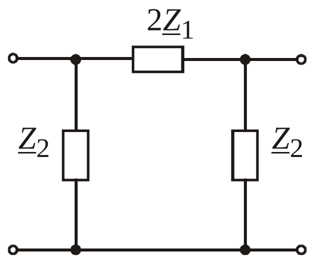
полузвено с Т-входом



звено с Т-входом



полузвено с П-входом



звено с П-входом

Собственная мера передачи звеньев Т и П типа определяется:

$$\mathrm{ch}\underline{\Gamma}_\mathrm{c} = 1 + 2\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2},\ \text{где}\ \underline{\Gamma}_\mathrm{c} = A_\mathrm{c} + \mathrm{j}B_\mathrm{c}.$$

С другой стороны: $\mathrm{ch}\left(A_\mathrm{c} + \mathrm{j}B_\mathrm{c}\right) = \mathrm{ch}A_\mathrm{c}\cos B_\mathrm{c} + \mathrm{j}\,\mathrm{sh}A_\mathrm{c}\sin B_\mathrm{c}$.

Поскольку $\underline{Z}_1$ и $\underline{Z}_2$ реактивные сопротивления, то $\mathrm{ch}A_\mathrm{c}\cos B_\mathrm{c} = 1 + 2\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}$, $\mathrm{sh}A_\mathrm{c}\sin B_\mathrm{c} = 0$.

В полосе пропускания (ПП) ослабление равно нулю, поэтому $\mathrm{sh}A_\mathrm{c} = 0$, $\sin B_\mathrm{c} \neq 0$.

В полосе задерживания (ПЗ) ослабление отлично от нуля, следовательно $\mathrm{sh}A_\mathrm{c} \neq 0$, $\sin B_\mathrm{c} = 0$.

Для определения граничных частот ПП выполняются условия $\mathrm{sh}A_\mathrm{c} = 0$, $\sin B_\mathrm{c} = 0$.

В (ПП) так как $A_\mathrm{c} = 0$, то $\mathrm{ch}A_\mathrm{c} = 1$, отсюда следует $\cos B_\mathrm{c} = 1 + 2\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}$, $-1 \le 1 + 2\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} \le 1$.

Из последнего неравенства следует, что реактивные сопротивления в (ПП) не могут быть одного знака, т.е. одно из них имеет индуктивный характер, другое – емкостной.

$$-2 \le -2\left|\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}\right| \le 0\ \text{или}\ 1 \ge \left|\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}\right| \ge 0\ \text{определяет полосу пропускания.}$$

$$\left|\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}\right| = 0,\ \left|\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}\right| = 1\ \text{определяют частоты среза}$$

В полосе задерживания $\sin B_\mathrm{c} = 0$, то есть $\cos B_\mathrm{c}$ принимает значения ± 1, поэтому

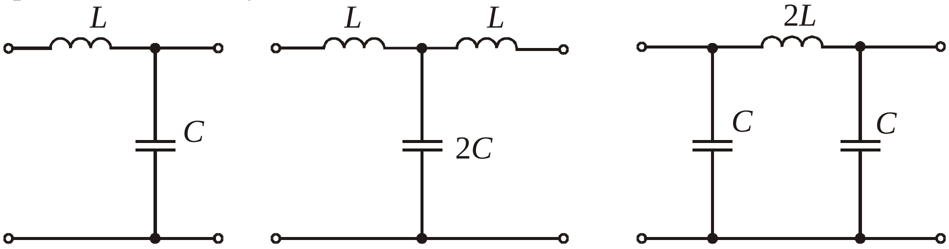
$$B_\mathrm{c} = \pm\pi,\ \mathrm{ch}A_\mathrm{c} = 2\left|\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}\right| - 1\ \text{определяет полосу задерживания.}$$

Фильтры нижних частот (ФНЧ) типа «к». Частотные зависимости ослабления, фазы и характеристических сопротивлений.

Для фильтров типа «к» выполняется условие:

$$\underline{Z}_1\underline{Z}_2 = k^2,\ \text{где}$$

k – вещественное число, не зависящее от частоты, следовательно двухполюсники $\underline{Z}_1$ и $\underline{Z}_2$ являются обратными. Рассмотрим ФНЧ типа «к». Г-образное полузвено, Т и П-образные звенья этого фильтра представим в следующем виде:



Для этих фильтров: $\underline{Z}_1 = \mathrm{j}\omega L$, $\underline{Z}_2 = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}$. Произведение сопротивлений: $\underline{Z}_1\underline{Z}_2 = \frac{L}{C} = R_0^2$.

$R_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = k$ – номинальное сопротивление фильтра. Определим граничные частоты ПП.

$$\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = -\omega^2 LC,\ \left|\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}\right| = \frac{\omega^2}{\omega_0^2} = \frac{f^2}{f_0^2},\ \text{где}\ \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},\ f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$

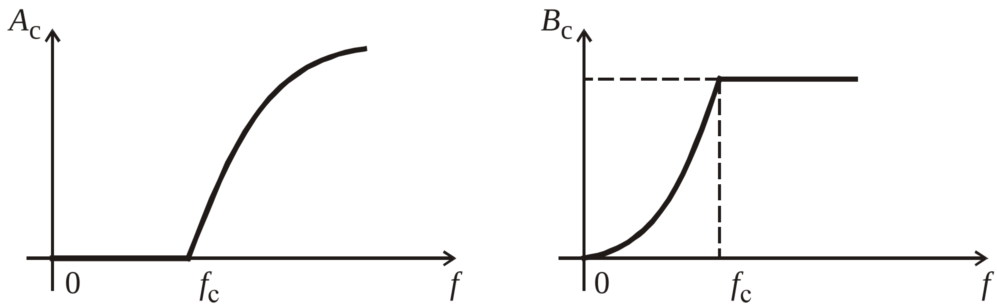
Первая граничная частота ПП получается из выражения: $\left|\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}\right| = 0$, откуда $f_1 = 0$.

Вторая граничная частота ПП получается из выражения: $\left|\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}\right| = 1$, откуда $f_2 = f_0$.

Полоса пропускания (ПП) находится в диапазоне частот: $[0,\ f_0]$. $f_0 = f_\mathrm{c}$ – частота среза.

В (ПП) собственное ослабление фильтра $A_\mathrm{c} = 0$, а собственная фаза определяется выражением:

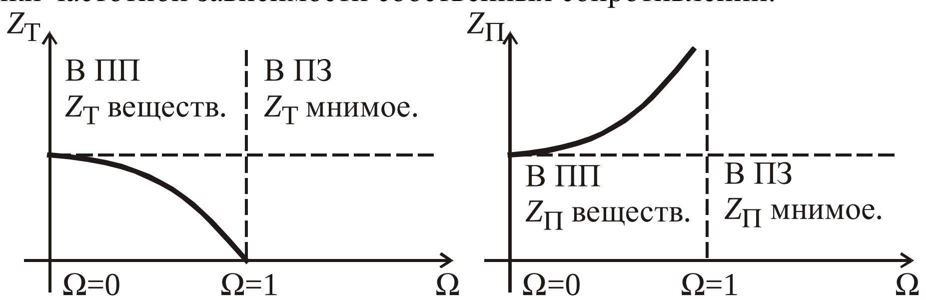
$$\cos B_c = 1 + 2\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = 1 - 2\frac{f^2}{f_0^2}.\ \text{(изменяется от 0 до } \pi\text{)}$$



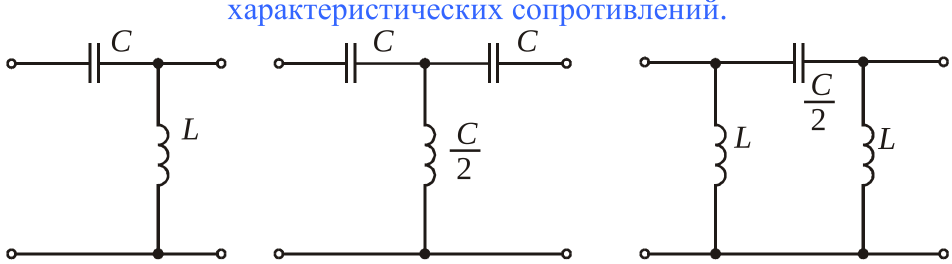
Собственные сопротивления фильтров сильно изменяются с частотой:

$$\underline{Z}_\text{Т} = \sqrt{\underline{Z}_1\underline{Z}_2\left(1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}\right)} = R_0\sqrt{1 - \frac{f^2}{f_0^2}} = R_0\sqrt{1 - \Omega^2},\ \underline{Z}_\text{П} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}}} = \frac{R_0}{\sqrt{1 - \frac{f^2}{f_0^2}}} = \frac{R_0}{\sqrt{1 - \Omega^2}}.$$

Построим графики частотной зависимости собственных сопротивлений.



Фильтры верхних частот (ФВЧ) типа «к». Частотные зависимости ослабления, фазы и характеристических сопротивлений.



Для этих фильтров: $\underline{Z}_1 = \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}$, $\underline{Z}_2 = \mathrm{j}\omega L$. Произведение сопротивлений: $\underline{Z}_1\underline{Z}_2 = \dfrac{L}{C} = R_0^2$.

Определим граничные частоты ПП.

$$\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = -\frac{1}{\omega^2 LC},\ \left|\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}\right| = \frac{\omega_0^2}{\omega^2} = \frac{f_0^2}{f^2},\ \text{где}\ \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},\ f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$

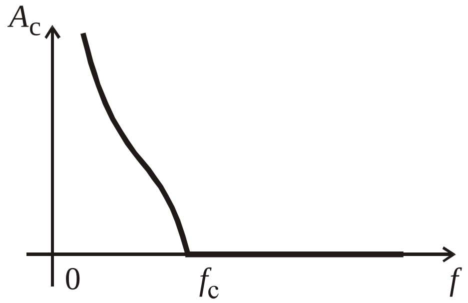
Первая граничная частота ПП получается из выражения: $\left|\dfrac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}\right| = 0$, откуда $f_1 = \infty$.

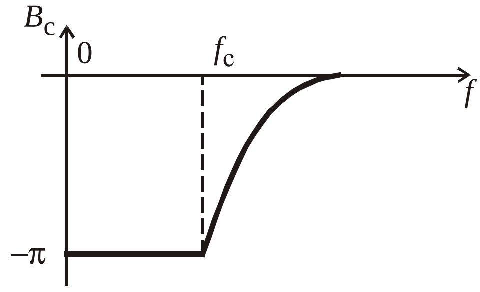
Вторая граничная частота ПП получается из выражения: $\left|\dfrac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}\right| = 1$, откуда $f_2 = f_0$.

Полоса пропускания (ПП) находится в диапазоне частот: $[f_0, \infty]$. $f_0 = f_c$ – частота среза.

В (ПП) собственное ослабление фильтра $A_c = 0$, а собственная фаза определяется выражением:

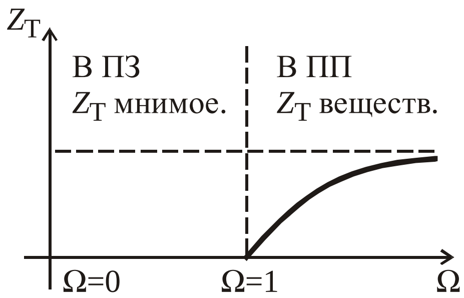
$$\cos B_c = 1 + 2\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = 1 - 2\frac{f_0^2}{f^2}.\ \text{(изменяется от } -\pi \text{ до 0)}$$

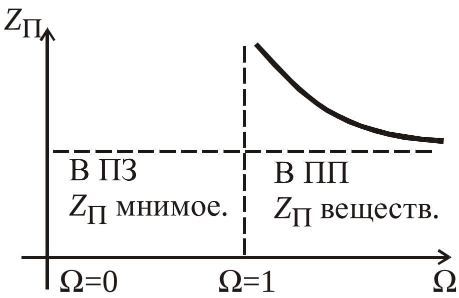




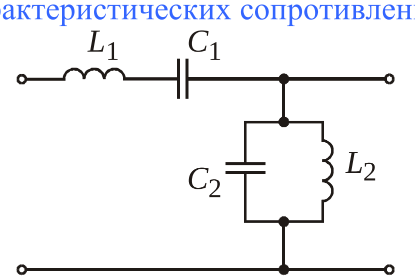
Собственные сопротивления фильтров изменяются с частотой:

$$\underline{Z}_{\text{Т}} = \sqrt{\underline{Z}_1\underline{Z}_2\left(1+\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}\right)} = R_0\sqrt{1-\frac{f_0^2}{f^2}} = R_0\sqrt{1-\frac{1}{\Omega^2}}, \quad \underline{Z}_{\text{П}} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{1+\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}}} = \frac{R_0}{\sqrt{1-\frac{f_0^2}{f^2}}} = \frac{R_0}{\sqrt{1-\frac{1}{\Omega^2}}}.$$





Полосовые фильтры (ПФ) типа «к». Частотные зависимости ослабления, фазы и характеристических сопротивлений.



Самостоятельно построить!!!
Т и П-образный полосовой фильтр

Для данного фильтра имеем:

$$\underline{Z}_1 = \mathrm{j}\omega L_1 + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C_1}, \quad \underline{Z}_2 = \frac{1}{\underline{Y}_2} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C_2 + \frac{1}{\mathrm{j}\omega L_2}}.$$

Определим произведение этих сопротивлений:

$$\underline{Z}_1\underline{Z}_2 = \frac{\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}}{\omega C_2 - \frac{1}{\omega L_2}} = \frac{\omega L_1}{\omega C_2}\cdot\frac{1-\frac{1}{\omega^2 L_1C_1}}{1-\frac{1}{\omega^2 L_2C_2}} = \frac{L_1}{C_2}\cdot\frac{1-\frac{\omega_{01}^2}{\omega^2}}{1-\frac{\omega_{02}^2}{\omega^2}}, \text{ где } \omega_{01}^2 = \frac{1}{L_1C_1}, \ \omega_{02}^2 = \frac{1}{L_2C_2}.$$

$$\underline{Z}_1\underline{Z}_2 = R_0^2 \text{ при условии, что } \omega_{01} = \omega_{02} = \omega_0 \text{ или } L_1C_1 = L_2C_2 = \frac{1}{\omega_0^2}.$$

В этом случае данный ЧП является полосовым фильтром типа «к», т.к. $\underline{Z}_1\underline{Z}_2 = R_0^2 = k^2$.

$$\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = \mathrm{j}\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right)\cdot\mathrm{j}\left(\omega C_2 - \frac{1}{\omega L_2}\right) = -L_1\omega\left(1-\frac{1}{\omega^2 L_1C_1}\right)\frac{1}{L_2\omega}\left(\omega^2 L_2C_2 - 1\right) =$$

$$= -\frac{L_1}{L_2}\left(1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)\cdot\left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2}-1\right) = -\frac{L_1}{L_2}\left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2}-1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\cdot\frac{\omega_0^2}{\omega^2}+\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) = -\frac{L_1}{L_2}\left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2}-2+\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)$$

Откуда

$$\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = -\frac{L_1}{L_2}\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2.$$

Из равенства следует, что $\underline{Z}_1$ и $\underline{Z}_2$ разного знака. Это необходимо, чтобы ЧП был фильтром.

Определим граничные частоты полосы пропускания из условий:

$$\left|\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}\right| = \frac{L_1}{L_2}\left(\frac{f}{f_0}-\frac{f_0}{f}\right)^2 = 0, \quad \left|\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}\right| = \frac{L_1}{L_2}\left(\frac{f}{f_0}-\frac{f_0}{f}\right)^2 = 1.$$

После алгебраических преобразований:

$$f = f_0, \quad \frac{f}{f_0}-\frac{f_0}{f} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}, \quad \frac{f}{f_0}-\frac{f_0}{f} = -\sqrt{\frac{L_2}{L_1}}.$$

Из последних двух равенств определяем:

$$f_1 = f_0\left(\sqrt{\frac{L_2}{4L_1}+1}-\sqrt{\frac{L_2}{4L_1}}\right), \quad f_2 = f_0\left(\sqrt{\frac{L_2}{4L_1}+1}+\sqrt{\frac{L_2}{4L_1}}\right).$$

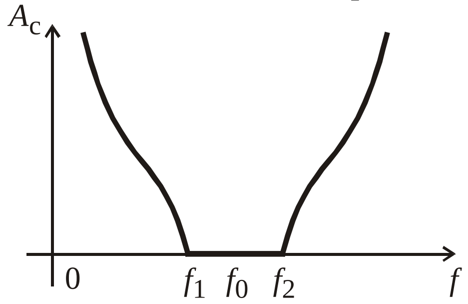
Видно, что $f_1 f_2 = f_0^2$ – центральная частота.

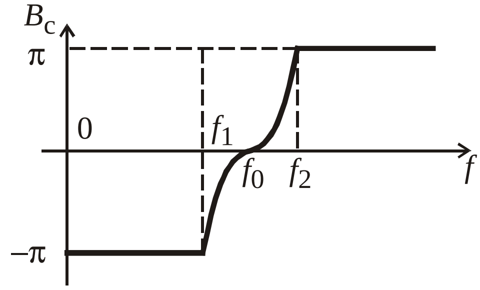
Две полосы пропускания в диапазоне частот: $[f_1, f_0]$ и $[f_0, f_2]$.

Две полосы задерживания в диапазоне частот: $[0, f_1)$ и (f_2, ∞).

Построим частотные зависимости характеристических параметров:

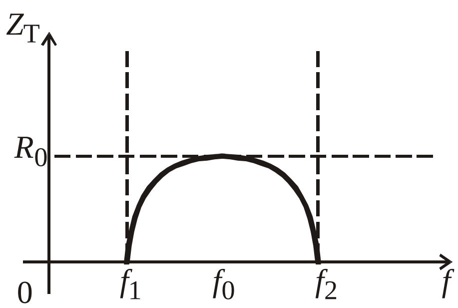
Частотные зависимости ослабления и фазы:

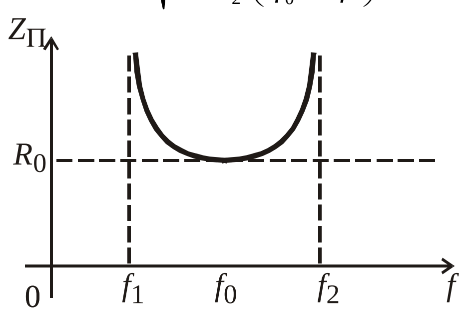




Частотные зависимости характеристических сопротивлений:

$$\underline{Z}_T = \sqrt{\underline{Z}_1\underline{Z}_2\left(1+\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}\right)} = R_0\sqrt{1-\frac{L_1}{L_2}\left(\frac{f}{f_0}-\frac{f_0}{f}\right)^2}, \quad \underline{Z}_\Pi = \sqrt{\frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{1+\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}}} = \frac{R_0}{\sqrt{1-\frac{L_1}{L_2}\left(\frac{f}{f_0}-\frac{f_0}{f}\right)^2}}.$$

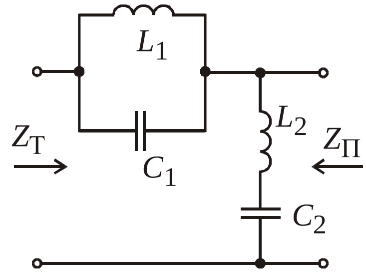




Лекция 10

Заграждающие фильтры (ЗФ) типа «к». Частотные зависимости ослабления, фазы и характеристических сопротивлений.

Представим полузвено ЗФ типа «к».



$$\underline{Z}_1 = \frac{1}{\underline{Y}_1} = \frac{1}{j\omega C_1 + \frac{1}{j\omega L_1}}.$$

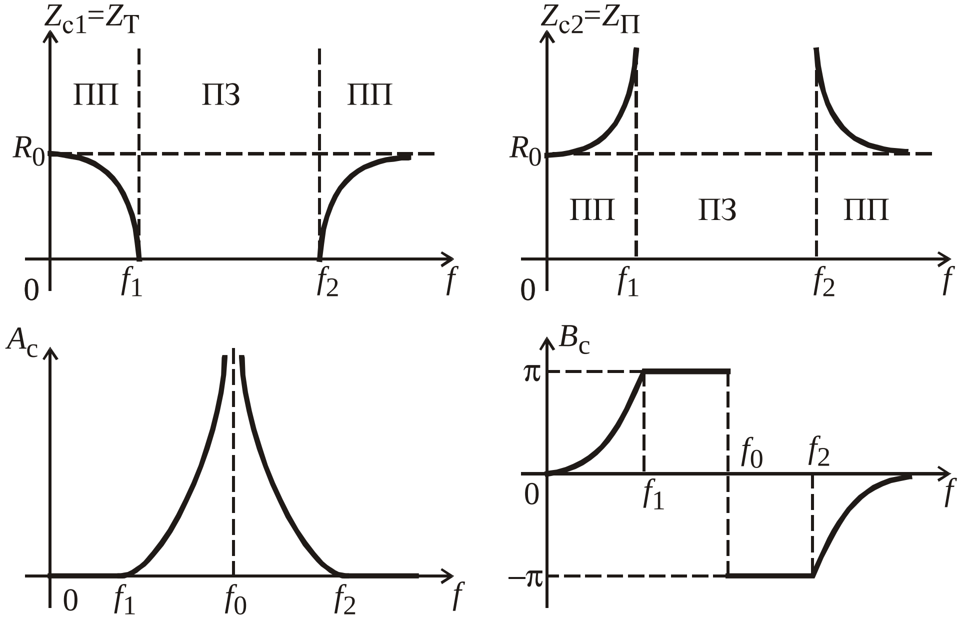
$$\underline{Z}_2 = \mathrm{j}\omega L_2 + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C_2}.$$

Граничные частоты определяются из равенства:

$$\left|\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}\right| = \frac{1}{\frac{L_2}{L_1}\left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f}\right)^2}.$$

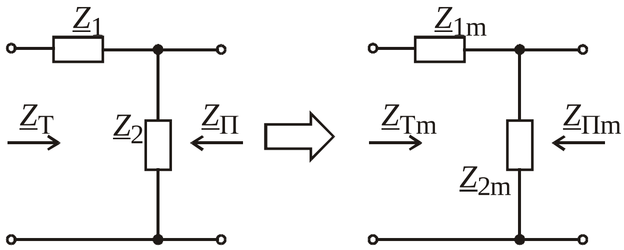
Построим частотные зависимости характеристических параметров:

$$\underline{Z}_{\text{Т}} = \sqrt{\underline{Z}_1\underline{Z}_2\left(1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}\right)} = R_0\sqrt{1 - \frac{L_2}{L_1}\left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f}\right)^2}, \quad \underline{Z}_{\text{П}} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}}} = \frac{R_0}{\sqrt{1 - \frac{L_2}{L_1}\left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f}\right)^2}}.$$



Производные фильтры типа «m»

Поставим задачу создания последовательно-производного фильтра так, чтобы его собственное сопротивление $Z_{\text{Т}m}$ равнялось собственному сопротивлению $Z_{\text{Т}}$ фильтра типа «к». Кроме того, потребуем, чтобы $\underline{Z}_{1m} = m\underline{Z}_1$.

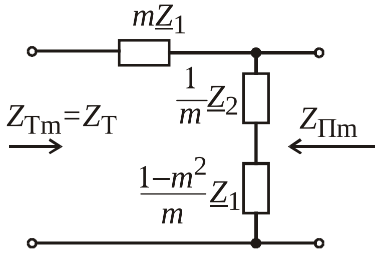


Поскольку $Z_{\text{Т}m} = Z_{\text{Т}}$, то получаем уравнение вида:

$$\sqrt{\underline{Z}_1\underline{Z}_2\left(1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}\right)} = \sqrt{\underline{Z}_{1m}\underline{Z}_{2m}\left(1 + \frac{\underline{Z}_{1m}}{\underline{Z}_{2m}}\right)}.$$

После алгебраических преобразований получаем:

$$\underline{Z}_{2m} = \frac{1 - m^2}{m}\underline{Z}_1 + \frac{1}{m}\underline{Z}_2.$$



Из последнего соотношения видно, что сопротивление $\underline{Z}_{2m}$ состоит из последовательного соединения двух сопротивлений: сопротивления того же знака, что и $\underline{Z}_2$, и сопротивления противоположного знака, как $\underline{Z}_1$. При $m=1$ фильтр типа «m» превращается в фильтр типа «к».

Отметим, что граничные частоты фильтра типа «m» и типа «к» совпадают. Действительно:

$$\frac{\underline{Z}_{1m}}{\underline{Z}_{2m}}=\frac{m\underline{Z}_1}{\frac{1-m^2}{m}\underline{Z}_1+\frac{1}{m}\underline{Z}_2}=\frac{m^2}{1+\left(1-m^2\right)\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}}\cdot\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}.$$

Выясним, чему равно собственное сопротивление последовательно-производного фильтра со стороны П*m*-входа.

$$Z_{\text{П}m}=\sqrt{\frac{\underline{Z}_{1m}\ \underline{Z}_{2m}}{1+\frac{\underline{Z}_{1m}}{\underline{Z}_{2m}}}}=\sqrt{\frac{\underline{Z}_1\ \underline{Z}_2}{1+\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}}}\left(1+\left(1-m^2\right)\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}\right)=Z_{\text{П}}\left(1+\left(1-m^2\right)\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}\right).$$

Параллельно-производный фильтр получается, если выполняются следующие требования:

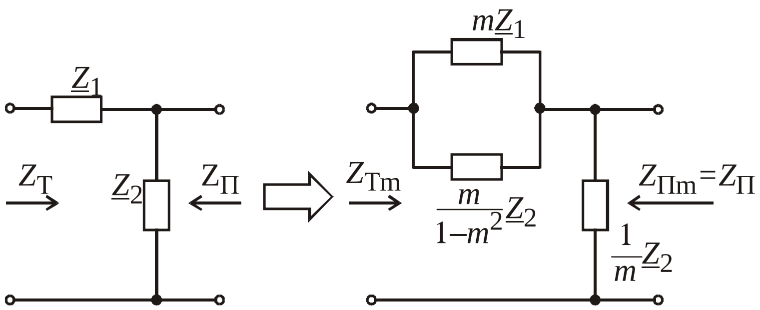
$$Z_{\text{П}m}=Z_{\text{П}},\ \underline{Z}_{2m}=\frac{1}{m}\underline{Z}_2.$$

Согласно условию равенства характеристических сопротивлений:

$$\sqrt{\frac{\underline{Z}_{1m}\ \underline{Z}_{2m}}{1+\frac{\underline{Z}_{1m}}{\underline{Z}_{2m}}}}=\sqrt{\frac{\underline{Z}_1\ \underline{Z}_2}{1+\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}}}.$$

Подставляя значение $\underline{Z}_{2m}$, получаем:

$$\frac{\underline{Z}_{1m}}{1+\frac{m\underline{Z}_{1m}}{\underline{Z}_2}}=\frac{m\underline{Z}_1}{1+\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}}\ \text{или}\ \frac{1}{\underline{Z}_{1m}}+\frac{m}{\underline{Z}_2}=\frac{1}{m\underline{Z}_1}+\frac{1}{m\underline{Z}_2},\ \text{далее}\ \frac{1}{\underline{Z}_{1m}}=\frac{1}{m\underline{Z}_1}+\frac{1-m^2}{m}\cdot\frac{1}{\underline{Z}_2}$$

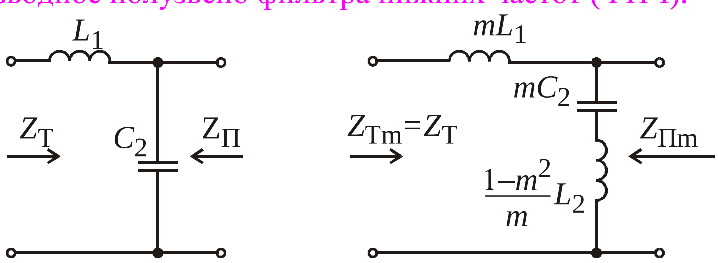


Определим собственное сопротивление параллельно-производного фильтра со стороны Т*m*-входа.

$$Z_{\text{Т}m}=\sqrt{\underline{Z}_{1m}\underline{Z}_{2m}\left(1+\frac{\underline{Z}_{1m}}{\underline{Z}_{2m}}\right)}=\sqrt{\underline{Z}_1\underline{Z}_2\left(1+\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}\right)}\cdot\frac{1}{1+\left(1-m^2\right)\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}}=Z_{\text{Т}}\frac{1}{1+\left(1-m^2\right)\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}}.$$

Производные ФНЧ типа «m». Частотные зависимости ослабления и характеристических сопротивлений.

Последовательно-производное полузвено фильтра нижних частот (ФНЧ).



фильтр типа «к» фильтр типа «m»

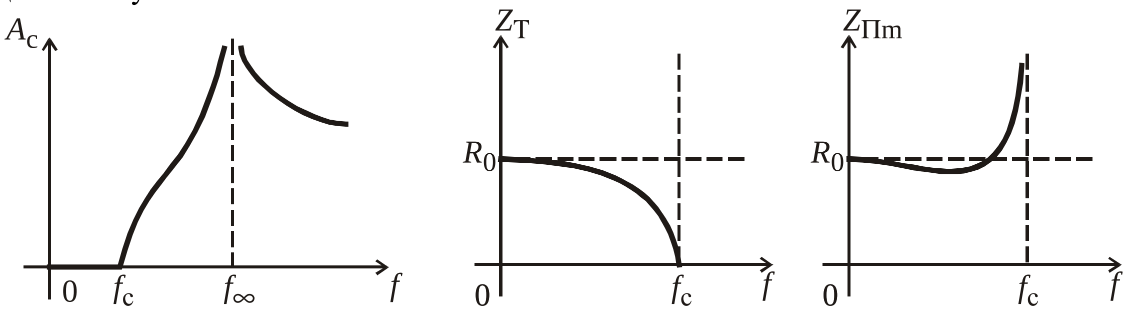
Самостоятельно образовать Т и П образные последовательно-производные звенья ФНЧ.

Особенностью данных фильтров является то, что в поперечном плече находится последовательный колебательный контур с резонансной частотой (частота всплеска ослабления):

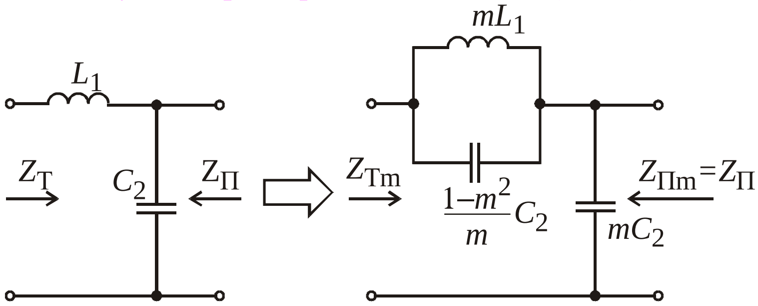
$$f_\infty = \frac{1}{2\pi\sqrt{mC_2\frac{1-m^2}{m}L_1}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\left(1-m^2\right)L_1C_2}} = \frac{f_0}{\sqrt{1-m^2}},$$

где $f_0 = f_c$ – частота среза.

Представим частотные зависимости характеристических параметров последовательно-производного полузвена ФНЧ типа «m».



Параллельно-производное полузвено фильтра нижних частот (ФНЧ).



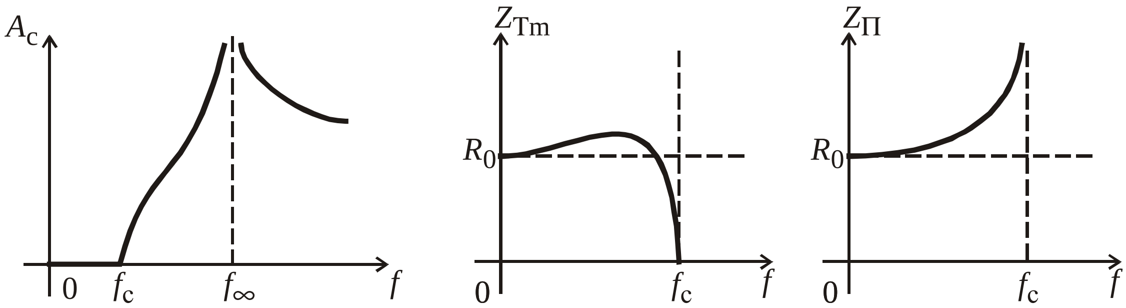
Самостоятельно образовать Т и П образные параллельно-производные звенья ФНЧ.

Особенностью данных фильтров является то, что в продольном плече находится параллельный колебательный контур с резонансной частотой (частота всплеска ослабления):

$$f_\infty = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{1-m^2}{m}C_2mL_1}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\left(1-m^2\right)L_1C_2}} = \frac{f_0}{\sqrt{1-m^2}},$$

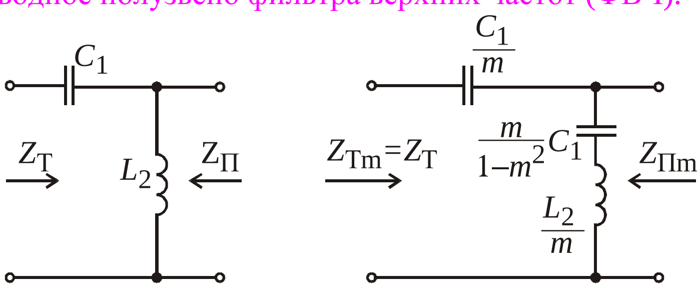
где $f_0 = f_c$ – частота среза.

Представим частотные зависимости характеристических параметров параллельно-производного полузвена ФНЧ типа «m».



Производные ФВЧ типа «m». Частотные зависимости ослабления и характеристических сопротивлений.

Последовательно-производное полузвено фильтра верхних частот (ФВЧ).



фильтр типа «к» фильтр типа «m»

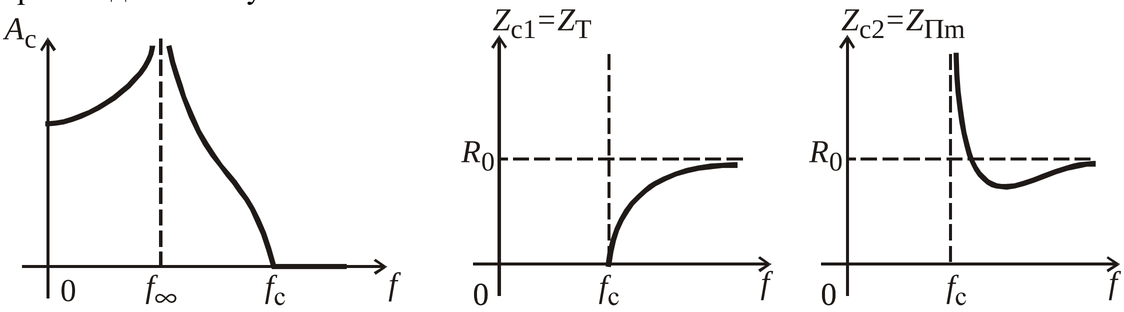
Самостоятельно образовать Т и П образные последовательно-производные звенья ФВЧ.

Частота всплеска ослабления:

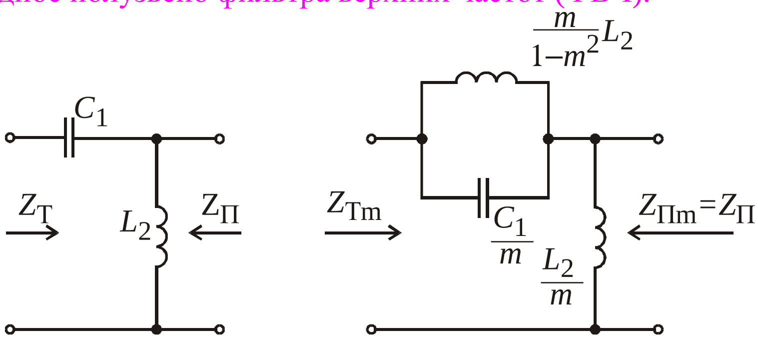
$$f_\infty = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{m}{1-m^2}C_1\frac{1}{m}L_2}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{L_2C_1}{1-m^2}}} = f_0\sqrt{1-m^2},$$

где $f_0 = f_c$ – частота среза.

Представим частотные зависимости характеристических параметров последовательно-производного полузвена ФВЧ типа «m».



Параллельно-производное полузвено фильтра верхних частот (ФВЧ).



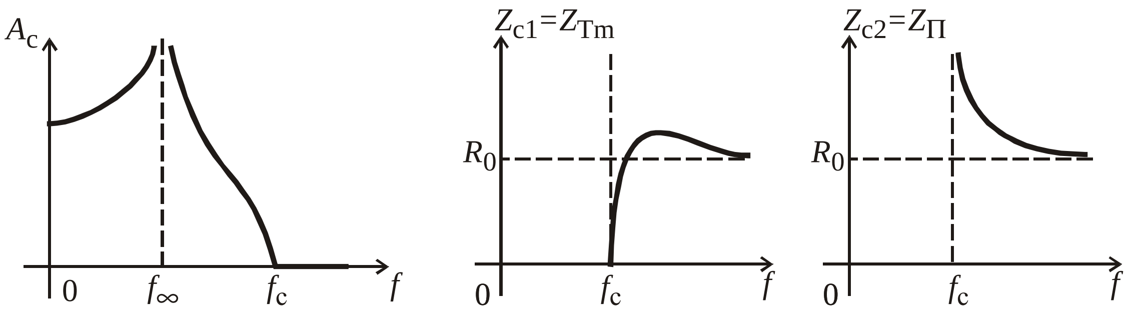
Самостоятельно образовать Т и П образные параллельно-производные звенья ФВЧ.

Частота всплеска ослабления:

$$f_\infty = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{m}{1-m^2}L_2\frac{1}{m}C_1}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{1}{1-m^2}L_2C_1}} = f_0\sqrt{1-m^2},$$

где $f_0 = f_c$ – частота среза.

Представим частотные зависимости характеристических параметров параллельно-производного полузвена ФВЧ типа «m».



Расчёт фильтров по характеристическим параметрам.
Классы фильтров по сопротивлению и ослаблению.

Задачей расчета электрического фильтра по характеристическим параметрам является нахождение фильтра, составленного путем каскадного соединения минимального числа согласованных звеньев (полузвеньев) и удовлетворяющего заданным техническим требованиям.

Поскольку полное согласование генератора с входом фильтра и нагрузки с выходом фильтра невозможно, то рабочее затухание:

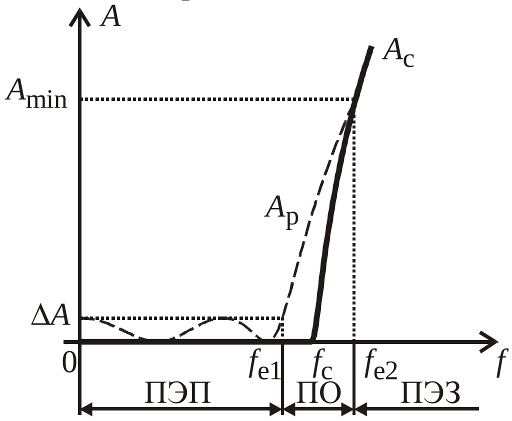
$$A_{\text{р}} = A_{\text{c}} + A_{\text{отр}}\text{, где}$$

$A_{\text{отр}}$ – ослабление отражения, обусловленное несогласованностью.

В частотной характеристике рабочего затухания различают три полосы:

1. ПЭП – полоса эффективного пропускания.
2. ПО – переходная область.
3. ПЭЗ – полоса эффективного задерживания.

Представим график частотной зависимости рабочего ослабления для ФНЧ «к».



$A_{\min}$ – минимально допустимое ослабление в ПЭЗ.

ΔA – максимально допустимое ослабление в ПЭП.

f_{e1} – граничная частота ПЭП.

f_{e2} – граничная частота ПЭЗ.

Введём степень использования ПЭП:

$\eta = \dfrac{f_{\text{e1}}}{f_{\text{c}}}$, следовательно $0 < \eta < 1$.

Собственные сопротивления фильтра:

$R_0 \le Z_{\text{T}} \le R_0\sqrt{1-\eta^2}$, $\qquad R_0 \le Z_{\Pi} \le \dfrac{R_0}{\sqrt{1-\eta^2}}$.

Сопротивление генератора и нагрузки выбирают как среднее геометрическое:

$$R_{\text{г, н}} = \sqrt{R_0 R_0\sqrt{1-\eta^2}} = R_0\sqrt[4]{1-\eta^2} \text{ – со стороны Т-входа.}$$

$$R_{\text{г, н}} = \sqrt{R_0\frac{R_0}{\sqrt{1-\eta^2}}} = \frac{R_0}{\sqrt[4]{1-\eta^2}} \text{ – со стороны П-входа.}$$

Особую роль отводят определению класса фильтра. Различают класс по сопротивлению (N_Z) и класс по ослаблению (N_A).

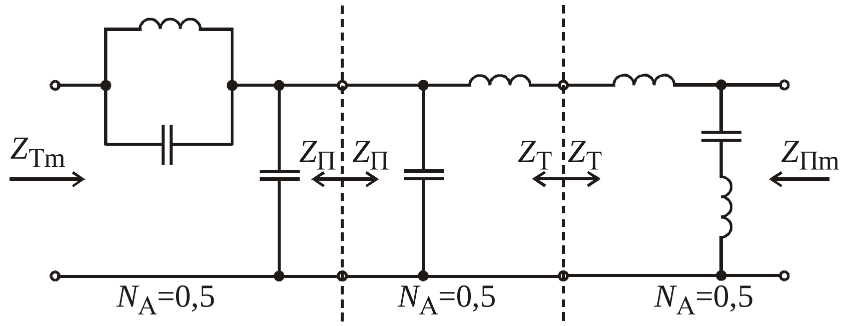
N_A – определяется количеством звеньев и полузвеньев. К фильтрам 1 класса по ослаблению $(N_A = 1)$ относятся звенья ФНЧ и ФВЧ типа «к» и типа «m», а также звенья ЗФ типа «к».

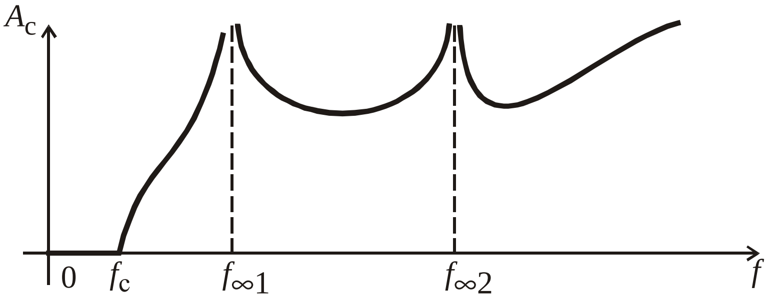
Полузвеньям перечисленных фильтров присвоен класс по ослаблению 0,5 $(N_A = 0{,}5)$.

Звено полосового фильтра типа «к» имеет класс $N_A = 2$, а его полузвено $N_A = 1$.

N_Z – определяется количеством частот согласования. К фильтрам 1 класса по сопротивлению $(N_Z = 1)$ относят все звенья и полузвенья ФНЧ и ФВЧ типа «k». К фильтрам 2 класса по сопротивлению $(N_Z = 2)$ относят звенья ФНЧ и ФВЧ типа «m», ПФ и ЗФ типа «k».

Определим класс следующего фильтра: $N_Z = 2,\ N_A = 1{,}5$.





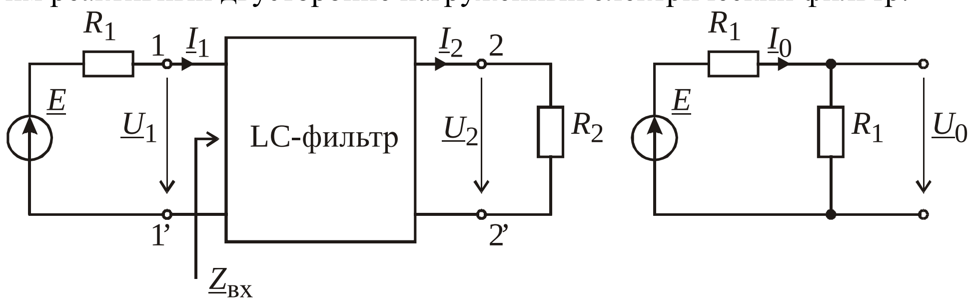
Лекция 11

Расчёт электрических фильтров по рабочим параметрам. Основные понятия и определения.

Основные преимущества:

1. Электрический фильтр с меньшим числом элементов
2. Точность вычислений
3. Разработана общая методика расчета

Рассмотрим реактивный двусторонне нагруженный электрический фильтр:



Рабочая мера передачи данного фильтра определяется соотношением:

$$\underline{\Gamma}_{\text{р}} = \frac{1}{2}\ln\frac{\underline{U}_0\underline{I}_0}{\underline{U}_2\underline{I}_2} = A_{\text{р}} + \mathrm{j}B_{\text{р}},$$

$$A_{\text{р}} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\underline{U}_0\underline{I}_0}{\underline{U}_2\underline{I}_2}\right| \text{ [Нп]},\ A_{\text{р}} = 10\lg\left|\frac{\underline{U}_0\underline{I}_0}{\underline{U}_2\underline{I}_2}\right| = 10\lg\frac{P_{\text{m}}}{P_2} \text{ [дБ]}.$$

$P_{\text{m}} = U_0 I_0 = \dfrac{E}{2}\cdot\dfrac{E}{2R_1} = \dfrac{E^2}{4R_1}$ – активная максимальная мощность источника.

$P_2 = U_2 I_2 = U_2\dfrac{U_2}{R_2} = \dfrac{U_2^2}{R_2}$ – активная мощность, передаваемая от источника в нагрузку.

Из-за несогласованности входного сопротивления $\underline{Z}_{\text{вх}}$ с внутренним сопротивлением генератора R_1 от входа фильтра выделяется мощность отражений $P_{\text{отр}}$, тогда можно предположить:

$$P_{\text{m}} = P_2 + P_{\text{отр}}.$$

Введем понятие модуля коэффициента отражения от входа фильтра ρ:

$\rho = |\underline{\rho}| = \sqrt{\dfrac{P_{\text{отр}}}{P_{\text{m}}}} = \left|\dfrac{R_1 - \underline{Z}_{\text{вх}}}{R_1 + \underline{Z}_{\text{вх}}}\right|$, $\underline{\rho} = \underline{\rho}(\omega) = \dfrac{\underline{h}(\omega)}{\underline{V}(\omega)}$ – комплексный коэффициент отражения.

Введем понятие модуля рабочей передаточной функции T:

$$T = |\underline{T}| = \sqrt{\frac{P_2}{P_{\text{m}}}} = \sqrt{\frac{U_2^2}{R_2}\cdot\frac{4R_1}{E^2}} = \frac{2U_2}{E}\sqrt{\frac{R_1}{R_2}},$$

$$\underline{T}=\underline{T}(\omega)=\frac{\underline{W}(\omega)}{\underline{V}(\omega)}$$ – комплексная рабочая передаточная функция.

Введем понятие функции фильтрации: $\varphi=|\underline{\varphi}|=\sqrt{\dfrac{P_{\text{отр}}}{P_2}}$.

Установим связь между рабочей передаточной функцией, модулем коэффициентом отражения и функцией фильтрации.

$$1=\frac{P_2}{P_{\text{m}}}+\frac{P_{\text{отр}}}{P_{\text{m}}}=T^2+\rho^2,\ \frac{P_{\text{m}}}{P_2}=1+\frac{P_{\text{отр}}}{P_2}=1+\varphi^2=\frac{1}{T^2},\text{ следовательно } T^2=\frac{1}{1+\varphi^2}.$$

Поскольку:

$$A_{\text{р}}=10\lg\frac{P_{\text{m}}}{P_2}=10\lg\frac{1}{T^2}=20\lg\frac{1}{T}=10\lg\left(1+\varphi^2\right)\ [\text{дБ}].$$

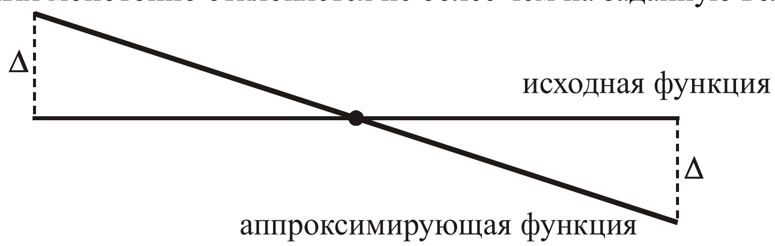
Этапы синтеза электрических фильтров. Технические требования.

Синтез электрического фильтра по рабочему ослаблению состоит из следующих этапов: аппроксимации, реализации, проверочного расчета и исследования.

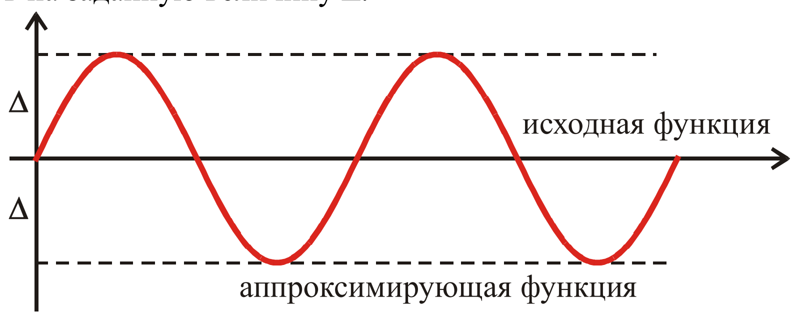
На этапе аппроксимации необходимо получить аналитическое выражение для рабочей передаточной функции, удовлетворяющей УФР.

При расчетах используют два вида аппроксимации:

1. Аппроксимация по Тейлору: аппроксимирующая функция совпадает с исходной в одной точке, в остальных монотонно отклоняется не более чем на заданную величину Δ.



2. Аппроксимация по Чебышеву: аппроксимирующая функция колеблется относительно исходной, отклоняясь на заданную величину Δ.



При проектировании фильтров по рабочему ослаблению на этапе аппроксимации задают функцию фильтрации. В зависимости от вида функции фильтрации получают различные типы фильтров.

Если в качестве функции фильтрации используются полиномы, то фильтры называются полиномиальными. Среди полиномиальных фильтров широко используются:

- фильтры Баттерворта (в качестве функции фильтрации полиномы Баттерворта)
- фильтры Чебышева (в качестве функции фильтрации полиномы Чебышева)

Если в качестве функции фильтрации используется дробно-рациональная функция, например, дробь Золотарева-Кауэра, то имеем фильтр Золотарева-Кауэра.

На этапе реализации по найденной рабочей передаточной функции определяется схема фильтра и величины ее элементов.

Технические требования, предъявляемые к фильтрам:

1. граничные частоты ПП и ПЗ
2. максимальное допустимое ослабление в ПП (или коэффициент отражения)

$$\Delta A = 10\lg\frac{1}{1-\left(\frac{\rho\%}{100}\right)^2}\ [\text{дБ}].$$

3. минимальное допустимое ослабление в ПЗ
4. сопротивление нагрузки

Вывод: синтез электрического фильтра производится в следующем порядке:

1. Переход к ФНЧП и нормирование частот;
2. Аппроксимация рабочей передаточной функции и характеристики рабочего ослабления;
3. Реализация схемы ФНЧ (ФНЧП);
4. Переход от схемы ФНЧП к схеме заданного фильтра и денормирование ее элементов;
5. Расчет и построение денормированных частотных характеристик рабочего ослабления и фазы.

Аппроксимация рабочего ослабления по Баттерворту.

Если в качестве функции фильтрации используются полиномы Баттерворта, то есть

$$\varphi(\Omega) = \varepsilon B_n(\Omega) = \varepsilon\Omega^n,$$

где ε – коэффициент неравномерности рабочего ослабления в полосе пропускания.
Рабочее ослабление определяем как:

$$A(\Omega) = 10\lg\left(1+\varphi^2(\Omega)\right) = 10\lg\left(1+\varepsilon^2\Omega^{2n}\right).$$

По техническим требованиям, для ФНЧ (ФНЧП) на граничной частоте ПП $\Omega_2 = 1$, рабочее ослабление должно быть равным максимальному допустимому ослаблению ΔA, то есть

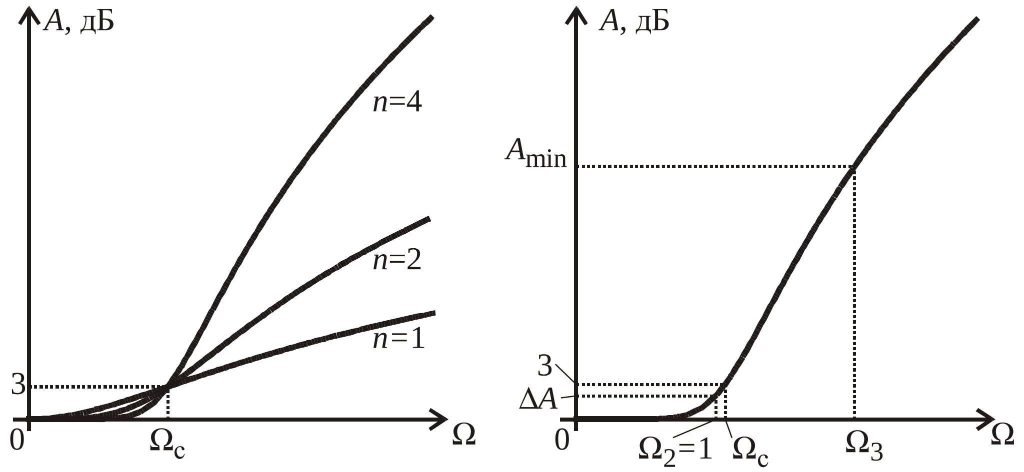
$$A(\Omega = \Omega_2 = 1) = \Delta A = 10\lg\left(1+\varepsilon^2\right), \text{ откуда } \varepsilon = \sqrt{10^{0{,}1\Delta A}-1}.$$

Получим формулу для определения порядка ФНЧ (ФНЧП).

На граничной частоте ПЗ Ω_3 рабочее ослабление должно быть больше (либо равно) минимального допустимого рабочего ослабления $A_{\min}$, то есть

$$A(\Omega_3) = 10\lg\left(1+\varepsilon^2\Omega_3^{2n}\right) \ge A_{\min}, \text{ отсюда } n \ge \frac{\lg\left(\frac{1}{\varepsilon}\sqrt{10^{0{,}1A_{\min}}-1}\right)}{\lg\Omega_3} = \frac{\lg\sqrt{\frac{10^{0{,}1\,A_{\min}}-1}{10^{0{,}1\,\Delta A}-1}}}{\lg\Omega_3}.$$

Представим частотную зависимость рабочего ослабления при аппроксимации полиномом Баттерворта



Аппроксимация по Баттерворту получила название монотонной, или максимально гладкой. Определим частоту среза фильтра Баттерворта из условия:

$$10\lg\left(1+\varepsilon^2\Omega_c^{2n}\right) = 3, \text{ отсюда } \Omega_c = \frac{\sqrt[2n]{10^{0{,}3}-1}}{\sqrt[2n]{10^{0{,}1\Delta A}-1}} \approx \frac{1}{\sqrt[2n]{10^{0{,}1\Delta A}-1}}.$$

Аппроксимация рабочей передаточной функции по Баттерворту.

Рабочая передаточная функция аппроксимируется полиномом Баттерворта в виде:

$$T^2(\Omega) = \frac{1}{1+\varepsilon^2\varphi^2(\Omega)} = \frac{1}{1+\varepsilon^2\Omega^{2n}}.$$

С другой стороны модуль рабочей передаточной функции можно представить как:

$$T^2(\Omega)=T(\mathrm{j}\Omega)\ \ T(-\mathrm{j}\Omega)=T(p)T(-p)\big|_{p=\mathrm{j}\Omega}.$$

Таким образом:

$$T(p)T(-p)=\frac{1}{1+\varepsilon^2\left(\dfrac{p}{\mathrm{j}}\right)^{2n}}=\frac{1}{\varepsilon^2 V(p)V(-p)},\ \text{то есть}\ T(p)=\frac{1}{\varepsilon V(p)}.$$

$V(p)$ – полином Гурвица.

Корни полинома Гурвица p_k, располагающиеся в левой полуплоскости, определим из уравнения:

$$1+\varepsilon^2\left(\frac{p_k}{\mathrm{j}}\right)^{2n}=0,\ 1+\varepsilon^2(-\mathrm{j}p_k)^{2n}=0,\ -\mathrm{j}p_k=\sqrt[2n]{\frac{1}{\varepsilon^2}(-1)},\ -\mathrm{j}p_k=\sqrt[2n]{\frac{1}{\varepsilon^2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(2k-1)\pi}},$$

$$-\mathrm{j}p_k=\frac{1}{\sqrt[n]{\varepsilon}}\left(\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}+\mathrm{j}\sin\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right),\ p_k=\frac{1}{\sqrt[n]{\varepsilon}}\left(-\sin\frac{(2k-1)\pi}{2n}+\mathrm{j}\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right).$$

Аналитически рабочую передаточную функцию можно представить:

$$T(p)=\frac{1}{\varepsilon V(p)}=\frac{1}{\varepsilon\prod\limits_{k=1}^{n}(p-p_k)}=\frac{1}{\varepsilon(p-p_1)(p-p_2)\ldots(p-p_n)}.$$

Аналитическое выражение для частотной зависимости рабочей передаточной функции получаем заменой переменной $p=\mathrm{j}\Omega$.

$$T(\mathrm{j}\Omega)=\frac{1}{\varepsilon\prod\limits_{k=1}^{n}(\mathrm{j}\Omega-p_k)},\ \text{далее определим модуль:}\ T(\Omega)=\left|T(\mathrm{j}\Omega)\right|.$$

Зная $T(\Omega)$, получим аналитическое выражение для рабочего ослабления: $A(\Omega)=20\lg\dfrac{1}{T(\Omega)}$ [дБ].

Аппроксимация частотных характеристик по Чебышеву.

Функцию фильтрации представим в виде:

$$\varphi(\Omega)=\varepsilon P_n(\Omega),\ \text{где}\ P_n(\Omega)=\begin{cases}\cos(n\cdot\arccos(\Omega)), & 0\le\Omega\le 1\\ \mathrm{ch}(n\cdot\mathrm{arch}(\Omega)), & \Omega>1\end{cases}\ \text{– полином Чебышева.}$$

$\varepsilon=\sqrt{10^{0,1\Delta A}-1}$ – коэффициент неравномерности рабочего ослабления в полосе пропускания:

Рабочее ослабление определяется как: $A(\Omega)=10\lg\left(1+\varepsilon^2 P_n^2(\Omega)\right)$.

$$P_0(\Omega)=\cos 0=1,\ P_1(\Omega)=\cos(\arccos(\Omega))=\Omega,\ P_2(\Omega)=\cos(2\arccos(\Omega))=2\Omega^2-1.$$

Так как $P_2(\Omega)=2\Omega P_1(\Omega)-P_0(\Omega)$, то $P_{n+1}(\Omega)=2\Omega P_n(\Omega)-P_{n-1}(\Omega)$ – рекуррентная формула.

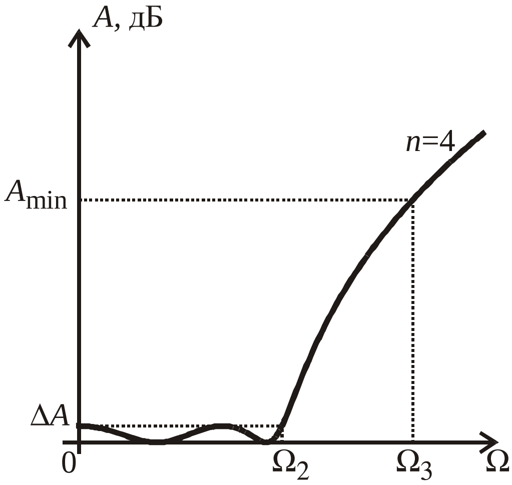
Вывод формулы для определения порядка фильтра Чебышева:

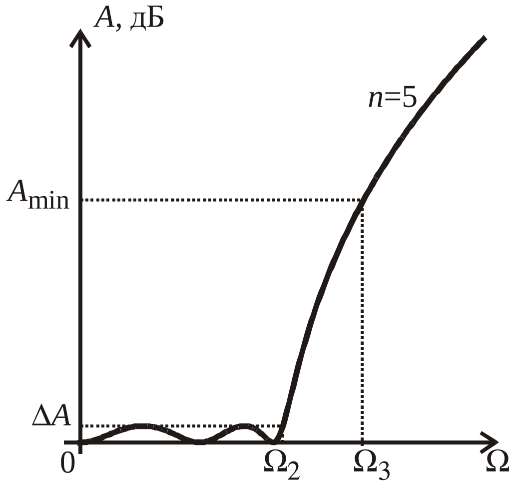
$$A(\Omega_3)=10\lg\left(1+\varepsilon^2\mathrm{ch}^2 n\cdot\mathrm{arch}(\Omega_3)\right)\ge A_{\min}.$$

После преобразований получим:

$$n\ge\frac{\mathrm{arch}\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\sqrt{10^{0,1A_{\min}}-1}\right)}{\mathrm{arch}(\Omega_3)}.$$

Представим частотные характеристики рабочего ослабления





Аппроксимация по Чебышеву получила название равноволновой.
Если n – четное, то при $\Omega=0$ имеем максимум ослабления в полосе пропускания.
Если n – нечетное, то при $\Omega=0$ имеем минимум ослабления в полосе пропускания.
Частоты min и max в полосе пропускания определяются как:

$$\Omega_{\max_m}=\cos\frac{(m-1)\pi}{n},\quad m=1,\ 2,\ \ldots,n+1,\ \Omega_{\min_\nu}=\cos\frac{(2\nu-1)\pi}{2n},\quad \nu=1,\ 2,\ \ldots,n.$$

Если порядок фильтра $n=4$, то имеем: 2 частоты min, 3 частоты max.

$\Omega_{\max_1}=\cos 0=1$, $\Omega_{\max_2}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}\approx 0,707$, $\Omega_{\max_3}=\cos\frac{\pi}{2}=0$, то есть $(0;\,0,707;1)$.

$\Omega_{\min_1}=\cos\frac{\pi}{8}\approx 0,924$, $\Omega_{\min_2}=\cos\frac{3}{8}\pi\approx 0,383$, то есть $(0,383;\,0,924)$.

Сформируем рабочую передаточную функцию:

$$T^2(\Omega)=\frac{1}{1+\varepsilon^2\varphi^2(\Omega)}=\frac{1}{1+\varepsilon^2P_n^2(\Omega)}=\frac{1}{1+\varepsilon^2\cos^2 n\arccos\Omega}.$$

С другой стороны модуль рабочей передаточной функции можно представить как:

$$T^2(\Omega)=\underline{T}(\Omega)\underline{T}^*(\Omega)=T(p)T(-p)\big|_{p=\mathrm{j}\Omega}.$$

Таким образом:

$$T(p)T(-p)=\frac{1}{1+\varepsilon^2\cos^2 n\arccos(-\mathrm{j}p)}=\frac{1}{\varepsilon^2 2^{2(n-1)}V(p)V(-p)},\text{ то есть } T(p)=\frac{1}{\varepsilon 2^{n-1}V(p)}.$$

$V(p)$ – полином Гурвица.

Решая уравнение $1+\varepsilon^2\cos^2 n\arccos(-\mathrm{j}p)=0$, определим корни полинома Гурвица:

$$\cos^2(n)\cdot\arccos(-\mathrm{j}p)=-\frac{1}{\varepsilon^2},\ \cos(n)\cdot\arccos(-\mathrm{j}p)=\frac{\mathrm{j}}{\varepsilon},\ n\arccos(-\mathrm{j}p)=\arccos\frac{\mathrm{j}}{\varepsilon},\ p=\mathrm{j}\cos\frac{1}{n}\cdot\arccos\frac{\mathrm{j}}{\varepsilon}.$$

С учтом того, что $\arccos x=-\mathrm{j}\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$, получаем:

$$p=\mathrm{j}\cos\left(-\frac{\mathrm{j}}{n}\ln\left(\frac{\mathrm{j}}{\varepsilon}+\mathrm{j}\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}+1}\right)\right),\ p=\mathrm{j}\cos\left(-\frac{\mathrm{j}}{n}\left(\ln(\mathrm{j})+\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}+\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}+1}\right)\right)\right),$$

$$p=\mathrm{j}\cos\left(-\frac{\mathrm{j}}{2n}\ln(-1)-\frac{\mathrm{j}}{n}\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}+\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}+1}\right)\right),\ p_k=\mathrm{j}\cos\left(-\frac{\mathrm{j}}{2n}\ln\left(e^{\mathrm{j}(2k-1)\pi}\right)-\frac{\mathrm{j}}{n}\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}+\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}+1}\right)\right),$$

$p_k=\mathrm{j}\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}-\frac{\mathrm{j}}{n}\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}+\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}+1}\right)\right)$, так как $\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=\operatorname{arsh}x$, то получим:

$p_k=\mathrm{j}\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}-\frac{\mathrm{j}}{n}\operatorname{arsh}\frac{1}{\varepsilon}\right)$, далее введем обозначение $\varphi=\frac{1}{n}\operatorname{arsh}\frac{1}{\varepsilon}$, отсюда:

$$p_k = \mathrm{j}\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n} - \mathrm{j}\varphi\right)$$, так как $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ и $\cos \mathrm{j}x = \mathrm{ch}x$, $\sin \mathrm{j}x = \mathrm{j}shx$.

$$p_k = \mathrm{j}\left(\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}\mathrm{ch}\varphi + \mathrm{j}\sin\frac{(2k-1)\pi}{2n}\mathrm{sh}\varphi\right), \quad \boxed{p_k = -\mathrm{sh}\varphi\sin\frac{(2k-1)\pi}{2n} + \mathrm{j}\mathrm{ch}\varphi\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}}.$$

Аналитически рабочую передаточную функцию можно представить как:

$$T(p) = \frac{1}{\varepsilon 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n}(p-p_k)} = \frac{1}{\varepsilon 2^{n-1}(p-p_1)(p-p_2)\dots(p-p_k)}.$$

Аналитическое выражение для частотной зависимости рабочей передаточной функции получаем заменой переменной $p = \mathrm{j}\Omega$.

$$T(\mathrm{j}\Omega) = \frac{1}{\varepsilon 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n}(\mathrm{j}\Omega - p_k)}$$, далее определим модуль: $T(\Omega) = |T(\mathrm{j}\Omega)|$ и $A(\Omega) = 20\lg\frac{1}{T(\Omega)}$ [дБ].

Реализация фильтров по Дарлингтону.

Метод основан на формировании операторной функции входного сопротивления:

$$Z_{\text{вх}}(p) = \frac{1-\rho(p)}{1+\rho(p)}$$, где $\rho(p)$ – коэффициент отражения.

При реализации фильтров по Дарлингтону $r_1 = 1$. Определим коэффициент отражения из соотношений:

$$\rho^2(p) = 1 - T^2(p) = 1 - \frac{1}{1+\varphi^2(p)} = \frac{\varphi^2(p)}{1+\varphi^2(p)} = \varphi^2(p)T^2(p)$$, откуда $\rho(p) = \pm\varphi(p)T(p)$.

При аппроксимации по Баттерворту имеем:

$$\rho(p) = \pm\varepsilon B_n(p)\frac{1}{\varepsilon V(p)} = \pm\frac{B_n(p)}{V(p)}$$, где $\mathrm{B_n}(\mathrm{p}) = \mathrm{p^n}$ – полином Баттерворта.

$$Z_{\text{вх}}(p) = \frac{1-\rho(p)}{1+\rho(p)} = \frac{1 \mp \frac{B_n(p)}{V(p)}}{1 \pm \frac{B_n(p)}{V(p)}} = \frac{V(p) \mp B_n(p)}{V(p) \pm B_n(p)}.$$

При аппроксимации по Чебышеву имеем:

$$\rho(p) = \pm\varepsilon P_n(p)\frac{1}{\varepsilon 2^{n-1}V(p)} = \pm\frac{P_n(p)}{2^{n-1}V(p)}.$$

$P_n(p)$ определяется по рекуррентной формуле $P_{n+1}(\Omega) = 2\Omega P_n(\Omega) - P_{n-1}(\Omega)$ заменой $\Omega \to p$, при этом все слагаемые берутся со знаком «+».

Например: $P_2(\Omega) = 2\Omega^2 - 1$, то $P_2(p) = 2p^2 + 1$.

$$Z_{\text{вх}}(p) = \frac{1-\rho(p)}{1+\rho(p)} = \frac{1 \mp \frac{P_n(p)}{2^{n-1}V(p)}}{1 \pm \frac{P_n(p)}{2^{n-1}V(p)}} = \frac{V(p)2^{n-1} \mp P_n(p)}{V(p)2^{n-1} \pm P_n(p)}.$$

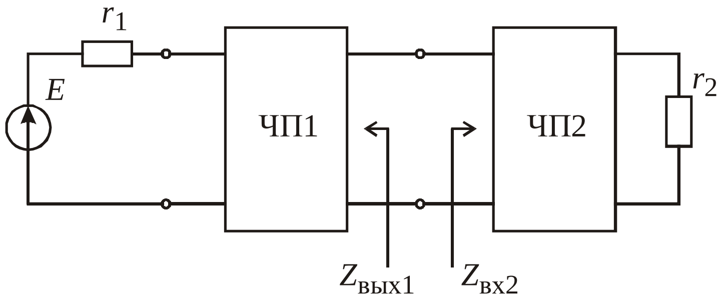
$Z_{\text{вх}}(p)$ раскладываем в цепную дробь по Кауэру и строим нормированную схему фильтра.

Лекция 12

Ускоренный метод реализации симметричных фильтров по Попову.

Симметричный фильтр (*n* – нечётное).

Представим схему фильтра в виде двух каскадно-соединенных одинаковых четырехполюсников, при этом выполняются условия: $r_1 = r_2 = 1$, $Z_{\text{вых}1} = Z_{\text{вх}2}$.



Достаточно сформировать функцию входного сопротивления $Z_{\text{вх}2}(p)$ по найденной на этапе аппроксимации функции $T(p)$ и реализовать только вторую (правую) половину фильтра. Левая часть достраивается, исходя из условия симметрии.

Порядок реализации:

1. Для каждой пары комплексно-сопряженных корней полинома Гурвица составляем элементарный сомножитель:

$$H_k = (p - p_k)(p - p_k^*).$$

2. Сформируем полином $M_z(p)$ как произведение элементарных сомножителей с нечетными индексами:

$$M_z(p) = H_1 H_3 H_5 \ldots H_{2k-1}.$$

3. Сформируем полином $N_z(p)$ как произведение элементарных сомножителей с четными индексами:

$$N_z(p) = H_2 H_4 H_6 \ldots H_{2k}.$$

4. Составим функцию $Z_{\text{вх}2}(p)$:

$$Z_{\text{вх}2}(p) = k_z \frac{M_z(p)}{N_z(p)}, \text{ где } k_z = \frac{N_z(0)}{M_z(0)}.$$

5. Разложим полученную функцию в цепную дробь по Кауэру и построим схему правой части.
6. Достроим левую часть фильтра, исходя из условия симметрии:

$$Z_{\text{вых}1}(p) = Z_{\text{вх}2}(p).$$

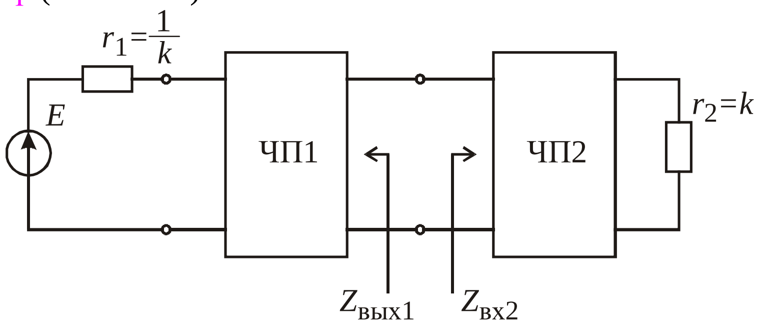
Можно получить дуальную схему фильтра, используя соотношение:

$$Z_{\text{вх}2}(p) = k_z \frac{N_z(p)}{M_z(p)}, \text{ где } k_z = \frac{M_z(0)}{N_z(0)}.$$

Необходимо выбрать более экономичную схему (с меньшим числом индуктивностей).

Ускоренный метод реализации антиметричных фильтров по Попову.

Антиметричный фильтр (*n* – чётное).



Необходимо выполнение условий:

$$r_1 r_2 = 1,\ r_2 = k,\ r_1 = \frac{1}{k};\ Z_{\text{вых}1} Z_{\text{вх}2} = 1,\ Z_{\text{вх}2} = \frac{1}{Z_{\text{вых}1}} = Y_{\text{вых}1}.$$

Достаточно сформировать функцию входного сопротивления $Z_{\text{вх}2}(p)$ по найденной на этапе аппроксимации функции $T(p)$ и реализовать только вторую (правую) половину фильтра. Левая часть достраивается, исходя из условия антиметрии.

Порядок реализации:

1. По полученным корням полинома Гурвица определим:

$M(p)+\mathrm{j}N(p)=(p-p_1)(p-p_3)\ldots(p-p_{2k-1})$, или $M(p)-\mathrm{j}N(p)=(p-p_2)(p-p_4)\ldots(p-p_{2k})$.

2. Составим функцию $Z_{\text{вх}2}(p)$:

$$Z_{\text{вх}2}(p)=\frac{M(p)}{N(p)}.$$

3. Разложим полученную функцию в цепную дробь по Кауэру и построим схему правой части.

4. Достроим левую часть фильтра, исходя из условия антиметрии:

$$Z_{\text{вх}2}(p)=Y_{\text{вых}1}(p).$$

Можно получить дуальную схему фильтра, используя соотношение:

$$Z_{\text{вх}2}(p)=\frac{N(p)}{M(p)}.$$

Необходимо выбрать более экономичную схему (с меньшим числом индуктивностей).

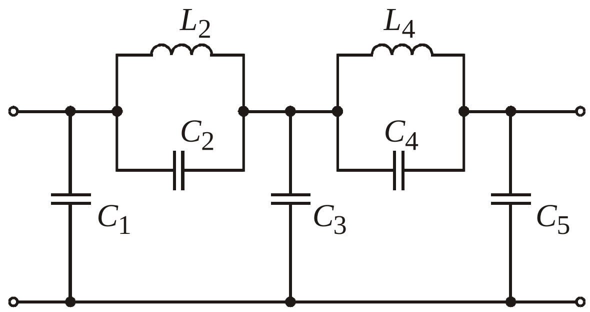
Аппроксимация частотных характеристик дробями Золотарева-Кауэра.

Когда требуется увеличить скорость нарастания ослабления в переходной области, фильтры Баттерворта и Чебышева использовать нецелесообразно, поскольку при их реализации увеличивается число элементов.

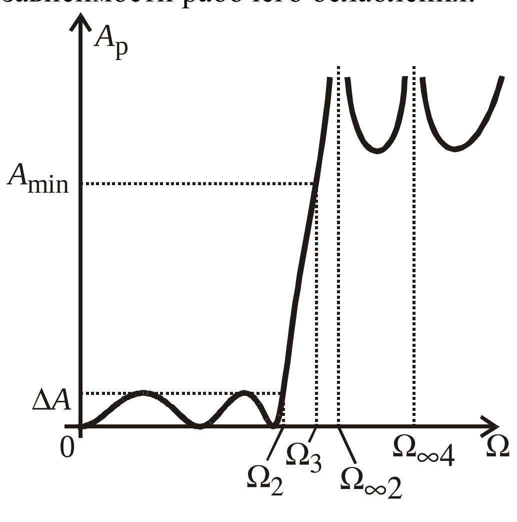
В этих случаях используют фильтры, ослабление которых описывается:

$$A_{\text{р}}(\Omega)=10\lg\frac{1}{T_{\text{р}}^2(\Omega)}=10\lg\frac{a_0\Omega^{2n}+a_1\Omega^{2n-2}+\ldots+a_n}{\left(\Omega_{\infty1}^2-\Omega^2\right)^2\left(\Omega_{\infty2}^2-\Omega^2\right)^2\ldots\left(\Omega_{\infty m}^2-\Omega^2\right)^2}.$$

В качестве примера приведем схему ФНЧ Золотарева-Кауэра пятого порядка:



Представим график частотной зависимости рабочего ослабления:



Активные RC – фильтры

Элементной базой ARC-фильтров являются: резисторы, конденсаторы и активные элементы. Активные элементы: ИНУН, ИТУТ, ИНУТ, ИТУН, операционные усилители ОУ.

Синтез ARC-фильтров проводят по их передаточной функции, записанной в операторной форме:

$$T(p)=\frac{U_2(p)}{U_1(p)},$$

где $U_2(p)$ и $U_1(p)$ – соответственно выходное и входное операторные напряжения.

Передаточные функции фильтров имеют вид дробно-рациональной функции комплексного переменного p:

$$T(p)=\frac{W(p)}{V(p)},$$

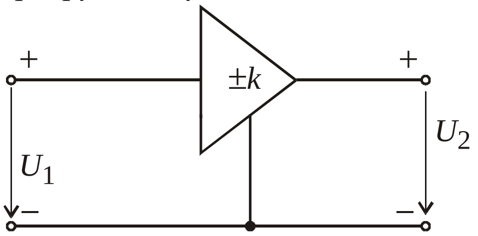
где $W(p)$ – четный или нечетный полином; $V(p)$ – полином Гурвица.

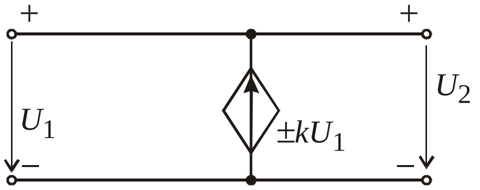
ARC-фильтры на базе ИНУН и ОУ

Уравнения, определяющие ИНУН:

$$u_2=ku_1;\ |k|\neq\infty;\ i_1=0,\ Z_{\text{вх}}=\infty, Z_{\text{вых}}=0.$$

$k>0$ – неинвертирующий усилитель, $k<0$ – инвертирующий.

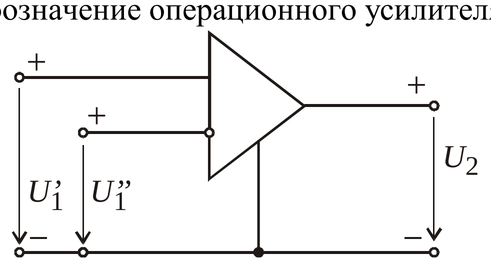


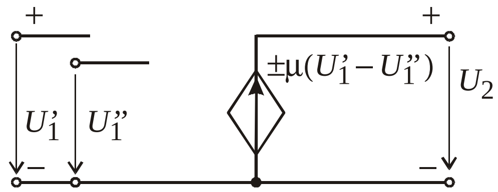


Уравнения, определяющие ОУ:

$$u_2=\mu u_1;\ \mu=\infty;\ Z_{\text{вх}}=\infty;\ Z_{\text{вых}}=0.$$

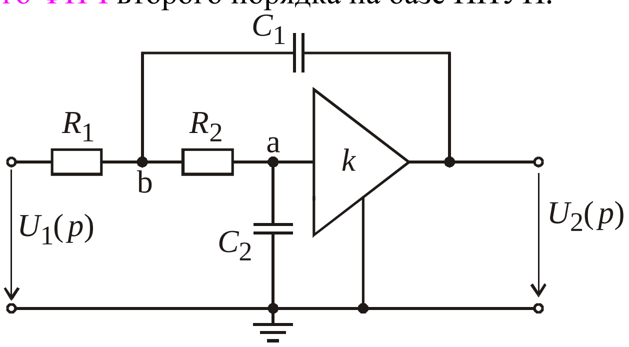
Условное обозначение операционного усилителя (ОУ):





ARC фильтры второго порядка

Рассмотрим схему активного ФНЧ второго порядка на базе ИНУН.



$$\left(\frac{1}{R_2}+pC_2\right)V_a-\frac{1}{R_2}V_b=0,$$

$$\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+pC_1\right)V_b-\frac{1}{R_2}V_a=U_1\frac{1}{R_1}+U_2pC_1$$

Коэффициент усиления определяется как: $k=\dfrac{U_2(p)}{V_a(p)}$.

Операторное выражение для передаточной функции:

$$T(p)=\frac{U_2(p)}{U_1(p)}=\frac{k}{R_1R_2C_1C_2p^2+\left(R_1C_1+R_2C_2+R_1C_2-kR_1C_1\right)p+1}.$$

Введем обозначения:

$$b_0=1,\ b_1=R_1C_1+R_2C_2+R_1C_2-kR_1C_1,\ b_2=R_1R_2C_1C_2,\text{ тогда:}$$

$$T(p)=\frac{1}{b_2p^2+b_1p+b_0}.$$

Основные характеристики ARC ФНЧ второго порядка:

$Q=\frac{\sqrt{b_0b_2}}{b_1}$ – добротность полюса; $\omega_0=\sqrt{\frac{b_0}{b_2}}$ – частота полюса (резонансная).

Классическая чувствительность:

$$S_x^W(p,x)=\frac{\frac{dW}{W}}{\frac{dx}{x}}=\frac{x}{W(p)}\cdot\frac{dW}{dx},\text{ где}$$

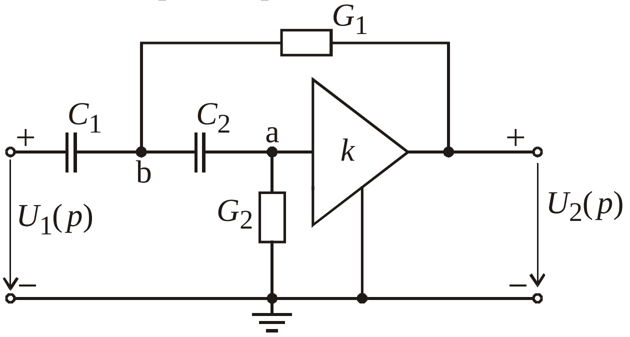
$W(p,x)$ – функция цепи (добротность полюса, частота полюса),

x – параметр, влияющий на функцию цепи (емкость, сопротивление, коэффициент усиления).

Например, определим чувствительность частоты полюса при изменении параметра R_1 и k.

$$S_{R_1}^{\omega_0}=\frac{R_1}{\omega_0}\cdot\frac{d}{dR_1}\left(\frac{1}{\sqrt{R_1R_2C_1C_2}}\right)=-\frac{1}{2},\ S_k^{\omega_0}=\frac{k}{\omega_0}\cdot\frac{d}{dk}\left(\frac{1}{\sqrt{R_1R_2C_1C_2}}\right)=0.$$

Рассмотрим схему активного ФВЧ второго порядка на базе ИНУН.



$$(G_2+pC_2)V_a(p)-pC_2V_b(p)=0,$$

$$(G_1+pC_1+pC_2)V_b(p)-pC_2V_a(p)=U_1(p)pC_1+U_2(p)G_1.$$

Определим операторную передаточную функцию с учетом того, что $k=\frac{U_2(p)}{V_a(p)}$:

$$T(p)=\frac{U_2(p)}{U_1(p)}=\frac{kp}{p^2+\left(G_1C_1^{-1}+G_2C_2^{-1}+G_2C_1^{-1}-kG_1C_1^{-1}\right)p+G_1G_2C_1^{-1}C_2^{-1}}.$$

Введем обозначения:

$$c_1=k,\ a_0=G_1G_2C_1^{-1}C_2^{-1},\ a_1=G_1C_1^{-1}+G_2C_2^{-1}+G_2C_1^{-1}-kG_1C_1^{-1},\ a_2=1,\text{ тогда}$$

$$T(p)=\frac{c_1p}{a_2p^2+a_1p+a_0}.$$

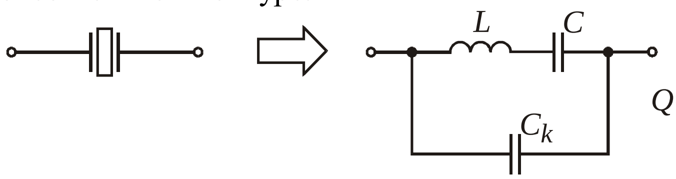
Резонаторные фильтры (пьезоэлектрические, магнитострикционные, электромеханические).

Резонаторные фильтры в отличие от LC-фильтров имеют очень высокую добротность, избирательность.

В пьезоэлектрических фильтрах роль резонатора выполняет пластинка из материала, обладающего пьезоэлектрическим эффектом (кристалл кварца). Пьезоэффект кварцевой пластинки заключается в появлении на ее поверхности зарядов при механическом воздействии. Обратный пьезоэффект – возникновение механических колебаний пластинки при помещении ее в переменное электрическое поле.

При совпадении частоты механических колебаний и частоты переменного напряжения возникает резонанс, амплитуда тока достигает максимального значения.

Механический резонанс в кварцевой пластинке подобен резонансу напряжений в последовательном колебательном контуре.

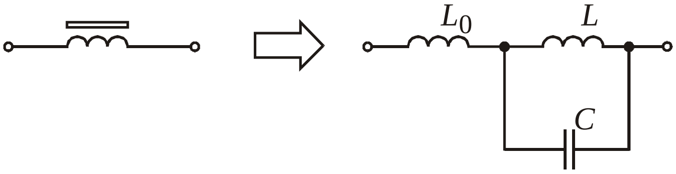


Q=10000...20000

C_k – емкость кварцедержателя.

Магнитострикционные фильтры строятся на основе резонаторов из ферромагнитного материала, обладающего магнитострикционным эффектом (сплав никеля с кобальтом). Магнитострикционный эффект состоит в том, что стержень из ферромагнетика, помещенный в переменное магнитное поле, изменяет свои геометрические размеры. Обратный эффект – изменение магнитной проницаемости стержня при механическом воздействии на него.

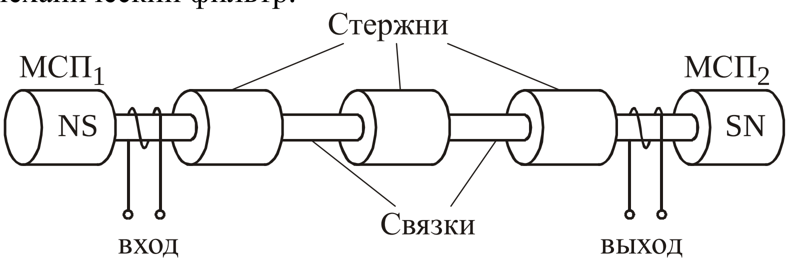
Механический резонанс магнитострикционного стержня подобен резонансу токов в параллельном колебательном контуре.



Q=5000...10000

Пьезоэлектрические и магнитострикционные фильтры строятся по мостовой схеме.

В электромеханических фильтрах резонаторами являются металлические тела (диски, пластинки, стержни), соединенные металлическими связками. Представим трехрезонаторный стержневой электромеханический фильтр.



Колебания возбуждаются с помощью МСП$_1$; снимаются колебания с выхода с помощью МСП$_2$.

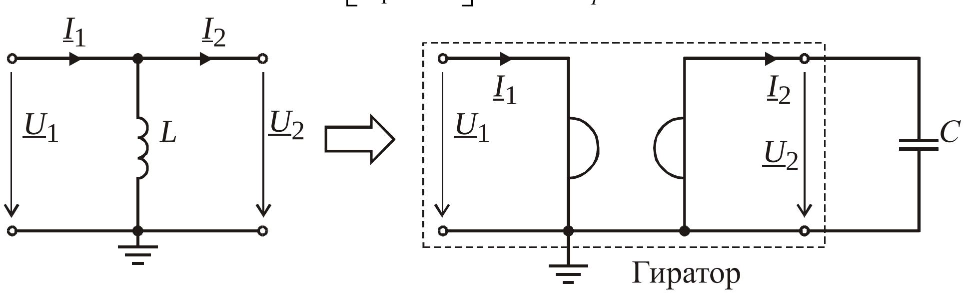
Имитационные фильтры

В фильтрах данного типа имитируется индуктивность с помощью гиратора – необратимого четырехполюсника, описываемого уравнениями:

$$\underline{U}_1 = \underline{I}_2 R_\Gamma,\ \underline{I}_1 = \underline{U}_2 G_\Gamma .$$

Матрица А-параметров:

$$\begin{bmatrix} 0 & R_\Gamma \\ G_\Gamma & 0 \end{bmatrix},\ G_\Gamma = \frac{1}{R_\Gamma}.$$



Входное сопротивление:

$$Z_{\text{вх}}(p) = \frac{U_1(p)}{I_1(p)} = pL = \frac{I_2(p) R_\Gamma}{U_2(p) G_\Gamma} = R_\Gamma^2 pC .$$

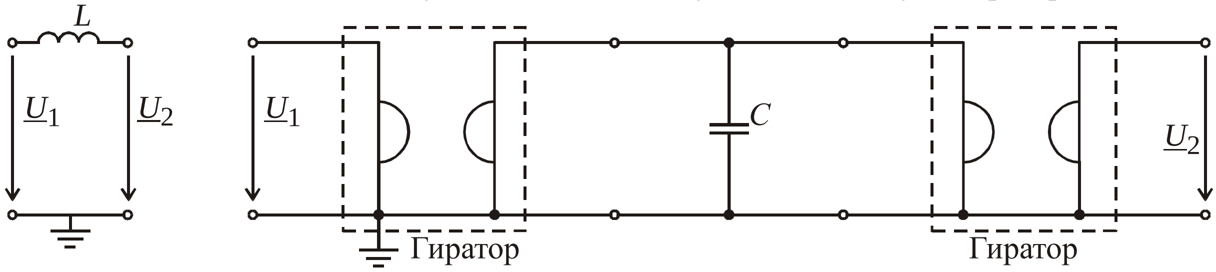
Отсюда видно, что $L = R_\Gamma^2 C$.

Использование гираторов с большим значением R_Γ позволяет из небольших емкостей моделировать большие значения индуктивности. Важным свойством гиратора является то, что он не потребляет энергию цепи, то есть ведет себя как пассивный элемент без потерь.

Анализируя схемы реактивных фильтров, видно, что встречаются индуктивности двух типов:

1. «заземленная» индуктивность – один из ее выводов подключен к общему зажиму.
2. «незаземленная» индуктивность – ни один из ее выводов не подключен к общему проводнику.

По предыдущей схеме видно, что более просто имитируется «заземленная» индуктивность. Для имитации «незаземленной» индуктивности используется цепь с двумя гираторами.



Представим схемы имитационных фильтров нижних и верхних частот:

Схема ФНЧ

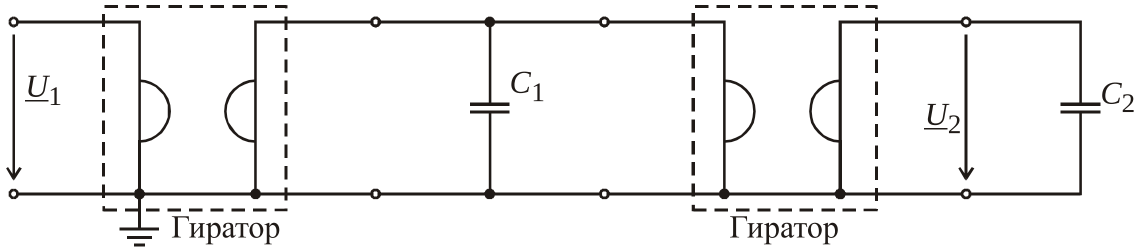
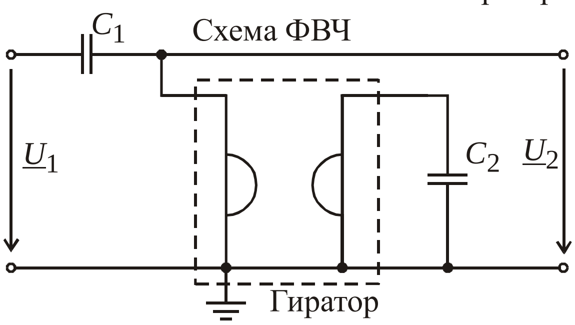


Схема ФВЧ

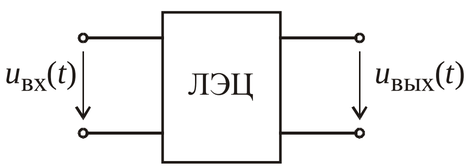


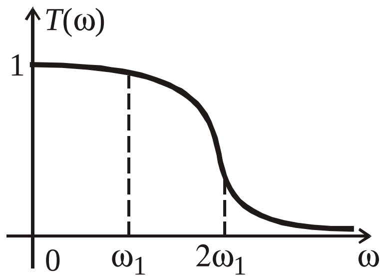
Лекция 14

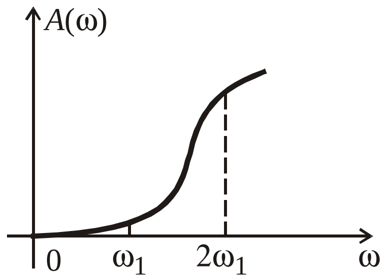
Корректирование амплитудно-частотных искажений.

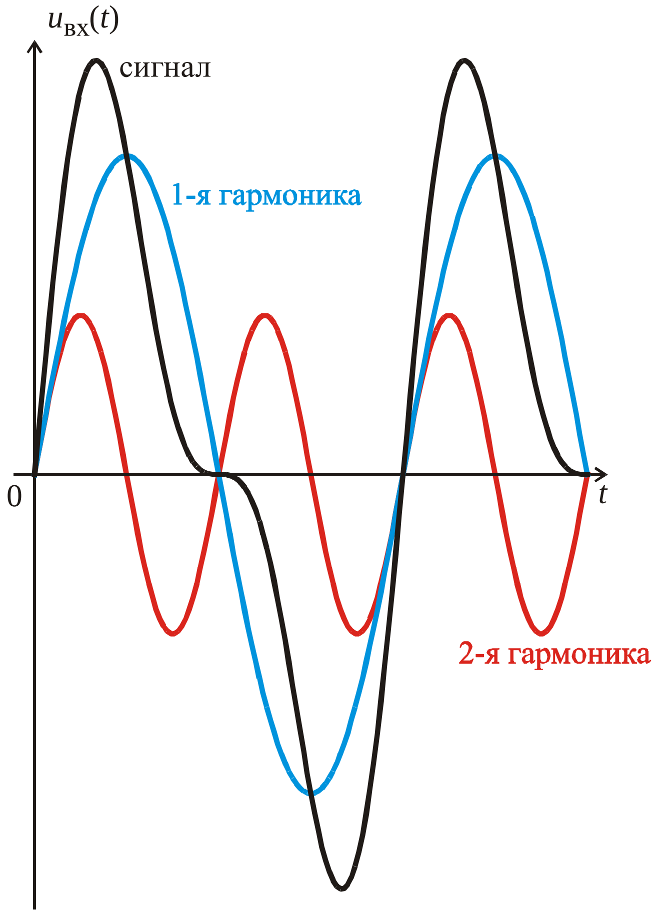
Искажение сигнала – изменение его формы на выходе цепи по сравнению с формой сигнала на входе цепи.

Амплитудно-частотные искажения связаны с непостоянством АЧХ.

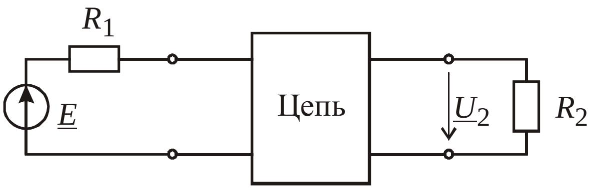




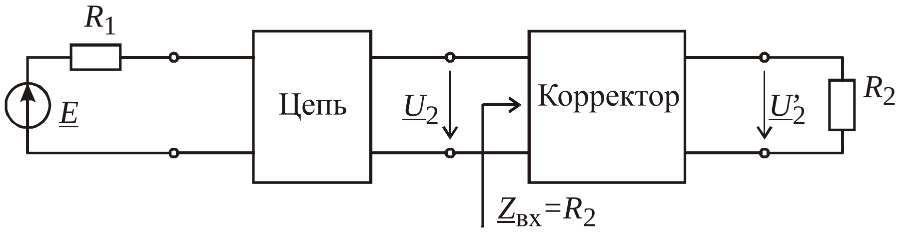




Для устранения амплитудно-частотных искажений применяют амплитудный корректор – четырехполюсник, включаемый каскадно в цепь с целью дополнения АЧХ до постоянной величины.



$$T_ц(\omega) = \frac{2U_2}{E}\sqrt{\frac{R_1}{R_2}}.$$



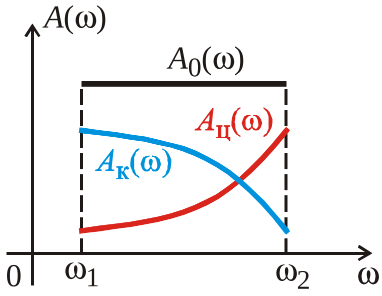
$$T_0(\omega) = \frac{2U'_2}{E}\sqrt{\frac{R_1}{R_2}}.$$

$$T_0(\omega) = \frac{2U_2}{E}\sqrt{\frac{R_1}{R_2}} \cdot \frac{U'_2}{U_2} = T_ц(\omega)\,T_к(\omega)$$

$T_к(\omega) = \dfrac{U'_2}{U_2}$ – коэффициент передачи корректора.

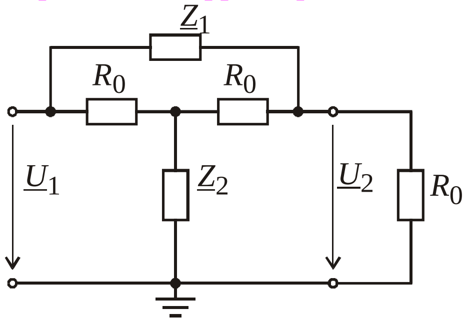
$$A_0(\omega) = 20\lg\frac{1}{T_0(\omega)} = 20\lg\frac{1}{T_ц(\omega)}\cdot\frac{1}{T_к(\omega)},$$

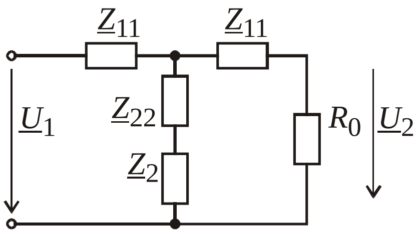
$$A_0(\omega) = 20\lg\frac{1}{T_ц(\omega)} + 20\lg\frac{1}{T_к(\omega)} = A_ц(\omega) + A_к(\omega).$$



Амплитудные корректоры

Первый тип корректора





Реактивные сопротивления дуальные: $\underline{Z}_1\underline{Z}_2 = R_0^2$.

Определим входное сопротивление:

$$\underline{Z}_{вх} = \underline{Z}_{11} + \frac{(\underline{Z}_{11}+\underline{Z}_2)(\underline{Z}_{11}+R_0)}{\underline{Z}_{11}+\underline{Z}_{22}+\underline{Z}_2+R_0} = R_0, \text{ где } \underline{Z}_{11} = \frac{R_0\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1+2R_0},\ \underline{Z}_{22} = \frac{R_0^2}{\underline{Z}_1+2R_0}$$

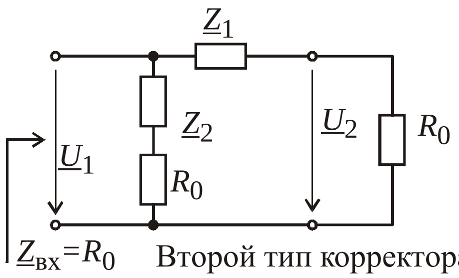
Определим передаточную функцию:

$$\underline{T}_к(\omega) = \frac{\underline{U}_2(\omega)}{\underline{U}_1(\omega)} = \frac{(\underline{Z}_{22}+\underline{Z}_2)R_0}{\underline{Z}_{вх}(\underline{Z}_{11}+\underline{Z}_{22}+\underline{Z}_2+R_0)} = \frac{R_0}{R_0+\underline{Z}_1}, \text{ или } T_к(p) = \frac{R_0}{R_0+Z_1(p)}.$$

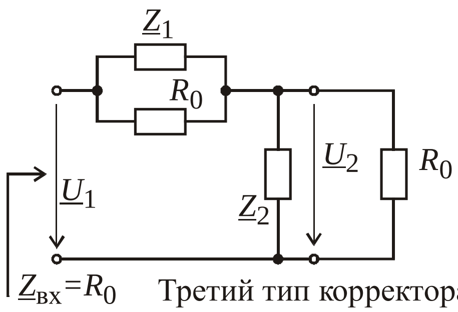
Определим ослабление, вносимое корректором:

$$A_к(\omega) = 20\lg\frac{1}{T_к(\omega)} = 20\lg\left|1+\frac{\underline{Z}_1}{R_0}\right|.$$

Зная поведение $\underline{Z}_1$ на разных частотах, можно определить частотную зависимость ослабления!!!

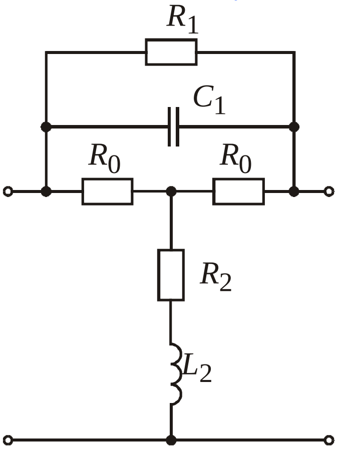


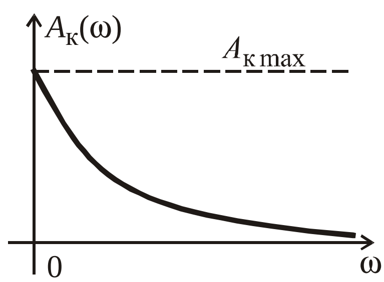
Второй тип корректора



Третий тип корректора

Амплитудные корректоры первого порядка.





Определим операторное сопротивление:

$$Z_1(p)=\frac{R_1\dfrac{1}{pC_1}}{R_1+\dfrac{1}{pC_1}}=\frac{R_1}{pR_1C_1+1}=\frac{1}{C_1\left(p+\dfrac{1}{R_1C_1}\right)}.$$

Определим передаточную функцию корректора:

$$T_к(p)=\frac{R_0}{R_0+Z_1(p)}=\frac{R_0}{R_0+\dfrac{1}{C_1\left(p+\dfrac{1}{R_1C_1}\right)}}=\frac{p+\dfrac{1}{R_1C_1}}{p+\dfrac{R_0+R_1}{R_0R_1C_1}}=\frac{p+\alpha_1}{p+\alpha_2}.$$

$$T_к^2(\omega)=\underline{T}_к(\omega)\underline{T}_к^*(\omega)=\frac{j\omega+\alpha_1}{j\omega+\alpha_2}\cdot\frac{-j\omega+\alpha_1}{-j\omega+\alpha_2}=\frac{\omega^2+\alpha_1^2}{\omega^2+\alpha_2^2}.$$

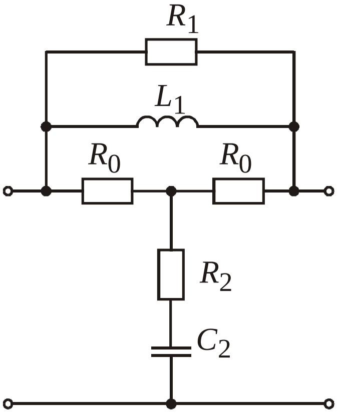
Определим ослабление корректора:

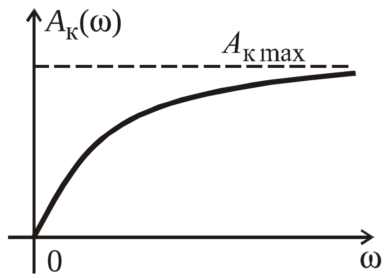
$$A_к(\omega)=20\lg\frac{1}{T_к(\omega)}=20\lg\sqrt{\frac{\omega^2+\alpha_2^2}{\omega^2+\alpha_1^2}}=10\lg\frac{\omega^2+\alpha_2^2}{\omega^2+\alpha_1^2}.$$

Определим максимальное значение ослабления:

$$A_{к\,\max}=A_к(0)=10\lg\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2}=20\lg\frac{\alpha_2}{\alpha_1}=20\lg\frac{R_0+R_1}{R_0R_1C_1}R_1C_1=20\lg\frac{R_0+R_1}{R_0}.$$

Определим частотную характеристику ослабления корректора, состоящего из параллельного соединения R_1 и L_1.





Определим операторное сопротивление:

$$Z_1(p)=\frac{R_1pL_1}{R_1+pL_1}.$$

Определим передаточную функцию корректора:

$$T_к(p)=\frac{R_0}{R_0+Z_1(p)}=\frac{R_0}{R_0+\dfrac{R_1pL_1}{R_1+pL_1}}=\frac{R_0(R_1+pL_1)}{R_1R_0+pL_1R_0+R_1pL_1}=\frac{R_0L_1\left(\dfrac{R_1}{L_1}+p\right)}{L_1(R_0+R_1)\left(\dfrac{R_1R_0}{L_1(R_0+R_1)}+p\right)}$$

$$T_к(p)=H\frac{p+\alpha_1}{p+\alpha_2},\ \text{где}\ H=\frac{R_0}{R_0+R_1},\ \alpha_1=\frac{R_1}{L_1},\ \alpha_2=\frac{R_1R_0}{L_1(R_0+R_1)}.$$

$$T_к^2(\omega)=\underline{T}_к(\omega)\underline{T}_к^*(\omega)=H^2\frac{j\omega+\alpha_1}{j\omega+\alpha_2}\cdot\frac{-j\omega+\alpha_1}{-j\omega+\alpha_2}=H^2\frac{\omega^2+\alpha_1^2}{\omega^2+\alpha_2^2}.$$

Определим ослабление корректора:

$$A_к(\omega)=20\lg\frac{1}{T_к(\omega)}=20\lg\left(\frac{1}{H}\sqrt{\frac{\omega^2+\alpha_2^2}{\omega^2+\alpha_1^2}}\right)=10\lg\left(\frac{1}{H^2}\cdot\frac{\omega^2+\alpha_2^2}{\omega^2+\alpha_1^2}\right).$$

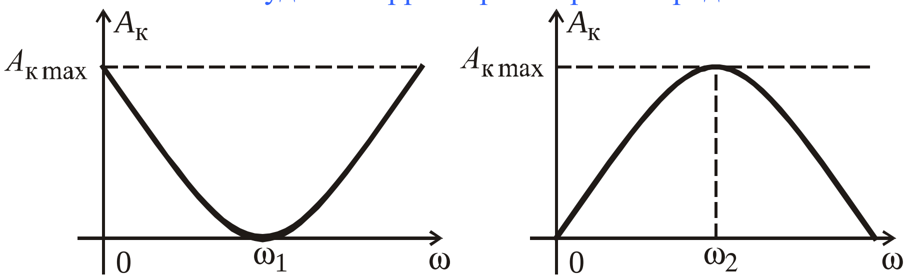
Определим минимальное значение ослабления:

$$A_{\text{к min}} = A_{\text{к}}(0) = 10\lg\left(\frac{1}{H^2}\cdot\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2}\right) = 20\lg\left(\frac{1}{H}\cdot\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) = 20\lg\left(\frac{R_0+R_1}{R_0}\cdot\frac{R_1R_0}{L_1(R_0+R_1)}\cdot\frac{L_1}{R_1}\right) = 20\lg 1 = 0\,.$$

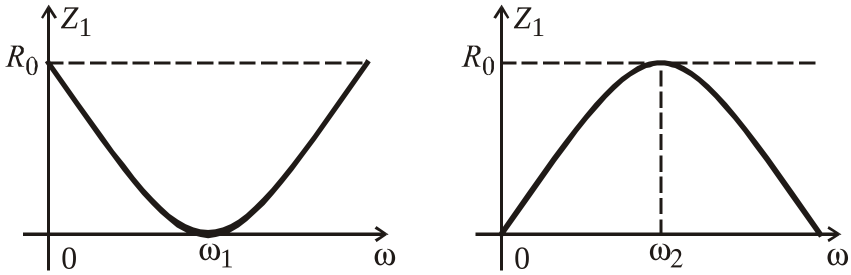
Определим максимальное значение корректора:

$$A_{\text{к max}} = \lim_{\omega\to\infty} 10\lg\left(\frac{1}{H^2}\cdot\frac{\omega^2+\alpha_2^2}{\omega^2+\alpha_1^2}\right) = 10\lg\frac{1}{H^2} = 20\lg\frac{R_0+R_1}{R_0} = 20\lg\left(1+\frac{R_1}{R_0}\right).$$

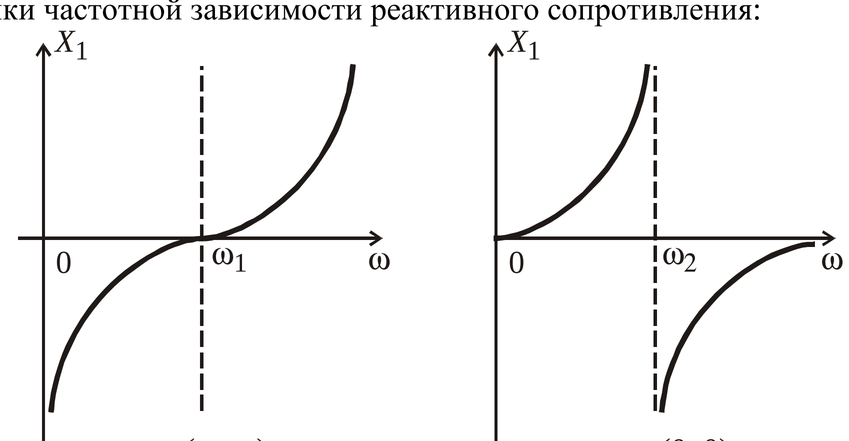
Амплитудные корректоры второго порядка



Поскольку $A_{\text{к}}(\omega) = 20\lg\dfrac{1}{T_{\text{к}}(\omega)} = 20\lg\left|1+\dfrac{Z_1}{R_0}\right|$, то форма частотной зависимости полного сопротивления Z_1 совпадает с формой частотной зависимости ослаблением корректора:

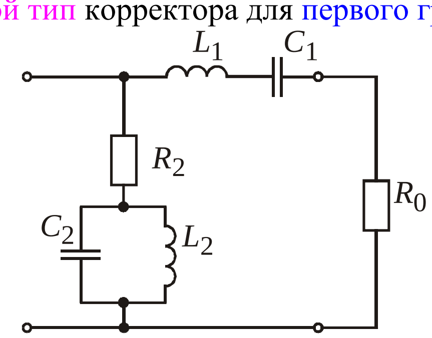


Представим графики частотной зависимости реактивного сопротивления:

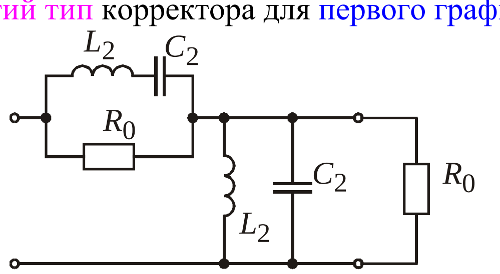


класс (∞, ∞) класс (0, 0)

Второй тип корректора для первого графика



Третий тип корректора для первого графика

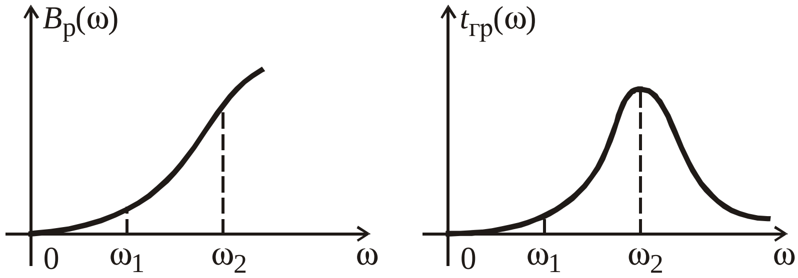


Лекция 15

Корректирование фазочастотных искажений

Рассмотрим цепь, имеющую рабочую фазу и характеристику группового времени прохождения (ГВП) в виде:

$$t_{\text{гр}}(\omega) = \frac{dB_{\text{р}}(\omega)}{d\omega}$$



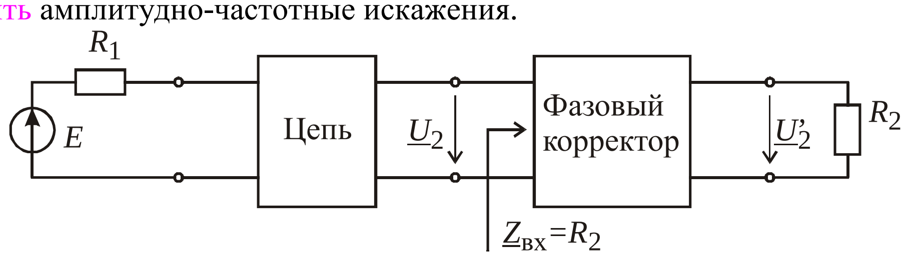
При этом фаза первой гармоники почти не изменяется, а фаза второй гармоники существенно увеличивается. В результате форма сигнала на входе цепи будет отличаться от формы сигнала на выходе.

Искажения формы сигнала при прохождении его по цепи, обусловленные нелинейностью фазо-частотной характеристики цепи или непостоянством группового времени прохождения, называются фазо-частотными искажениями.

Условием отсутствия фазо-частотных искажений в цепи следует считать линейность рабочей фазы и ФЧХ цепи, либо неизменной ГВП, то есть

$$B_{\text{р}}(\omega) = -\varphi(\omega) = \omega t_0,\ t_{\text{гр}}(\omega) = \frac{dB_{\text{р}}(\omega)}{d\omega} = t_0.$$

В реальных цепях таких условий достичь невозможно, но можно к ним приблизиться!!!
С этой целью применяют фазовые корректоры – четырехполюсники, включаемые каскадно с цепью и дополняющие фазовую характеристику цепи до линейной. При этом фазовый корректор не должен вносить амплитудно-частотные искажения.



Определим комплексную передаточную функцию общей цепи:

$$\underline{T}_0(\omega) = \frac{2\underline{U}'_2}{\underline{E}}\sqrt{\frac{R_1}{R_2}}.$$

Умножим и разделим это выражение на $\underline{U}_2$, тогда:

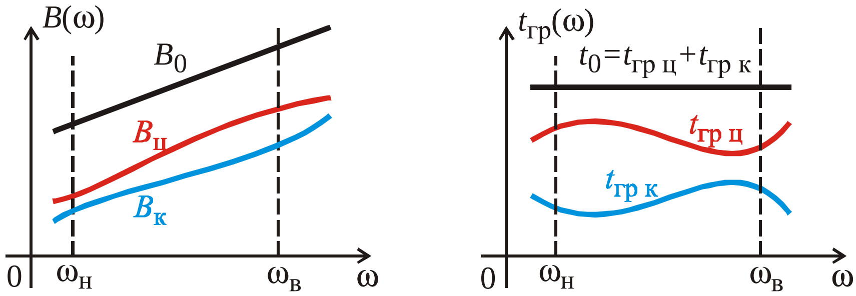
$$\underline{T}_0(\omega) = \frac{2\underline{U}_2}{\underline{E}}\sqrt{\frac{R_1}{R_2}} \cdot \frac{\underline{U}'_2}{\underline{U}_2} = \underline{T}_{\text{ц}}(\omega)\underline{T}_{\text{к}}(\omega).$$

Определим ФЧХ общей цепи:

$$T_0(\omega)e^{j\arg(T_0(j\omega))} = T_{\text{ц}}(\omega)e^{j\arg(T_{\text{ц}}(j\omega))}T_{\text{к}}(\omega)e^{j\arg(T_{\text{к}}(j\omega))},$$ отсюда следует:

$$\varphi_0(\omega) = \varphi_{\text{ц}}(\omega) + \varphi_{\text{к}}(\omega).$$

Вывод: ФЧХ общей цепи вычисляется как сумма ФЧХ цепи и корректора.
За пределами рабочего диапазона частот ФЧХ или ГВП могут иметь любую форму.



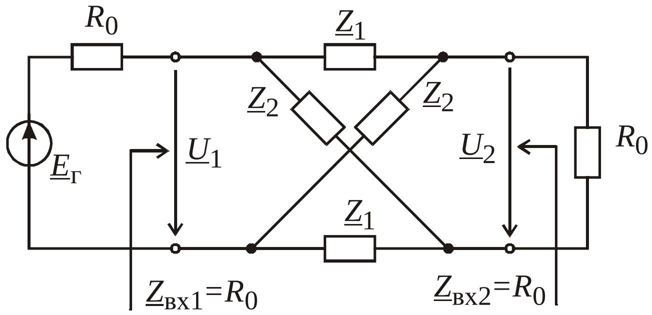
Фазовые корректоры

Фазовые корректоры должны иметь постоянное входное сопротивление и постоянное ослабление, которые не зависят от частоты. Таким условиям удовлетворяют симметричные мостовые четырехполюсники, у которых сопротивления $\underline{Z}_1$ и $\underline{Z}_2$ дуальные.

$$\underline{Z}_1\underline{Z}_2 = R_0^2, \text{ причём } \underline{Z}_1 = \pm \mathrm{j}X_1,\ \underline{Z}_2 = \mp \mathrm{j}X_2 .$$

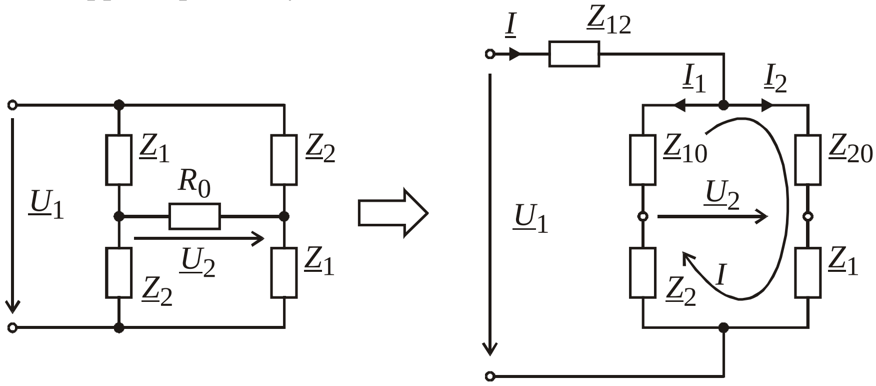
Такие четырехполюсники имеют одинаковые собственные сопротивления:

$$\underline{Z}_{c1} = \underline{Z}_{c2} = \underline{Z}_c = \sqrt{\underline{Z}_1\underline{Z}_2} = R_0 .$$



Покажем, что входное сопротивление фазового корректора равно номинальному!

Представим фазовый корректор в следующем виде:



$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \underline{Z}_{12} + \frac{(\underline{Z}_{10} + \underline{Z}_2)(\underline{Z}_{20} + \underline{Z}_1)}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_{10} + \underline{Z}_{20}}, \text{ где}$$

$$\underline{Z}_{12} = \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + R_0},\ \underline{Z}_{10} = \frac{\underline{Z}_1 R_0}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + R_0},\ \underline{Z}_{20} = \frac{\underline{Z}_2 R_0}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + R_0}.$$

После подстановки и алгебраических преобразований, получим:

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \frac{\underline{Z}_1 R_0 + \underline{Z}_2 R_0 + 2\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + 2R_0 + \underline{Z}_1}, \text{ так как } \underline{Z}_1\underline{Z}_2 = R_0^2, \text{ то } \underline{Z}_{\text{вх}} = R_0 .$$

Определим комплексный коэффициент передачи по напряжению:

$$\underline{T}_{\text{к}}(\omega) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}, \text{ где } \underline{U}_2 = \underline{I}_1\underline{Z}_2 - \underline{I}_2\underline{Z}_1 \text{ для контура I.}$$

По формулам делителя тока определим:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}\frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_{20}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_{10} + \underline{Z}_{20}},\ \underline{I}_2 = \underline{I}\frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{10}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_{10} + \underline{Z}_{20}}.$$

Выражение для комплексного коэффициента передачи:

$$\underline{T}_к(\omega)=\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}=\frac{\underline{I}\left(\frac{(\underline{Z}_{20}+\underline{Z}_1)\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2+\underline{Z}_{10}+\underline{Z}_{20}}-\frac{(\underline{Z}_{10}+\underline{Z}_2)\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2+\underline{Z}_{10}+\underline{Z}_{20}}\right)}{\underline{I}\,\underline{Z}_{вх}}$$, так как $\underline{Z}_{вх}=R_0$, то

$$\underline{T}_к(\omega)=\frac{\underline{Z}_2-\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2+2R_0+\underline{Z}_1}$$, так как $\underline{Z}_1\underline{Z}_2=R_0^2$, то $\underline{T}_к(\omega)=\frac{R_0-\underline{Z}_1}{R_0+\underline{Z}_1}$.

Пусть $\underline{Z}_1=\mathrm{j}X_1$, тогда

$$\underline{T}_к(\omega)=\frac{R_0-\mathrm{j}X_1}{R_0+\mathrm{j}X_1}=\frac{\sqrt{R_0^2+X_1^2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\mathrm{arctg}\frac{X_1}{R_0}}}{\sqrt{R_0^2+X_1^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\mathrm{arctg}\frac{X_1}{R_0}}}=1\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\,\mathrm{arctg}\frac{X_1}{R_0}}.$$

Таким образом: $T_к(\omega)=1$ – АЧХ, $\varphi_к(\omega)=-2\,\mathrm{arctg}\frac{X_1}{R_0}$ – ФЧХ.

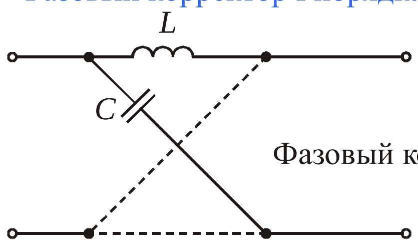
Так как $B_р(\omega)=-\varphi(\omega)$, то рабочая фаза определяется как: $B_к(\omega)=2\,\mathrm{arctg}\frac{X_1}{R_0}$.

Определим групповое время прохождения (ГВП):

$$t_{гр}(\omega)=\frac{dB_р(\omega)}{d\omega}=\frac{\frac{2}{R_0}}{1+\left(\frac{X_1}{R_2}\right)^2}\cdot\frac{dX_1}{d\omega}.$$

Вывод: рабочая фаза и ГВП определяются только видом двухполюсника с реактивным сопротивлением X_1.

Фазовый корректор I порядка. Линия задержки



Фазовый корректор I порядка

Двухполюсником $\underline{Z}_1$ является индуктивность, а $\underline{Z}_2$ – ёмкость: $\underline{Z}_1=\mathrm{j}\omega L$, $\underline{Z}_2=\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}$.

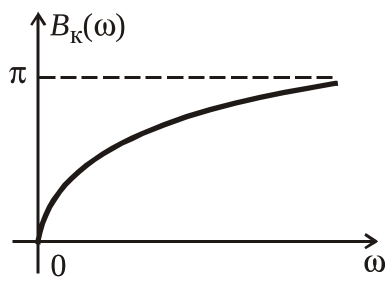
Определим операторную передаточную функцию:

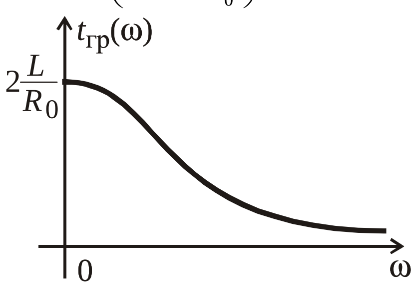
$$\underline{T}_к(\omega)=\frac{R_0-\underline{Z}_1}{R_0+\underline{Z}_1}=\frac{R_0-\mathrm{j}\omega L}{R_0+\mathrm{j}\omega L}=1\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\,\mathrm{arctg}\frac{\omega L}{R_0}}.$$

Отсюда определим ФЧХ: $\varphi_к(\omega)=-2\,\mathrm{arctg}\frac{\omega L}{R_0}$.

Определим рабочую фазу корректора и ГВП:

$$B_к(\omega)=2\,\mathrm{arctg}\frac{\omega L}{R_0},\quad t_{гр}(\omega)=\frac{dB_к(\omega)}{d\omega}=2\frac{L}{R_0\left(1+\omega^2\frac{L^2}{R_0^2}\right)}=\frac{2LR_0}{R_0^2+\omega^2L^2}.$$





Линия задержки осуществляет задержку колебания на постоянную величину $t_з$, не изменяя энергии этого колебания. Для идеальной линии задержки выполняются условия:

$$T(\omega)=1,\ \varphi(\omega)=-\omega t_з\,.$$

Передаточную функцию линии можно представить как:

$$\underline{T}(\omega)=1\cdot e^{-j\omega t_з}\,.$$

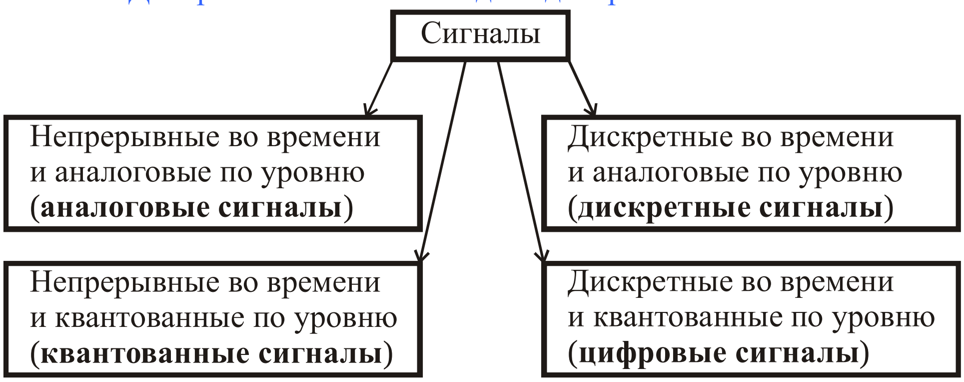
Данная функция не удовлетворяет условиям физической реализуемости, так как $\varphi(\omega)$ не является тангенс-функцией.

Определим общий вид передаточной функции линии задержки:

$$\underline{T}(\omega)=\frac{\underline{V}^*(\omega)}{\underline{V}(\omega)},\ \text{либо}\ T(p)=\frac{V(-p)}{V(p)}\ \text{где}\ V(p)\ \text{– полином Гурвица.}$$

Решая задачу синтеза линии задержки необходимо найти такой полином Гурвица, у которого в заданном частотном интервале функция $\varphi_г(\omega)=\arg\underline{V}(\omega)$ аппроксимировала бы линейную зависимость $\xi(\omega)=\omega\tau$, или функция $\varphi_г'(\omega)$ аппроксимировала бы постоянную $\xi'(\omega)=\tau$.

Дискретные сигналы. Модель дискретного сигнала.

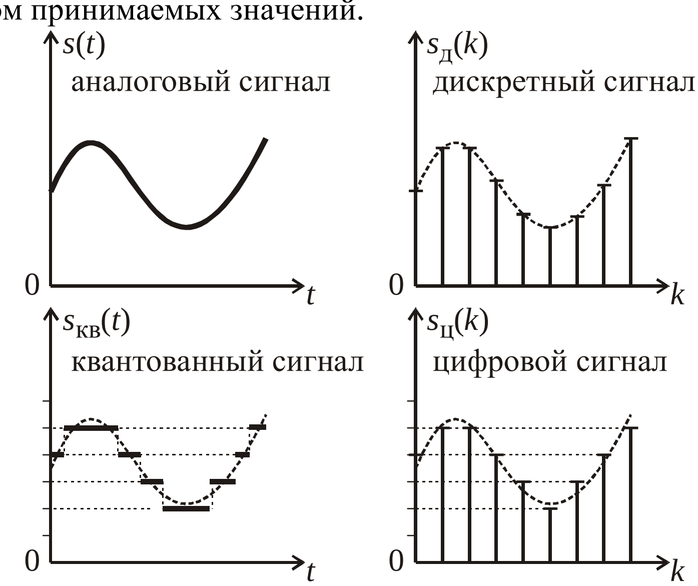


Сигналы как процессы, передающие информацию о состоянии физических систем, описываются математическими моделями в виде функций времени.

Непрерывные (аналоговые) сигналы определены на непрерывном временном множестве и характеризуются непрерывном множеством принимаемых значений.

Дискретные сигналы определены на дискретном временном множестве.

Цифровые сигналы определены на дискретном временном множестве и характеризуются дискретным множеством принимаемых значений.



Математическая модель аналогового сигнала: $S(t)$ – непрерывная функция.

Математическая модель дискретного сигнала: $S(k\Delta t)\Leftrightarrow S_д(k)$ – последовательность отсчетных значений.

Отсчеты дискретного сигнала производятся через постоянный промежуток времени:

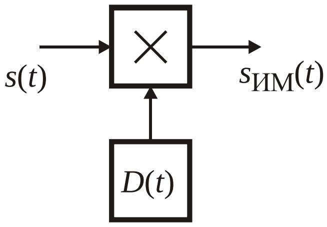
$$\Delta t=t_n-t_{n-1}\ \text{– интервал дискретизации},\ \ \omega_д=\frac{2\pi}{\Delta t}\ \text{– частота дискретизации}.$$

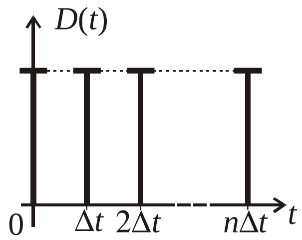
Для удобства анализа дискретных систем используют модель дискретного сигнала в виде:

$S_{ИМ}(t) = \Delta t \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} S(\Delta t \cdot n)\delta(t - n\cdot\Delta t)$ – модулированная импульсная последовательность (МИП).

МИП можно представить также в виде: $S_{ИМ}(t) = S(t)\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \Delta\delta(t - n\cdot\Delta t) = S(t)D(t)$.

С физической точки зрения МИП описывает сигнал на выходе устройства, в котором реализуется операция умножение входного аналогового сигнала $S(t)$ на импульсный сигнал $D(t)$:





Импульсный сигнал (дискретизирующая последовательность) $D(t)$ – периодическая функция с периодом $T = \Delta t$ и может быть представлена рядом Фурье:

$$D(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m e^{jm\omega_д t} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m e^{jm\frac{2\pi}{\Delta t}t},$$

где $C_m = \dfrac{1}{\Delta}\int\limits_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} D(t)e^{-jm\frac{2\pi}{\Delta}t}dt = \dfrac{1}{\Delta t}\int\limits_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} \Delta t\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t - n\Delta)e^{-jm\frac{2\pi}{\Delta t}t}dt = \int\limits_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2}\delta(t)e^{-jm\frac{2\pi}{\Delta t}t} = 1$.

Окончательно получаем:

$$D(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{jm\frac{2\pi}{\Delta t}t},\ \text{с другой стороны}\ D(t) = \Delta t\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t - n\cdot\Delta t),\ \text{таким образом:}$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{jm\frac{2\pi}{\Delta t}t} = \Delta t\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t - n\cdot\Delta t)$$ – I суммирование Пуассона.

Спектр модулированной импульсной последовательности

Определим спектр импульсной функции $D(t)$ по формуле: $D(\omega) = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} D(t)e^{-j\omega t}dt$.

$$D(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{jm\frac{2\pi}{\Delta t}t}e^{-j\omega t}dt = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\left(\omega - m\frac{2\pi}{\Delta t}\right)t}dt = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega - m\frac{2\pi}{\Delta t}\right).$$

С другой стороны $D(\omega) = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Delta t\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t - n\cdot\Delta t)e^{-j\omega t}dt = \dfrac{\Delta t}{2\pi}\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega n\cdot\Delta t}$.

Таким образом: $\dfrac{\Delta t}{2\pi}\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega n\cdot\Delta t} = \sum\limits_{m=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega - m\dfrac{2\pi}{\Delta t}\right)$. – II суммирование Пуассона.

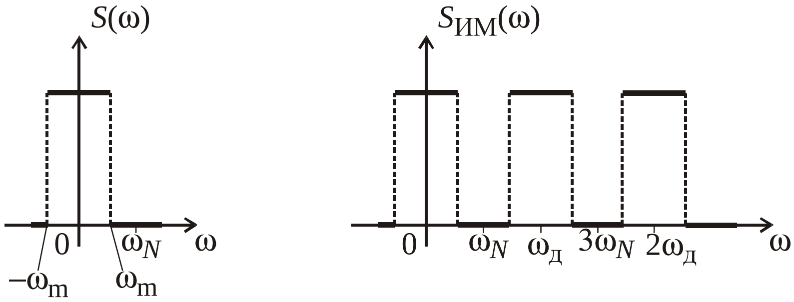
Определим спектр МИП по формуле: $S_{ИМ}(\omega) = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} S(t)D(t)e^{-j\omega t}dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} S(\Omega)D(\omega - \Omega)d\Omega$.

После подстановки, получим:

$$S_{ИМ}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\Omega)\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega - m\frac{2\pi}{\Delta t} - \Omega\right)d\Omega = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} S(\Omega)\delta\left(\omega - \Omega - m\frac{2\pi}{\Delta t}\right)d\Omega = \sum_{m=-\infty}^{\infty} S\left(\omega - m\frac{2\pi}{\Delta t}\right).$$

Вывод: Спектр дискретного сигнала, описываемого моделью МИП, представляет собой сумму бесконечно большого числа сдвинутых по оси частот копий спектра исходного аналогового сигнала.

Пусть выполняется условие: $\omega_m < \omega_N = \dfrac{\omega_д}{2} = \dfrac{\pi}{\Delta t}$ – частота Найквиста.



Измерения, проведенные на любом из периодов $S_{ИМ}(\omega)$, позволяют восстановить спектр $S(\omega)$.

Если $\omega_m > \omega_N$, то восстановить спектр аналогового сигнала невозможно. В этом случае в спектре дискретного сигнала происходит наложение копий спектра аналогового сигнала.

Теорема дискретизации

Определение: Произвольный сигнал со спектром, лежащим в интервале частот $-\omega_m \le \omega \le \omega_m$ может быть полностью восстановлен, если известны его отсчетные значения, взятые через равные промежутки времени $\Delta t = \dfrac{\pi}{\omega_m}$.

Для доказательства теоремы определим спектр дискретного сигнала, применив преобразование Фурье к обеим частям равенства.

$$S_{ИМ}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{im}(t)e^{-j\omega t}dt = \frac{\Delta t}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} S(n\cdot\Delta t)\delta(t-n\cdot\Delta t)e^{-j\omega t}dt =$$

$$= \frac{\Delta t}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} S(n\cdot\Delta t)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-n\cdot\Delta t)e^{-j\omega t}dt = \frac{\Delta t}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} S(n\cdot\Delta t)e^{-j\omega n\cdot\Delta t}$$

С другой стороны спектр МИП определяется как:

$$S_{ИМ}(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} S\left(\omega - m\frac{2\pi}{\Delta t}\right).$$

Поэтому получаем:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} S\left(\omega - m\frac{2\pi}{\Delta t}\right) = \frac{\Delta t}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} S(n\cdot\Delta t)e^{-j\omega n\cdot\Delta t}$$ – общее суммирование Пуассона.

Если спектр сигнала лежит в интервале частот $-\omega_m \le \omega \le \omega_m$, то

$$S(\omega) = \frac{\Delta t}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} S(n\cdot\Delta t)e^{-j\omega n\cdot\Delta t} \quad .$$

Таким образом, ограниченный по частоте спектр аналогового сигнала может быть определен по совокупности дискретных отсчетов.

Проинтегрируем обе части последнего равенства по частоте в интервале $-\omega_m \le \omega \le \omega_m$, предварительно умножив их на $e^{j\omega t}$.

$$\int_{-\omega_m}^{\omega_m} S(\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{\Delta t}{2\pi}\int_{-\omega_m}^{\omega_m}\sum_{n=-\infty}^{\infty} S(n\cdot\Delta t)e^{-j\omega n\cdot\Delta t}e^{j\omega t}d\omega \quad ,$$

$$S(t) = \frac{\Delta t}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} S(n\cdot\Delta t)\int_{-\omega_m}^{\omega_m} e^{j\omega(t-n\cdot\Delta t)}d\omega = \frac{\Delta t}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} S(n\cdot\Delta t)\frac{1}{j(t-n\cdot\Delta t)}\left(e^{j\omega_m(t-n\cdot\Delta t)} - e^{-j\omega_m(t-n\cdot\Delta t)}\right),$$

$$S(t) = \frac{\Delta t}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} S(n\cdot\Delta t)\frac{\sin\omega_m(t-n\cdot\Delta t)}{t-n\cdot\Delta t},$$ поскольку $\Delta t = \dfrac{\pi}{\omega_m}$, то

$$S(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S\left(\frac{n\pi}{\omega_m}\right)\frac{\sin\omega_m\left(t-\frac{n\pi}{\omega_m}\right)}{\omega_m\left(t-\frac{n\pi}{\omega_m}\right)}$$ – математическая запись теоремы дискретизации.

Дискретное во времени преобразование Фурье (ДВПФ)

В качестве модели дискретного сигнала используем МИП:

$$S_{\text{ИМ}}(t)=\Delta t\sum_{n=-\infty}^{\infty}S(n\cdot\Delta t)\delta(t-n\cdot\Delta t).$$

Спектр МИП обозначим как:

$$\overline{S}(\omega)=\frac{\Delta t}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}S(n\cdot\Delta t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n\cdot\Delta t}\ \text{– ДВПФ}.$$

Свойства ДВПФ

1. Линейность

Если $S_0(n\cdot\Delta t)=\alpha_1S_1(n\cdot\Delta t)+\alpha_2S_2(n\cdot\Delta t)$, то $\overline{S}_0(\omega)=\alpha_1\overline{S}_1(\omega)+\alpha_2\overline{S}_2(\omega)$.

2. Периодичность

Функция $\overline{S}(\omega)$ периодическая в частотной области с периодом $\Omega=\dfrac{2\pi}{\Delta t}$.

<u>Доказательство</u>:

$$\overline{S}(\omega+m\Omega)=\overline{S}\left(\omega+\frac{2m\pi}{\Delta t}\right)=\frac{\Delta t}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}S(n\cdot\Delta t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(\omega+\frac{2m\pi}{\Delta t}\right)n\cdot\Delta t}=$$

$$=\frac{\Delta t}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}S(n\cdot\Delta t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n\cdot\Delta t}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi mn}=\frac{\Delta t}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}S(n\cdot\Delta t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n\cdot\Delta t}=\overline{S}(\omega)$$

Получим обратное дискретное во времени преобразование Фурье (ОДВПФ):

$\overline{S}(\omega)=\dfrac{\Delta t}{2\pi}\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}S(n\cdot\Delta t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n\cdot\Delta t}$ представляет собой ряд Фурье с коэффициентами $C_n=\dfrac{\Delta t}{2\pi}S(n\cdot\Delta t)$.

Причем эти коэффициенты вычисляются по формуле:

$$C_n=\frac{\Delta t}{2\pi}S(n\cdot\Delta t)=\frac{1}{\Omega}\int_0^{\Omega}\overline{S}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n\cdot\Delta t}d\omega\ \text{, так как } \Omega=\frac{2\pi}{\Delta t}\text{, то } S(n\cdot\Delta t)=\int_0^{\frac{2\pi}{\Delta t}}\overline{S}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n\cdot\Delta t}d\omega\ \text{– ОДВПФ}.$$

3. Свертка ДВПФ

Пусть $S_0(n\cdot\Delta t)=S_1(n\cdot\Delta t)S_2(n\cdot\Delta t)$, необходимо определить $\overline{S}_0(\omega)$.

$$\overline{S}_0(\omega)=\frac{\Delta t}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}S_1(n\cdot\Delta t)S_2(n\cdot\Delta t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n\cdot\Delta t}=\frac{\Delta t}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}S_1(n\cdot\Delta t)\int_0^{\frac{2\pi}{\Delta t}}\overline{S}_2(\omega')\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega' n\cdot\Delta t}d\omega'\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n\cdot\Delta t}=$$

$$=\int_0^{\frac{2\pi}{\Delta t}}\frac{\Delta t}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}S_1(n\cdot\Delta t)\overline{S}_2(\omega')\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega'-\omega)n\cdot\Delta t}d\omega'=\int_0^{\frac{2\pi}{\Delta t}}\overline{S}_2(\omega')d\omega'\cdot\frac{\Delta t}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}S_1(n\cdot\Delta t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega'-\omega)n\cdot\Delta t}$$

Отсюда получаем:

$$\overline{S}_0(\omega)=\int_0^{\frac{2\pi}{\Delta t}}\overline{S}_2(\omega')\overline{S}_1(\omega'-\omega)d\omega'\ \text{ или }\ \overline{S}_0(\omega)=\overline{S}_1(\omega)\otimes\overline{S}_2(\omega)\ \text{– круговая свертка}.$$

$$S_1(n\cdot\Delta t)S_2(n\cdot\Delta t)\Leftrightarrow\overline{S}_1(\omega)\otimes\overline{S}_2(\omega)\text{, обратно } S_1(n\cdot\Delta t)\otimes S_2(n\cdot\Delta t)\Leftrightarrow\frac{2\pi}{\Delta t}\overline{S}_1(\omega)\overline{S}_2(\omega).$$